ANNALES SCIENTIFIQUES

DE

L'UNIVERSITÉ DE JASSY

PREMIÈRE PARTIE

(Mathématiques, Physique, Chimie)

TOME XXVIII, ANNÉE 1942

FASCICULE 1.

IAȘI — INST. GRAFIC „PRESA BUNĂ" — 1942

TABLE DES MATIÈRES

SUR L'APPROXIMATION DES FONCTIONS CONTINUES D'UNE VARIABLE RÉELLE PAR DES POLYNOMES

par

TIBERIU POPOVICIU

Dans un travail précédent [1]) nous avons montré que les polynomes de M. S. Bernstein

$$P_n(x;f)=\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}$$

donnent, pour la fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle fermé $[0,1]$, une approximation de l'ordre de $\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ si $\omega(\delta)$ est le module d'oscillation de $f(x)$. Voici une démonstration plus simple de ce résultat.

Si nous remarquons que $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}=1$, les propriétés connues de $\omega(\delta)$ nous donnent

$$|f(x)-P_n(x;f)|\leq\left(\frac{1}{\delta}\sum_{i=0}^{n}\left|x-\frac{i}{n}\right|\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}+1\right)\omega(\delta),\quad x\in[0,1].$$

Mais nous avons, en appliquant une inégalité bien connue,

$$\sum_{i=0}^{n}\left|x-\frac{i}{n}\right|\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\leq\sqrt{\sum_{i=0}^{n}\left(x-\frac{i}{n}\right)^2\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\leq\frac{1}{2\sqrt{n}},\quad x\in[0,1].$$

En prenant donc $\delta=\frac{1}{\sqrt{n}}$, nous avons

$$|f(x)-P_n(x;f)|\leq\frac{3}{2}\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ce qui démontre la propriété.

---

1) Tiberiu Popoviciu. „*Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*" Mathematica, 10, 49-54, (1934).