PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BUCAREST
SOCIETATEA ROMÂNĂ DE ŞTIINŢE, SECŢIA MATEMATICĂ

BULLETIN MATHÉMATIQUE

DE LA SOCIÉTÉ ROUMAINE DES SCIENCES

TOME 43 (1—2)

1941

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA CENTRALĂ
BUCUREŞTI
1942

C. 47 492

NOTES SUR LES FONCTIONS CONVEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR (IX)

PAR

TIBERIU POPOVICIU

Inégalités linéaires et bilinéaires entre les fonctions convexes. Quelques généralisations d'une inégalité de TCHEBYCHEFF

§ 1. — Sur les inégalités linéaires et bilinéaires entre les fonction convexes définies sur un nombre fini de points.

1. — Considérons m $(\geqq n+2)$ points ordonnés

(1) $$x_1 < x_2 < \dots < x_m$$

et une fonctionnelle linéaire

(2) $$A(f) = \sum_{i=1}^{m} \tau_i f(x_i)$$

définie pour les fonctions $f(x)$, finies et uniformes sur les points (1). Les constantes τ_i, qui caractérisent la fonctionnelle $A(f)$, sont indépendantes de la fonction f.

Nous avons étudié les inégalités linéaires de la forme

(3) $$A(f) \geqq 0,$$

vérifiées par toute fonction f, non-concave d'ordre n $(\geqq 0)$ sur les points (1)[1])

Nous allons reprendre ici ce problème.

Tout polynome de degré n est non-concave d'ordre n, l'inégalité (3) doit donc être vérifiée, en particulier, par les fonctions

$$x^i, \ -x^i, \ i = 0, 1, \dots, n.$$

On trouve ainsi les conditions nécessaires

(4) $$A(x^i) = 0, \ i = 0, 1, \dots, n.$$

[1]) Voir les notes III et IV de cette série dans *Mathematica*, **16**, 74—86 (1940) resp. *Disquisitiones Mathematicae et Physicae* **1**, 163—171 (1940).

Pour trouver d'autres conditions nécessaires, considérons les fonctions $f^*_{n+1,\,i}$, définies par

$$(5)\qquad f^*_{n+1,\,i}(x_r)=\begin{cases}0, & 1\leqq r\leqq i+n \quad (\text{ou } 1\leqq r\leqq i)\\ (x_r-x_{i+1})(x_r-x_{i+2})\dots(x_r-x_{i+n}), & n+i+1\leqq r\leqq m \quad (\text{ou } i+1\leqq r\leqq m)\end{cases}$$

$$i=1,2,\dots,m-n-1.$$

La fonction $f^*_{n+1,\,i}$ est donc nulle sur les $i+n$ premiers points (1) et est un polynome de degré n sur les $m-i$ derniers points (1). En particulier nous prenons

$$f^*_{1,\,i}(x_r)=\begin{cases}0, & r=1,2,\dots,i,\\ 1, & r=i+1,i+2,\dots,m.\end{cases}$$

Nous allons démontrer maintenant le

Lemme 1. Les fonctions $f^*_{n+1,\,i}(x)$ *sont non-concaves d'ordre* n *sur les points* (1).

Employons, comme d'habitude, les notations

$$(6)\qquad \Delta^i_j(f)=[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+j};f],\ (\Delta^i_0(f)=f(x_i)),$$
$$i=1,2,\dots,m-j,\quad j=0,1,\dots,m-1,$$

pour les différences divisées de la fonction f, prises sur des points consécutifs d'une suite ordonnée, telle que (1).

La démonstration du lemme 1 est alors immédiate. On a, avec la notation (6),

$$\Delta^j_{n+1}(f^*_{n+1,\,i})=0,\ \text{si } j+n+1\leqq n+i \text{ ou } j\geqq i+1,$$

$$(7)\qquad \Delta^i_{n+1}(f^*_{n+1,\,i})=\frac{f^*_{n+1,\,i}(x_{i+n+1})}{(x_{i+n+1}-x_i)(x_{i+n+1}-x_{i+1})\dots(x_{i+n+1}-x_{i+n})}=$$
$$=\frac{1}{x_{i+n+1}-x_i}>0\ ^{2)}.$$

---

2) Cette démonstration est basée sur la propriété suivante: *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit non-concave d'ordre* n *sur les points ordonnés* (1) *est que l'on ait*

$$\Delta^i_{n+1}(f)\geqq 0,\quad i=1,2,\dots,m-n-1.$$

Ceci est une conséquence de la formule de la moyenne des différences divisées Voir: TIBERIU POPOVICIU *„Introduction à la théorie des différences divisées"* Bull Math. Soc. Roumaine des Sc, **42**, 65—78 (1940).

Réciproquement, la formule de la moyenne s'obtient de la non-concavité d'ordre n des fonctions $f^*_{n+1,\,i}$. Il y a donc intérêt à démontrer directement cette non-concavité. Sans entrer dans des details, il suffit de dire ici que cette démonstration résulte de la formule de récurrence

$$[x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_{n+2}};f^*_{n+1,\,i}]=\frac{1}{x_{i_{n+2}}-x_{i_1}}\Big\{(x_{i_{n+2}}-x_{i+n})$$
$$[x_{i_2},x_{i_3},\dots,x_{i_{n+2}};f^*_{n,\,i}]+(x_{i+n}-x_{i_1})[x_{i_1},x_{i_2},\dots x_{i_{n+1}};f^*_{n,\,1}]\Big\},$$

où $$i_1<i_2<\dots<i_{n+2},\ i_1\leqq i\leqq i_{n+2}-n-1.$$

Pour l'inégalité (3) nous obtenons donc les conditions nécessaires

$$(8)\qquad A(f^*_{n+1,\,i})\geqq 0,\ i=1,2,\dots,m-n-1.$$

2. — Montrons maintenant que les conditions (4) et (8) sont aussi suffisantes. Cette propriété resultera du lemme suivant.

Lemme 2. — Toute fonction f (x), *non-concave d'ordre* n *sur les points* (1) *est de la forme*

$$(9)\qquad f(x)=P(x)+\sum_{i=1}^{m-n-1}c_i f^*_{n+1,\,i}(x),$$

où P (x) *est un polynome de degré* n *et les* c_i *sont des constantes non-négatives.*

La démonstration est simple. Faisant $x=x_1,x_2,\dots,x_m$ dans (9), nous trouvons un système de m équations linéaires en m inconnues, qui sont les c_i et les coefficients du polynome P (x). On voit facilement que le déterminant de ce système est $\neq 0$.

