

M. Abramescu
P. 572.

ANUL I. Nr. 2

10 OCTOMBRIE 1940

POZITIVA

REVISTA DE MATEMATICI

SUMARUL

- Despre şirurile monotone TIBERIU POPOVICIU
Funcţiuni poligonale V. ALACI
Asupra funcţiunilor poligonale S. CETĂŢEANU
Funcţiuni poligonale HAR. IONESCU-BISS
Curbe asociate unei curbe strâmbe . C. IONESCU-BUJOR
Curbe raţionale Ţiţeica ALEX. NICULESCU
Asupra tangentelor ~ normale ale cu-
bicelor R. P. VOINEA
Note matematice. Asupra problemei VIII. 240 (Pitagora) de
E. CRISTEA. Asupra problemei S. 217 (Pitagora) de V. FLO-
RESCU. Asupra funcţiunilor poligonale de O. ENULESCU.
Bibliografie.
Exerciţii propuse: I. 6-10; II. 6-10; III. 6-10; IV. 11-20;
V. 11-20; VI. 11-20; VII. 11-20; VIII. 11-20; F. 6-10.
Probleme propuse: 11-20 Chestiuni de Universitate: 6-10.
Soluţii primite.

Abonamentul anual (10 numere) 100 lei
Apare lunar din Septembrie până în Iunie
Proprietatea unui comitet

Inscrisă la trib. Ilfov s. I com. Dosar Nr. 2247/940.

„MUNTENIA” Griviţei, 99 — Tel. 3.76.59
BUCUREŞTI

Inv. P. 3069

REDACȚIA

G. G. CONSTANTINESCU — C. IONESCU BUJOR
C. IONESCU ȚIU — M. MANESCU — N. N. MIHAILEANU

ADMINISTRAȚIA

O. ENULESCU

Avem plăcerea să anunțăm că din comitetul revistei *Pozitiva*, mai fac parte de la 1 Octombrie D^rele: G. Mihordea, profesoară liceul industrial „Protopop Tudor“, București, H. Roșcău, profesoară Arad și Dⁿⁱⁱ: Sp. Ghițescu, profesor Gimnaziul Comercial „Petru Rareș“, București, D. Mihalascu, profesor Colegiul Național „St. Sava“, București.

AVIZ CATRE COLABORATORI

Articolele și notele trimise trebuie să fie originale. Ele se publică în ordinea primirii. În caz de neacceptare, studiul se restituie cu referatul respectiv.

Rugăm pe autori să trimită lucrările la redacție sub o formă care să permită să se dea la imprimat, fără a li se face modificări. În acest sens, să se scrie cât mai citeț și să se aranjeze corect, formulele, pe rând aparte, dacă nu sunt prea scurte. Să se lase loc pe margine pentru indicații de tipărire; să nu se scrie pe contrapagină; rezultatele importante să fie subliniate odată; numirile de persoană să fie subliniate de două ori; titlurile de articole, note și de paragrafe cu o linie ondulată; aceste însemnări să fie făcute în creion. Citațiile de autori și opere să fie făcute în josul paginei. Să se ia ca model, pentru aranjare, chestiunile analoage publicate în revistă.

Să nu se pună punct . (punct) după titlu aparte și nici: (două puncte) la sfârșitul unui rând urmat de o formulă; să se evite strecurarea formulelor în titlu. Să nu se lase loc mult între text și formulă. Să se scrie mai degrabă

$\frac{1}{2} \bar{A}$ în loc de $\frac{A}{2}$ și $\nless A$ în loc de $\frac{A}{A}$

Figurile să fie executate în tuș negru, pe foi aparte, cu literele indicate numai în creion.

La problemele propuse și chestiunile universitare, rugăm să se dea și o schiță de soluție.

Redacția înliințează și un serviciu de informație, oferindu-se să cerceteze literatura unei chestiuni, la cererea colaboratorilor care sunt departe de centre universitare.

POZITIVA

REVISTĂ DE MATEMATICI

ANUL I No. 2

10 OCTOMBRIE 1940

OMAGIU

Despre șirurile monotone

DE TIBERIU POPOVICIU

Il existe un nombre naturel N_n tel que de toute suite de nombres réels ayant au moins N_n termes on peut extraire au moins une suite partielle monotone de n termes mais, on peut construire une suite ayant $N_n - 1$ termes dont aucune suite partielle de n termes n'est monotone. On demontre que $N_3 = 5$ et $(n-1)^2 < N_n < \frac{5}{6}n$. La valeur exacte de N_n reste à trouver

are $\binom{m}{k}$ șiruri parțiale cu k termeni și în total $2^m - 1$ șiruri parțiale cu un număr oarecare de termeni (fiecare termen c_i formează el singur un șir parțial).

Avem proprietatea aproape evidentă.

Teorema 1. Dacă șirul (1) este crescător, nedescrescător, etc. orice șir parțial (având cel puțin 2 termeni) este de asemenea crescător, nedescrescător, etc.

Reciproca teoremei este banală. Însăși definiția ne spune că pentru ca șirul (1) să fie crescător, nedescrescător, etc. e necesar, și suficient ca șirurile parțiale

$$c_i, c_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

să fie crescătoare, nedescrescătoare, etc.