Nous avons

$$\Delta^i_{n+1}(f)=c_i\Delta^i_{n+1}(f^*_{n+1,\,i})$$

et la formule (7) nous montre que

$$(10)\qquad c_i=(x_{i+n+1}-x_i)\,\Delta^i_{n+1}(f)\geqq 0.$$

En remarquant que

$$f(x_i)=P(x_i),\ i=1,2,\dots,n+1$$

nous pouvons écrire

$$P(x)=P(x_1,x_2,\dots,x_{n+1};f\mid x),$$

avec la notation que nous utilisons pour le polynome de LAGRANGE de la fonction f, relatif aux points $x_1,x_2,\dots,x_{n+1}$.

Finalement donc la formule (9) peut s'écrire

$$(11)\qquad f(x)=P(x_1,x_2,\dots,x_{n+1};f\mid x)+$$
$$+\sum_{i=1}^{m-n-1}(x_{i+n+1}-x_i)\,\Delta^i_{n+1}(f)\,f^*_{n+1,\,i}(x).$$

La suffisance des conditions (4) et (8) est maintenant immédiate. Nous avons

$$(12)\qquad A(f)=\sum_{i=1}^{m-n-1}(x_{i+n+1}-x_i)\,\Delta^i_{n+1}(f)\,A(f^*_{n+1,\,i})\geqq 0,$$

d'où la propriété.

Si, de plus, les τ_i sont tous $\neq$ les conditions (4) et (8) sont nécessaires et suffisantes pour que l'inégalité plus précise

$$A(f) > 0 \tag{13}$$

soit vérifiée par toute fonction *convexe* d'ordre n sur les points (1). Mais si $n > 1$, par suite de la non prolongeabilité d'une fonction convexe d'ordre n, l'hypothèse précédente, que nous avons adopté dans la note III[3]) pour plus de simplicité, est un peu restrictive.

La formule (12) nous montre que si (4) et (8) sont satisfaites, ou bien $A(f)$ est identiquement nul ou bien (13) est vérifiée par toute fonction convexe d'ordre n. Pour que (13) soit vérifiée il suffit donc de plus qu'il le soit par une fonction convexe d'ordre n, par exemple par la fonction x^{n+1}.

Finalement nous pouvons énoncer le

Théorème 1. Pour que l'inégalité (3) *soit vérifiée par toute fonction non-concave d'ordre* n *sur les points* (1), *il faut et il suffit que les conditions* (4) *et* (8) *soient satisfaites.*

Pour que l'inégalité plus précise (13) *soit verifiée par toute fonction convexe d'ordre* n *sur les points* (1), *il faut et il suffit que les conditions* (4), (8) *et* $A(x^{n+1}) > 0$ *soient satisfaites.*

3. Considérons la fonctionnelle linéaire

$$B(f) = \sum_{i=1}^{m} p_i f(x_i).$$

Les nombres

$$s_k = B(x^k), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

sont les *moments* correspondants à cette fonctionnelle. Un polynome de degré k, $P(x)$, qui vérifie les égalités

$$B(P \cdot x^i) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

est un *polynome orthogonal* de degré k attaché à la fonctionnelle $B(f)$. Ce polynome est dit *normal* si de plus

$$B(P^2) = 1.$$

Considérons aussi les déterminants

$$\delta_k = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_k \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{2k} \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{15}$$

[3]) Voir loc. cit. [1]).

Si nous désignons par

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i)$$

le déterminant de Vandermonde des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, nous pouvons écrire

$$\delta_k = \sum p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_{k+1}} V^2(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{k+1}}),$$

la sommation s'étendant à toutes les combinaisons $j_1, j_2, \ldots, j_{k+1}$ des nombres $1, 2, \ldots, m$ pris $k+1$ à $k+1$[4]). En employant un intéressant artifice de Stieltjes[5]), nous pouvons écrire

$$\delta_k = \frac{1}{(k+1)!} B_{t_1} B_{t_2} \ldots B_{t_{k+1}} (V^2(t_1, t_2, \ldots, t_{k+1})),$$

B_{t_i} étant l'opération B par rapport à une fonction de la variable t_i.

Le polynome orthogonal et normal de degré k est complètement déterminé si $\delta_{k-1} \neq 0$, $\delta_k \neq 0$ et ce polynome est alors

$$P_k = \frac{1}{\sqrt{\delta_{k-1} \cdot \delta_k}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_k \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{k-1} & s_k & \ldots & s_{2k-1} \\ 1 & x & \ldots & x^k \end{vmatrix}, \quad \left(P_0 = \frac{1}{\sqrt{\delta_0}}\right). \tag{16}$$

Nous disons que la fonctionnelle $B(f)$ est *non-négative* si

$$B(f) \geq 0, \tag{17}$$

quelle que soit la fonction non-négative f. La fonctionnelle est dite *positive* si, de plus, l'égalité dans (17) n'est possible que si f est identiquement nul. Pour que $B(f)$ soit non-négative il faut et il suffit que les coefficients p_i soient non-négatifs et pour que $B(f)$ soit positive il faut et il suffit que les p_i soient positifs. Cette notion de positivité est, bien entendu, strictement relative aux points (1). Si $B(f)$ est une fonctionnelle non-négative, tous les déterminants (15) pour $k = 0, 1, \ldots, m-1$ sont non-négatifs et si $B(f)$ est une fonctionnelle positive tous ces déterminants sont positifs. Si $B(f)$ est non-négative,

[4]) Σ est une notation abrégée pour

$$\sum_{j_{k+1}=k+1}^{m} \sum_{j_k=k}^{j_{k+1}-1} \cdots \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1}$$

Nous employerons dans la suite de telles notations.

[5]) Voir *„Correspondance d'Hermite et de Stieltjes"* t. I, p. 109, lettre 52.

on a $\delta_k > 0$ si et seulement si au moins $k+1$ des coefficients p_i sont positifs et on a alors nécessairement $\delta_0 > 0, \delta_1 > 0, \ldots, \delta_{k-1} > 0$.

Désignons maintenant par $\mathrm{U}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f)$ le déterminant qu'on obtient de $\mathrm{V}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})$ lorsqu'on remplace les éléments x_i^{n+1} par $f(x_i)$ respectivement. On a alors

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] = \frac{\mathrm{U}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f)}{\mathrm{V}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})}.$$

Tenant compte de l'expression (16) des polynomes orthogonaux, on trouve, en supposant $\delta_n \neq 0$, $\delta_{n+1} \neq 0$,

$$\sqrt{\delta_n \, \delta_{n+1}} \, \mathrm{B}(\mathrm{P}_{n+1} \cdot f) = \tag{18}$$

$$= \Sigma p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_{n+2}} \; \mathrm{V}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+2}}) \, \mathrm{U}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+2}}; f) =$$

$$= \Sigma p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_{n+2}} \; \mathrm{V}^2(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+2}}) \, [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+2}}; f] =$$

$$= \frac{1}{(n+2)!} \mathrm{B}_{t_1} \mathrm{B}_{t_2} \ldots \mathrm{B}_{t_{n+2}} (\mathrm{V}(t_1, t_2, \ldots, t_{n+2}) \, \mathrm{U}(t_1, t_2, \ldots, t_{n+2}; f))$$

et on obtient le

Théorème 2. Si B(f) *est une fonctionnelle linéaire non-négative telle que* $\delta_{n+1} > 0$ *et si* P_{n+1} *est le polynome orthogonal* (et normal) *de degré* $n+1$ *correspondant à cette fonctionnelle, on a*

$$\mathrm{B}(\mathrm{P}_{n+1} \cdot f) \geqq 0, \quad \text{resp.} > 0, \tag{19}$$

pour toute fonction non-concave resp. convexe d'ordre n *sur les points (1).*

Plus exactement, l'égalité dans (19) n'est possible, dans le champs des fonctions non-concaves d'ordre n, *que si la fonction se réduit à un polynome de degré* n *sur les points (1) auxquels correspondent des coefficients* p_i *non nuls.*

Dans le cas particulier où $\mathrm{A}(f)$ est de la forme $\mathrm{B}(\mathrm{P}_{n+1}\, f)$ on a pu établir l'inégalité directement, à l'aide de (18), sans employer les conditions (4) et (8) trouvées plus haut.

Il est évident qu'on peut remplacer dans (19) le polynome P_{n+1}, par $c\,\mathrm{P}_{n+1}$, c étant une constante positive.

4. — Considérons maintenant une fonctionnelle bilinéaire

$$\mathrm{A}(f, g) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \tau_{i,j} f(x_i) \, g(x_j), \tag{20}$$

dans le champs des fonctions f, g définies sur les points (1). Cherchons les conditions pour que l'on ait

$$\mathrm{A}(f, g) \geqq 0, \tag{21}$$

pour tout couple de deux fonctions f, g non-concaves d'ordre n sur (1).

Il faut d'abord que cette inégalité soit vérifiée si f resp. g est un polynome de degré n et g resp. f une fonction non-concave d'ordre n. On trouve donc les conditions nécessaires

$$\mathrm{A}(x^i, f) = \mathrm{A}(f, x^i) = 0, \; i = 0, 1, \ldots, n, \tag{22}$$

où f est une fonction non-concave d'ordre n quelconque.

Remarquons que

Lemme 3. Si A (f) *est une fonctionnelle linéaire et si* A (f) = 0 *pour toute fonction non-concave d'ordre* n, *cette égalité est vérifiée identiquement par toute fonction* (c'est-à-dire que la fonctionnelle $\mathrm{A}(f)$ est nulle identiquement).

En effet, de $\mathrm{A}(-f) = -\mathrm{A}(f)$ il résulte que $\mathrm{A}(f)$ s'annule aussi pour toute fonction non-convexe d'ordre n. Mais, toute fonction $f(x)$ sur (1) est la différence de deux fonctions non-concave d'ordre n (ou la somme d'une fonction non-concave et d'une fonction non-convexe d'ordre n). D'où la propriété.

Nous pouvons donc dire que les égalités (22) sont vérifiées identiquement par rapport à la fonction f.

D'autres conditions nécessaires pour l'inégalité (21) sont

$$\mathrm{A}(f^*_{n+1,i}, f^*_{n+1,j}) \geqq 0, \; i, j = 1, 2, \ldots, m-n-1. \tag{23}$$

On voit facilement que les conditions précédentes sont aussi suffisantes.

En effet, compte tenant de la formule (11), on trouve, si f, g sont non-concaves d'ordre n.

$$\mathrm{A}(f, g) = \sum_{i=1}^{m=n-1} \sum_{j=1}^{m-n-1} (x_{i+n+1} - x_i)(x_{j+n+1} - x_j) \, \Delta^i_{n+1}(f) \, \Delta^j_{n+1}(g)$$
$$\mathrm{A}(f^*_{n+1,i}, f^*_{n+1,j}) \geqq 0.$$

Enfin, pour que l'inégalité plus précise

$$\mathrm{A}(f, g) > 0, \tag{24}$$

soit vérifiée par tout couple de deux fonctions convexes d'ordre n, il faut et il suffit de plus que

$$\mathrm{A}(x^{n+1}, x^{n+1}) > 0. \tag{25}$$

En effet, $\mathrm{A}(x^{n+1}, g)$ est une fonctionnelle linéaire de g et on a $\mathrm{A}(x^{n+1}, g) > 0$ pour toute fonction convexe d'ordre n, g, d'après le théorème 1 et, encore d'après le théorème 1, on a (24) si f est aussi convexe d'ordre n.

Finalement nous avons donc le

Théorème 3. *Pour que l'inégalité (21) soit vérifiée par tout couple de deux fonctions non-concaves d'ordre* n *sur les points (1), il faut et il suffit que les conditions (22)* (identiquement par rapport à la fonction f) *et (23) soient satisfaites.*

Pour que l'inégalité plus précise (24) soit vérifiée par tout couple de deux fonctions convexes d'ordre n *sur les points (1), il faut et il suffit que les conditions (22), (24) et (25) soient satisfaites.*

Il est clair, qu'en même temps qu'avec deux fonctions non-concaves d'ordre n quelconques, nos inégalités sont vérifiées aussi par deux fonctions non-convexes d'ordre n. L'inégalité contraire est toujours vraie si l'une des fonctions est non-concave et l'autre non-convexe (resp. convexe et concave) d'ordre n sur les points (1).

5. — Reprenons la fonctionnelle B (f) de Nr. **3.** Si cette fonctionnelle est non-négative on a évidemment

$$\Sigma p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_{n+2}} \mathrm{U}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+2}}; f)\, \mathrm{U}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+2}}; g) \geqq 0, \tag{26}$$

pour tout couple de deux fonctions non-concaves d'ordre n sur (1).

Cherchons à exprimer le premier membre de (24) à l'aide de la fonctionnelle B (f). Cette expression s'écrit aussi

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_n & \sum\limits_{i=1}^{m} p_i\, g(x_i) \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{n+1} & \sum\limits_{i=1}^{m} p_i\, x_i\, g(x_i) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n} & \sum\limits_{i=1}^{m} p_i\, x_i^n\, g(x_i) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} p_i\, f(x_i) & \sum\limits_{i=1}^{m} p_i\, x_i\, f(x_i) & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{m} p_i\, x_i^n f(x_i) & \sum\limits_{i=1}^{m} p_i\, f(x_i)\, g(x_i) \end{vmatrix} \tag{27}$$

qui est aussi égal à

$$\delta_n \sum_{i=1}^{m} p_i\, f(x_i)\, g(x_i) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} p_i\, p_j \begin{vmatrix} & & & & \vdots & 1 \\ & & \delta_n & & \vdots & x_j \\ & & & & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x_j^n \\ 1 & x_i & \ldots & x_i^n & & 0 \end{vmatrix} f(x_i) g(x_j).$$