Dacă considerăm monotonia fără a specifica sensul ei, ajungem la următoarea

Teorema 2. Condiția necesară și suficientă ca șirul (1) să fie monoton este ca toate șirurile parțiale de trei termeni să fie monotone.

Pentru șirul parțial $c_i, c_j, c_k, i < j < k$, condiția necesară și suficientă de monotonie este

$$(2) \quad (c_j - c_i)(c_k - c_i) \geq 0$$

Să demonstrăm acum teorema 2. Condiția este evident necesară după teorema 1. Să demonstrăm că ea este și suficientă. Să presupunem că (2) este satisfăcută, oricare ar fi $i < j < k \leq m$. Dacă șirul (1) nu ar fi monoton, șirul diferențelor

$$(3) \quad \Delta c_1, \Delta c_2, \dots, \Delta c_{m-1}$$

ar avea cel puțin doi termeni diferiți de zero și de semne contrare. Fie Δc_r primul termen $\neq 0$ în (3) și $\Delta c_s, s > r$ primul termen $\neq 0$ și de semn contrar cu Δc_r în (3). Avem $\Delta c_r \Delta c_s < 0$, iar prin construcția lui s

$$\Delta c_s \Delta c_i \leq 0, \quad i = r+1, r+2, \dots, s-1$$

dacă $s > r+1$.

Dacă $s = r+1$, avem

$$\Delta c_r \Delta c_s = (c_{r+1} - c_r)(c_{r+2} - c_{r+1}) < 0$$

care e în contradicție cu (2).

Dacă $s > r+1$, avem

$$\Delta c_s (\Delta c_r + \Delta c_{r+1} + \dots + \Delta c_{s-1}) = (c_{s+1} - c_s)(c_s - c_r) \leq 0$$

care e în contradicție cu (2).

Cele ce preced demonstrează complet teorema (2).

3. Se poate pune acum întrebarea dacă un șir oarecare (1) conține șiruri parțiale monotone de cel puțin trei termeni.

Vom demonstra pentru aceasta următoarea

Teorema 3. Orice șir (1) de (cel puțin) c

$$c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \dots, c_{n-1}^{(i)}$$

necrescător. Se poate presupune $i < j$

Dacă $c_{n-1}^{(i)} < c_1^{(j)}$ șirul

$$c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \dots, c_{n-1}^{(i)}, c_1^{(j)}$$

e de n termeni, e un șir parțial al lui (1) și este monoton

Dacă $c_{n-1}^{(i)} > c_1^{(j)}$ șirul de n termeni

$$c_{n-1}^{(i)}, c_1^{(j)}, c_1^{(i)}, \dots, c_{n-1}^{(j)}$$

e monoton și e un șir extras din (1).

b) *Toate șirurile (5) sunt monotone de același sens.* Putem presupune că toate sunt nedescrescătoare. Dacă acum există un i astfel ca $c_{n-1}^{(i)} < c_{n-1}^{(i+1)}$ atunci șirul de n termeni

$$c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \dots, c_{n-1}^{(i)}, c_{n-1}^{(i+1)}$$

e monoton și extras din (1). În cazul contrar trebuie să avem $c_{n-1}^{(i)} > c_{n-1}^{(i+1)}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ și șirul de n termeni

$$c_{n-1}^{(1)}, c_{n-1}^{(2)}, \dots, c_{n-1}^{(n)}$$

este monoton și extras din (1).

Teorema 4 e complet demonstrată.

4. Rezultă din cele ce preced că există un număr N_n astfel ca orice șir având cel puțin N_n termeni conține cel puțin un șir parțial monoton de n termeni, dar există cel puțin un șir (1) cu $N_n - 1$ termeni care nu conține nici un șir parțial monoton de n termeni.

Teorema 4 ne arată că $N \leq \frac{5}{6} n!$ Pe de altă parte șirul $n-1, n-2, \dots, 2, 1, 2n-2, 2n-3, \dots, n, 3n-3, 3n-4, \dots, 2n-1, \dots, (n-1)^2, (n-1)^2-1, \dots, (n-2)n-(n-3)$ de $(n-1)^2$ termeni nu conține nici un șir parțial monoton de n termeni. Rezultă că $N_n > (n-1)^2$.

Numărul N_n este egal cu 5 pentru $n=3$. Ar fi interesant de determinat valoarea lui pentru n oarecare. E foarte probabil că $N_n = (n-1)^2 + 1$, acest lucru rămâne însă de demonstrat.

Se mai poate pune problema determinării numărului minim de șiruri parțiale monotone de n termeni cari se pot extrage dintr'un șir având un număr dat $m \geq N_n$ de termeni. E ușor de văzut că acest număr este cel puțin egal cu

$$\left[\frac{m - N_n}{n} \right] + 1$$

unde $[x]$ înseamnă ca de obicei, partea întreagă a lui x . E probabil că numărul despre care vorbim este egal cu minimumul lui

$$\binom{\lambda_1}{n} + \bin$$