Si nous reprenons les polynomes orthogonaux (16), un calcul facile, sur lequel il est inutile d'insister, nous montre que le déterminant qui intervient dans la deuxième sommation est égal à

$$-\delta_n \sum_{r=0}^{n} \mathrm{P}_r(x_i)\, \mathrm{P}_r(x_j).$$

L'expression (27) devient donc

$$\delta_n \left[\sum_{i=1}^{m} p_i f(x_i) g(x_i) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} p_i p_j \left(\sum_{r=0}^{n} \mathrm{P}_r(x_i)\, \mathrm{P}_r(x_j) \right) f(x_i)\, g(x_j) \right] =$$

$$= \delta_n \left[\sum_{i=1}^{m} p_i\, f(x_i) g(x_i) - \sum_{r=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i\, \mathrm{P}_r(x_i) f(x_i) \right) \left(\sum_{i=1}^{m} p_i\, \mathrm{P}_r(x_i)\, g(x_i) \right) \right]$$

et on peut énoncer le

Théorème 4. *Si* B(f) *est une fonctionnelle linéaire non-négative, telle que* $\delta_{n+1} > 0$, *et si l'on construit les polynomes orthogonaux* (et normaux) *(16) correspondants à cette fonctionnelle, on a*

$$\mathrm{B}(fg) \geqq \sum_{r=0}^{n} \mathrm{B}(\mathrm{P}_r \cdot f)\, \mathrm{B}(\mathrm{P}_r \cdot g) \tag{28}$$

pour tout couple de deux fonctions non-concaves d'ordre n *sur les points (1). Si les fonctions sont convexes d'ordre* n *sur les points (1) le signe* $>$ *est toujours valable dans (28).*

D'ailleurs, si l'une des fonctions est convexe d'ordre n l'égalité n'est possible dans (28) que si l'autre fonction se réduit à un polynome de degré n sur les points x_i auxquels correspondent des coefficients p_i non nuls, cette fonction étant supposée, bien entendu, non-concave d'ordre n.

Pour $n = 0$ nous trouvons l'inégalité classique de TCHEBYCHEFF, en termes finis et qui peut s'écrire

$$\frac{\Sigma\, p_i\, u_i\, v_i}{\Sigma\, p_i} \geqq \left(\frac{\Sigma\, p_i u_i}{\Sigma\, p_i} \right) \left(\frac{\Sigma\, p_i\, v_i}{\Sigma\, p_i} \right)$$

les suites finies $u_1, u_2, \ldots ;\ v_1, v_2, \ldots$, étant monotones de même sens et $p_i \geqq 0$, $\Sigma\, p_i > 0$.

6. — D'une inégalité bilinéaire on déduit facilement des inégalités linéaires, en particularisant l'une des fonctions. Par exemple, en prenant $g = x^{n+1}$ dant (26) nous retrouvons l'inégalité du Nr. **3.** Le théorème [illegible] résulte donc du théorème **4.** [illegible]it la

Remarquons aussi que l'inégalité (26) est vraie quelle que [illegible] fonction f identique à la fonction g. On en déduit le

Théorème 5. Si B (f) *est une fonctionnelle linéaire non-négative, telle que* $\delta_{n+1} > 0$, *toute fonction* f *sur les points (1) vérifie l'inégalité*

$$\text{(29)} \qquad B(f^2) \geq \sum_{r=0}^{n} (B(P_r \cdot f))^2.$$

L'égalité dans (29) n'est possible que si f *se réduit à un polynome de degré* n *sur les points (1) auxquels correspondent des coefficients* p_i *positifs.*

D'ailleurs, l'inégalité n'est autre que l'inégalité de Bessel correspondante au développement de la fonction f suivant les polynomes orthogonaux et normaux (16).

§ 2. — Sur quelques propriétés préliminaires des fonctions convexes d'ordre supérieur

7. — Nous allons maintenant considérer, sauf avis contraire, uniquement des fonctions finies, uniformes et définies dans un intervalle fini et fermé $[a, b]$.

Une fonction non-concave d'ordre $n \geq 0$ dans $[a, b]$ est toujours bornée dans $[a, b]$ et si $n > 0$ elle est toujours continue dans l'intervalle ouvert (a, b). Pour toute fonction non-concave d'ordre n les limites $f(a+0)$, $f(b-0)$ existent et on a

$$f(b) \geq f(b-0), \quad (-1)^{n+1}[f(a) - f(a+0)] \geq 0.$$

La fonction $f^*(x)$ définie par

$$\text{(30)} \qquad f^*(x) = \begin{cases} f(a+0), & x = a, \\ f(x), & x \in (a, b), \\ f(b-0), & x = b, \end{cases}$$

est non-concave resp. convexe d'ordre n en même temps que f.

On voit que toute fonction qui est à la fois non-concave de deux ordres de parités différentes est continue même au point a.

Nous allons considérer des fonctions qui sont à la fois non-concaves d'ordres $0, 1, \ldots, n$. Nous dirons qu'une telle fonction est $(n+1)$—*fois monotone*. Une fonction qui est non-concave de tout ordre $n \geq 0$ est dite *complètement monotone*. Une fonction $(n+1)$-fois monotone, pour $n > 0$, est continue dans l'intervalle $[a, b)$ fermé à gauche et ouvert à droite. Nous allons montrer qu'on peut préciser d'avantage l'allure d'une telle fonction au voisinage de a.

Lemme 4. Toute fonction (n + 1) *-fois monotone,* n > 0, *dans l'intervalle* [a, b] *a des dérivées non-négatives d'ordre 1, 2, ...,* n *au point* a.

Par cet énoncé nous voulons dire que pour chaque $k = 1, 2, \ldots, n$, la limite

$$\lim_{x_1, x_2, \ldots, x_k \to a} [a, x_1, x_2, \ldots, x_k; f] = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \geq 0$$

existe [6]).

La démonstration se fait de la manière suivante: Soit d'abord une suite infinie décroissante

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_m, \quad \ldots$$

et ayant pour limite le point a. La suite des nombres non-négatifs

$$\text{(31)} \qquad [a, \xi_m, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_{m+k-1}; f], \quad m = 1, 2, \ldots$$

est non-croissante puisque

$$[a, \xi_m, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_{m+k-1}; f] - [a, \xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \ldots, \xi_{m+k}; f] = (\xi_m - \xi_{m+k})[a, \xi_m, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_{m+k}; f] \geq 0.$$

Donc

$$\lim_{m \to \infty} [a, \xi_m, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_{m+k-1}; f]$$

existe et est non-négatif.

Soit maintenant m un nombre naturel et $x_1, x_2, \ldots, x_k$, k points distincts, différents de a et tous compris dans l'intervalle (a, ξ_{m+k-1}). Une formule connue de la théorie des différences divisées nous donne

$$[a, \xi_m, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_{m+k-1}; f] - [a, x_1, x_2, \ldots, x_k; f] = \\ = \sum_{i=1}^{k} (\xi_{m+i-1} - x_i)[a, \xi_m, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_{m+i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k; f] \geq 0.$$

Mais, nous pouvons trouver un nombre naturel m' tel que $\xi_{m'}$ soit à gauche de tous les points $x_1, x_2, \ldots, x_k$. La même formule nous montre alors que

$$[a, x_1, x_2, \ldots, x_k; f] - [a, \xi_{m'}, \xi_{m'+1}, \ldots, \xi_{m'+k-1}; f] \geq 0.$$

Toute différence divisée $[a, x_1, x_2, \ldots, x_k; f]$, pourvu que les points x_i soient suffisamment près de a, est donc comprise entre deux différences divisées de la forme (31). Le lemme en résulte.

8\. — Examinons maintenant les fonctions qui correspondent, dans le cas d'un intervalle, aux fonctions $f^*_{n+1,\,i}$ qui interviennent dans le cas d'un ensemble fini (1).

---

[6]) Sans entrer dans des détails, il suffit de dire ici qu'alors la dérivée d'ordre k au sens ordinaire existe et est égale à $f^{(k)}(a)$.

Considérons les fonctions $\varphi_{n+1,\lambda}(x)$ définie par la formule

$$(32)\quad \varphi_{n+1,\lambda}(x)=\left(\frac{|x-\lambda|+x-\lambda}{2}\right)^n=\left(\frac{|x-\lambda|+x-\lambda}{2}\right)(x-\lambda)^{n-1},\ a\leq\lambda\leq b,$$

en supposant $n>0$. Cette fonction est donc nulle dans l'intervalle $[a,\lambda]$ et se réduit au polynome $(x-\lambda)^n$ dans l'intervalle $[\lambda, b]$. Nous complétons la définition pour $n=0$ par la suivante

$$\varphi_{1,\lambda}(x)=\begin{cases}0, & x\in[a,\lambda),\\ 1, & x\in[\lambda,b].\end{cases}$$

Nous avons la relation de récurrence

$$(33)\qquad \varphi_{n+1,\lambda}(x)=(x-\lambda)\,\varphi_{n,\lambda}(x).$$

Lemme 5. *La fonction* $\varphi_{n+1,\lambda}$ *est non-négative et* (n + 1)*-fois monotone dans l'intervalle* [a, b].

Le signe de $\varphi_{n+1,\lambda}$ est évident. Pour démontrer la monotonie il faut montrer que

$$(34)\qquad [x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}; \varphi_{n+1,\lambda}]\geq 0,$$

quels que soient $x_1<x_2<\ldots<x_{k+1}$ et $k=1,2,\ldots,n+1$.

Nous allons procéder par induction. Supposons la propriété vraie jusqu'à n et démontrons-la pour n.

Si $x_{k+1}<\lambda$, la différence divisée (34) est nulle.

Si $x_1>\lambda$ et $k=n+1$, la différence divisée (34) est encore nulle.

Si $x_1>\lambda$ et $k\leq n$ nous employons la formule

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}; (x-\lambda)^n]=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}[x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}; (x-\lambda)^{n-k+i-1}](x_{i+1}-\lambda)+(x_1-\lambda)^{n-k}$$

qu'on déduit facilement de la formule de Leibniz donnant la différence divisée du produit de deux fonctions [7]).

Si $x_1\leq\lambda\leq x_{k+1}$ nous employons la formule de récurrence

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}; \varphi_{n+1,\lambda}]=$$

$$=\frac{(x_{k+1}-\lambda)[x_2, x_3, \ldots, x_{k+1}; \varphi_{n,\lambda}]+(\lambda-x_1)[x_1, x_2, \ldots, x_k; \varphi_{n,\lambda}]}{x_{k+1}-x_1}$$

qu'on déduit de la même formule de Leibniz appliquée à (33).

[7]) loc. cit. [2])

9. — Une combinaisons linéaire de polynomes de degré n et d'un nombre fini de fonctions de la forme $\varphi_{n+1,\lambda}$ est dite une *fonction élémentaire d'ordre* n. Pour le moment nous supposons $n>0$. Une fonction élémentaire est donc de la forme

$$(35)\qquad P(x)+\sum_{i=1}^{m}c_i\,\varphi_{n+1,\lambda_i}(x)$$

où $a<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_m<b$.

Les polynomes de degré n et les fonctions $\varphi_{n+1,\lambda}$ sont des fonctions élémentaires d'ordre n particulères. Remarquons que toute fonction élémentaire d'ordre n (>0) est continue dans $[a,b]$.

Lemme 6. *Pour que la fonction élémentaire d'ordre* n *(35) soit non-concave d'ordre* n *dans* [a, b] *il faut et il suffit que les constantes* c_i *soient non-négatives.*

Les conditions sont évidemment suffisantes. Montrons qu'elles sont aussi nécessaires. Si nous désignons la fonction (35) par $\psi(x)$ et si nous prenons les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ tels que

$$\lambda_{i-1}<x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}<\lambda_i<x_{n+2}<\lambda_{i+1}\quad(\lambda_0=a,\ \lambda_{m+1}=b),$$

nous avons

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; \psi]=\frac{c_i(x_{n+2}-\lambda_i)^n}{(x_{n+2}-x_1)(x_{n+2}-x_2)\ldots(x_{n+2}-x_{n+1})}\geq 0.$$

On voit facilement que pour qu'un polynome de degré n soit non-négatif et $(n+1)$-fois monotone dans $[a,b]$ il faut et il suffit que si on ordonne ce polynome suivant les puissances de $x-a$, tous ses coefficients soient ≥ 0. Nous en déduisons le

Lemme 7. *Pour que la fonction élémentaire d'ordre* n *(33) soit non-négative et* (n + 1) *- fois monotone dans l'intervalle* [a, b] *il faut et il suffit que les constantes* c_i *soient* ≥ 0 *et que les coefficients* γ_i *du polynome*

$$P(x)=\gamma_0+\gamma_1(x-a)+\ldots+\gamma_n(x-a)^n$$

soient aussi non-négatifs.

Dans le cas des fonctions définies sur un nombre fini de points nous avons déjà remarqué que toute fonction non-concave d'ordre n est de la forme (9) avec des coefficients c_i non-négatifs. Le polynome $P(x)$ de cette formule peut aussi s'écrire

$$P(x)=P(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f\,|\,x)=$$

$$=f(x_1)+\sum_{i=1}^{n}[x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}; f](x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_i).$$

Il en résulte que toute fonction non-négative et $(n+1)$ - fois monotone sur les points (1) est de la forme

$$\gamma_0+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_i)+\sum_{i=1}^{m-n-1}c_i f^{*}_{n+1,i}(x),$$

où les γ_i et les c_i sont non-négatifs.

10. — Nous allons maintenant démontrer la propriété suivante.

Théorème 6. *Toute fonction continue et non-concave d'ordre* n *dans l'intervalle* [a, b] *est la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions élémentaires d'ordre* n, *non-concaves d'ordre* n *dans* [a, b].

C'est une propriété que nous avons souvent utilisé. Nous en allons donner maintenant une démonstration directe, sans passer par les dérivées de la fonction considérée.

Soit $f(x)$ la fonction et divisons l'intervalle $[a, b]$ en m parties égales par les points

$$\lambda_i=a+ih,\ i=0,1,\dots,m,\ h=\frac{b-a}{m}. \tag{36}$$

Supposons, pour fixer les idées, m assez grad, en espèce $m>2n$. Considérons alors la fonction élémentaire d'ordre n

$$f_m(x)=\sum_{i=1}^{m-n}(\lambda_{i+n}-\lambda_{i-1})\,\Delta^{i-1}_{n+1}(f)\,\varphi_{n+1,\lambda_{i+n-1}}(x), \tag{37}$$

la notation (6) étant relative à la suite (36). Nous avons $\lambda_{i+n}-\lambda_{i-1}=(n+1)h$ et

$$\Delta^{i-1}_{n+1}(f)=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!\,h^{n+1}}\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\binom{n+1}{j}f(\lambda_{i+j-1}). \tag{38}$$

Nous pouvons alors écrire :

Pour $x\in[\lambda_0,\lambda_n]$,

$$f_m(x)=0.$$

Pour $x\in[\lambda_{j+n},\lambda_{j+n+1}]$, $0\leqq j\leqq n-1$,

$$f_m(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{n!\,h^n}\left\{\sum_{r=0}^{j}(-1)^r f(\lambda_r)\left[\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{n+1}{r-s}(x-\lambda_{n+s})^n\right]+\right.$$

$$+\sum_{r=j+1}^{n}(-1)^r f(\lambda_r)\left[\sum_{s=0}^{j}(-1)^s\binom{n+1}{r-s}(x-\lambda_{n+s})^n\right]+$$

$$\left.+\sum_{r=n+1}^{n+j+1}(-1)^r f(\lambda_r)\left[\sum_{s=r-n-1}^{j}(-1)^s\binom{n+1}{r-s}(x-\lambda_{n+s})^n\right]\right\}.$$

Pour $x\in[\lambda_{j+n},\lambda_{j+n+1}]$, $n\leqq j\leqq m-n-1$, [8])

$$f_m(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{n!\,h^n}\left\{\sum_{r=0}^{n}(-1)^r f(\lambda_r)\left[\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{n+1}{r-s}(x-\lambda_{n+s})^n\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{r=j+1}^{n+j+1}(-1)^r f(\lambda_r)\left[\sum_{s=r-n-1}^{j}(-1)^s\binom{n+1}{r-s}(x-\lambda_{n+s})^n\right]\right\}.$$

Considérons le polynome [9])

$$Q_m(x)=\frac{(-1)^n}{n!\,h^n}\left\{\sum_{r=0}^{n}(-1)^r f(\lambda_r)\left[\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{n+1}{r-s}(x-\lambda_{n+s})^n\right]\right\}.$$

Nous allons démontrer que la fonction

$$\psi_m(x)=f_m(x)+Q_m(x), \tag{39}$$

qui est bien de la forme (35), converge uniformément vers la fonction f dans $[a, b]$ [10]).

Remarquons que

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\left[\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{n+1}{r-s}(x-\lambda_{n+s})^n\right]=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}(x-\lambda_{2n-s})^n=$$

$$=(-1)^n h^n\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}(n-s)^n=(-1)^n h^n\, n!\,.$$

Il en résulte que la fonction $\psi_m(x)$ se réduit identiquement à 1 lorsque $f(x)=1$. La différence $f(x)-\psi_m(x)$ s'obtient donc de $\psi_m(x)$ en remplaçant partout $f(\lambda_r)$ par $f(x)-f(\lambda_r)$. Enfin désignons par $\omega(\delta)$ le module d'oscillation de f.

---

[8]) Le coefficient de $f(\lambda_r)$ pour $n+1\leq r\leq j$ $(j>n)$ est

$$\frac{1}{n!\,h^n}\sum_{s=0}^{n+1}(-1)^s\binom{n+1}{s}(x-\lambda_{r+s-1})^n$$

et est donc nul identiquement, d'après une propriété connue des différences d'ordre $n+1$.

[9]) Dans le cas $n=1$, $Q_m(x)$ n'est autre que le polynome de LAGRANGE $P(\lambda_0,\lambda_1;f\,|\,x)$.

[10]) Lorsque $n=1$, $y=\psi_m(x)$ représent la ligne polyonale inscrite dans la courbe $y=f(x)$ suivant les abscisses x_i .

Nous avons alors :

Pour $x \in [\lambda_0, \lambda_n]$,

$$| f(x) - \psi_m(x) | = | f(x) - Q_m(x) | \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n!\, h^n} \sum_{r=0}^{n} \left[| f(x) - f(\lambda_r) | \sum_{s=0}^{r} \binom{n+1}{r-s} (\lambda_{n+s} - x)^n \right]$$

et on a

$$| f(x) - f(\lambda_r) | \leqq \omega(| x - \lambda_r |) \leqq \omega(nh),$$

$$0 \leqq \lambda_{n+s} - x \leqq (n+s)\, h, \quad s = 1, 2, \ldots, n,$$

donc

$$| f(x) - \psi_m(x) | \leqq \frac{M'_n}{n!} \omega(nh), \quad x \in [\lambda_0, \lambda_1],$$

où

$$M'_n = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{r} \binom{n+1}{r-s} (n+s)^n$$

est indépendant de m.

Pour $x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}]$, $0 \leqq j \leqq n-1$,

$$| f(x) - \psi_m(x) | \leqq \frac{1}{n!\, h^n} \left\{ \sum_{r=j+1}^{n} \left[| f(x) - f(\lambda_r) | \sum_{s=j+1}^{r} \binom{n+1}{r-s} (\lambda_{n+s} - x)^n \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=n+1}^{n+j+1} \left[| f(x) - f(\lambda_r) | \sum_{s=r-n-1}^{j} \binom{n+1}{r-s} (x - \lambda_{n+s})^n \right] \right\}$$

et on obtient de la même manière

$$| f(x) - \psi_m(x) | \leqq \frac{M''_n}{n!} \omega(nh), \quad x \in [\lambda_n, \lambda_{2n}],$$

où

$$M''_n = \max_{j=0,1,\ldots,n-1} \left[\sum_{r=j+1}^{n} \sum_{s=j+1}^{r} \binom{n+1}{r-s} (n+s-j-1)^n + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=n+1}^{n+j+1} \sum_{s=r-n-1}^{j} \binom{n+1}{r-s} (j+1-s)^n \right]$$

est indépendant de m.

Pour $x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}]$, $n \leqq j \leqq m-n-1$,

$$| f(x) - \psi_m(x) | \leqq$$

$$\frac{1}{n!\, h^n} \left\{ \sum_{r=j+1}^{n+j+1} \left[| f(x) - f(\lambda_r) | \sum_{s=r-n-1}^{j} \binom{n+1}{r-s} (x - \lambda_{n+s})^n \right] \right\},$$

d'où il résulte, comme plus haut,

$$| f(x) - \psi_m(x) | \leqq \frac{M'''_n}{n!} \omega(nh), \quad x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}], \; n \leqq j \leqq m-n-1$$

où

$$M'''_n = \sum_{r=j+1}^{n+j+1} \sum_{s=r-n-1}^{j} \binom{n+1}{r-s} (j+1-s)^n = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-r} \binom{n+1}{r+s+1} (s+1)^n$$

est indépendant de m et de j.

Finalement donc

$$| f(x) - \psi_m(x) | \leqq \frac{M_n}{n!} \omega(nh), \quad x \in [a, b],$$

où $M_n = \max(M'_n, M''_n, M'''_n)$ est un nombre indépendant de m, ce qui démontre la propriété.

11. — Le théorème **6** reste vrai pour $n = 0$. Dans ce cas, on peut écrire

$$f_m(x) = \sum_{i=1}^{m} [f(\lambda_i) - f(\lambda_{i-1})]\, \varphi_{1, \lambda_{i-1}}(x),$$

$$Q_m(x) = f(a).$$

Supposons que $a = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{m-1} < \lambda_m = b$ sont des points quelconques, non pas équidistants en général et posons

$$\delta = \max_{i=1,2,\ldots,m} (\lambda_i - \lambda_{i-1}).$$

Nous avons alors

$$f_m(x) = \begin{cases} f(\lambda_{j+1}) - f(a), & x \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}),\; j = 0, 1, \ldots, m-2 \\ f(b) - f(a), & x \in [\lambda_{m-1}, b], \end{cases}$$

et on voit que

$$| f(x) - \psi_m(x) | \leqq \omega(\delta), \quad x \in [a, b].$$

Il suffit donc de prendre des points λ_i tels que $\delta \to 0$ pour déduire le théorème **6**.

Voyons maintenant ce qui se passe pour les fonctions non-décroissantes quelconques. Pour cela nous allons généraliser, un peu les fonctions élémentaires d'ordre 0.

Considérons les fonctions $\varphi_{1,\lambda}(x;\rho)$ définies par

$$\varphi_{1,\lambda}(x;\rho)=\begin{cases}0, & x\in[a,\lambda)\\ \rho, & x=\lambda\\ 1, & x\in(\lambda,b]\end{cases}\tag{40}$$

où $0\leq\rho\leq 1$, et, en particulier,

$$\varphi_{1,a}(x;\rho)=\begin{cases}\rho, & x=a\\ 1, & x\in(a,b],\end{cases}\qquad \varphi_{1,b}(x;\rho)=\begin{cases}0, & x\in[a,b),\\ \rho, & x=b.\end{cases}$$

La fonction $\varphi_{1,\lambda}(x;1)$ coïncide donc avec $\varphi_{1,\lambda}(x)$.

Nous dirons encore que ces fonctions et, plus généralement, toute combinaison linéaire de la forme

$$\psi(x)=c_0+\sum_{i=1}^{m}c_i\,\varphi_{1,\lambda_i}(x;\rho_i)\tag{41}$$

$$a\leq\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_{m-1}<\lambda_m\leq b,$$

est une fonction élémentaire d'ordre 0. Dans $\psi(x)$ on peut, d'ailleurs, toujours supposer que si $\lambda_1=a$ on a $\rho_1=0$ et si $\lambda_m=b$ on a $\rho_m=1$.

Pour qu'une fonction élémentaire (41) soit non-décroissante il faut et il suffit que $c_i\geq 0$, $i=1,2,\ldots,m$.

Nous pouvons alors démontrer le

Théorème 7. *Toute fonction non-décroissante dans l'intervalle* [a, b] *est la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions élémentaires d'ordre* 0, *non-décroissantes dans l'intervalle* [a, b].

Soit $f(x)$ une fonction non-décroissantes dans $[a,b]$. On peut toujours écrire

$$f(x)=f^*(x)+\chi(x),\tag{42}$$

où f^* est continue et non-décroissante dans $[a,b]$ et $\chi(x)$ est la fonction des sauts de f. Si ξ_i sont les points de discontinuité de la fonction f, on a

$$\chi(x)=\Sigma[f(\xi_i+0)-f(\xi_i-0)]\varphi_{1,\xi_i}(x;\rho_i),\ \rho_i=\frac{f(\xi_i)-f(\xi_i-0)}{f(\xi_i+0)-f(\xi_i-0)},$$

où la sommation s'étend à toutes les discontinuités ξ_i. On convient de poser $\chi(a-0)=\chi(a)$, $\chi(b+0)=\chi(b)$. Remarquons que

$$f(\xi_i+0)-f(\xi_i-0)>0.$$

$\chi(x)$ est non-décroissante et est, ou bien une fonction élémentaire d'ordre 0, ou bien est la somme d'une série absolument et uniformément convergente de fonctions élémentaires d'ordre 0. Le théorème **7** en résulte.

Pour les fonctions f qui sont continues à droite le théorème **7** coïncide avec le théorème **6**. Dans ce cas, en effet, $\chi(x)$ est continue à droite et n'introduit que des fonctions élémentaires de la forme $\varphi_{1,\lambda}(x)$.

La décomposition (42) peut aussi s'écrire pour une fonction non-concave d'ordre $n>0$. Dans ce cas, en modifiant légèrement la formule (42), on peut prendre pour $f^*(x)$ la fonction (30) et pour $\chi(x)$ la fonction

$$\chi(x)=[f(a)-f(a+0)]\,[1-\varphi_{1,a}(x;0)]+[f(b)-f(b-0)]\,\varphi_{1,b}(x).$$

Nous pouvons en conclure que $f(x)$ est encore la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions élémentaires d'ordre n, non-concaves d'ordre n et corrigées par la fonction $\chi(x)$.

Lorsque la fonction f est continue en a, la fonction $\chi(x)$ se réduit à

$$\chi(x)=[f(b)-f(b-0)]\,\varphi_{1,b}(x).\tag{43}$$

12. — Supposons $n>0$ et reprenons le polynome $Q_m(x)$, donné au No. 10. En remarquant que

$$\sum_{s=r-n-1}^{r}(-1)^s\binom{n+1}{r-s}(x-\lambda_{n+s})^n=0,\ (\lambda_{-1}=a-h)$$

nous pouvons écrire

$$Q_m(x)=\frac{1}{n!\,h^n}\left\{\sum_{r=0}^{n}f(\lambda_r)\left[\sum_{s=0}^{n-r}(-1)^s\binom{n+1}{s}(x-\lambda_{r+s-1})^n\right]\right\}.$$

Compte tenant de la formule de transformation

$$\sum_{r=0}^{n}c_r f(\lambda_r)=\sum_{r=0}^{n}\left[\sum_{s=r}^{n}\binom{s}{r}c_s\right]\left[\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}f(\lambda_s)\right]$$

et de la formule (38), nous trouvons

$$Q_m(x)=\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n}\left\{r!\,[\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_r;f]\,\frac{1}{h^{n-r}}\sum_{s=0}^{n-r}(-1)^s\binom{n-r}{s}(x-\lambda_{r+s-1})^n\right\}.$$

Supposons maintenant que la fonction f soit $(n+1)$-fois monotone dans $[a, b]$. D'après le lemme 4, nous avons

$$\lim_{h \to 0} r!\,[\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r; f] = f^{(r)}(a) \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

D'autre part

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{n-r}} \sum_{s=0}^{n-r} (-1)^s \binom{n-r}{s} (x - \lambda_{r+s-1})^n =$$

$$= \frac{(-1)^{n-r}\, n!}{r!\,(n-r)!} \lim_{h \to 0} \sum_{s=0}^{n-r} (-1)^s \binom{n-r}{s} (r+s-1)^{n-r} (x - \lambda_{r+s-1})^r = \frac{n!}{r!}(x-a)^r$$

puisque

$$(-1)^{n-r} \sum_{s=0}^{n-r} (-1)^s \binom{n+r}{s} (r+s-1)^{n-r} = (n-r)!$$

et, évidemment, cette limite est atteinte uniformément dans $[a, b]$. Il en résulte que

$$\lim_{h \to 0} Q_m(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{f^{(r)}(a)}{r!} (x-a)^r,$$

uniformément dans $[a, b]$.

Nous en déduisons le

Théorème 8. *Toute fonction continue, non-négative et* $(n+1)$-*fois monotone dans l'intervalle* $[a, b]$ *est la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions élémentaires d'ordre* n, *de la forme (35), où les* c_i *sont* ≥ 0 *et le polynome* $P(x)$, *ordonné suivant les puissances de* $x - a$ *a tous ses coefficients* ≥ 0.

Il suffit de prendre les fonctions

$$\varphi_m(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{f^{(r)}(a)}{r!} (x-a)^r + f_m(x).$$

Si nous considérons des fonctions $(n+1)$-fois monotones quelconques (non pas nécessairement continues en b) il suffit de corriger les fonctions $\chi(x)$ correspondantes à la fonction $f^*(x)$ par la fonction (43).

13. Supposons maintenant que $f(x)$ soit complètement monotone dans $[a, b]$. Nous avons alors le théorème suivant

Théorème 9. *Toute fonction non-négative et complètement monotone dans l'intervalle* $[a, b]$ *est la limite d'une suite uniformément*

convergente de polynomes non-négatifs et complètement monotones dans l'intervalle $[a, b]$.

Toute fonction continue non-négative et complètement monotone est donc limite uniforme de polynomes qui ordonnés suivant les puissances de $x - a$ ont tous leurs coefficients non-négatifs.

On obtient facilement cette propriété en considérant les polynomes de M. S. Bernstein.

$$\frac{1}{(b-a)^m} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} f\left(a + i\,\frac{b-a}{m}\right) (x-a)^i (b-x)^{m-i} \tag{44}$$

qui jouissent bien des propriété exigées [11]).

Si nous considérons des fonctions complètement monotones quelconques il suffit de corriger les polynomes (44), correspondants à la fonction f^* par la fonction (43) et $f(x)$ sera la limite uniforme de ces polynomes ainsi corrigés.

§ 3. — Inégalités linéaires pour les fonctions convexes définies dans un intervalle

14. — Considérons une fonctionnelle linéaire $A(f)$ définie pour les fonctions $f(x)$, bornées et ayant au plus des discontinuités de premières espèce dans l'intervalle $[a, b]$. Pour fixer les idées prenons

$$A(f) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) + \Sigma\, \tau_i f(x_i) \qquad (\tau_i \neq 0) \tag{45}$$

où $\alpha(x)$ est une fonction continue à variation bornée dans $[a, b]$, les $x_i \in [a, b]$ sont en nombre fini ou en infinité au plus dénombrable et la série $\Sigma\, \tau_i$ est alors absolument convergente. Ces points x_i sont les *points critiques* de la fonctionnelle linéaire $A(f)$.

Remarquons que la fonctionnelle considerée au § 1 est un cas particulier où $\alpha(x)$ se réduit à une constante et le nombre des points critique est fini.

---

[11]) Voir: Tiberiu Popoviciu *„Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur"* Mathematica, 10, 49—54 (1934).

On sait, d'ailleurs, que toute fonctionnelle linéaire définie pour les fonctions f continues dans $[a, b]$ est de la forme [12]).

$$\int_a^b f(x)\, d\,\alpha(x)$$

où $\alpha(x)$ est une fonction à variation bornée dans $[a, b]$. Lorsqu'il s'agit uniquement des fonctions f continues, on peut toujours prendre $A(f)$ sous cette forme.

On voit que

$$\lim_{m \to \infty} A(f_m) = A(f) \tag{46}$$

si la suite des fonctions f_m converge uniformément vers la fonction limite f.

Nous nous proposons de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'inégalité

$$A(f) \geqq 0 \tag{47}$$

ait lieu pour toute fonction non-concave d'ordre n dans l'intervalle $[a, b]$.

Les résultats du § 1 permettent de traiter un peu plus rapidement cette question.

Nous allons supposer d'abord $n > 0$.

On voit, comme au § 1, que les conditions

$$A(x^i) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{48}$$

sont nécessaires.

Le lemme **5** nous montre que les conditions

$$A(\varphi_{n+1,\lambda}) \geqq 0, \quad a \leqq \lambda \leqq b \tag{49}$$

sont aussi nécessaires

Ces conditions sont aussi suffisantes. En effet, supposons d'abord $f(x)$ continue et non-concave d'ordre n. Construisant la fonction (39) et compte tenant de (48), (49) nous trouvons

$$A(\psi_m) = A(f_m) = (n+1)\, h \sum_{i=1}^{m-n} \Delta_{n+1}^{i-1}(f)\, A[(\varphi_{n+1,\, \lambda_{i+n-1}})] \geqq 0, \tag{50}$$

[12]) FRÉDÉRIC RIESZ „*Sur les opérations fonctionnelles linéaires*" C. R. Acad. sc. Paris, **149**, 974—977 (1909).

et, d'après (46), en tenant compte de la démonstration du théorème **6**,

$$\lim_{m \to \infty} A(\psi_m) = A(f) \geqq 0. \tag{51}$$

Si les extrémités a, b de l'intervalle $[a, b]$ ne sont pas des points critiques de $A(f)$ les résultats précédents sont évidemment valables pour toutes les fonctions non-concaves d'ordre n dans $[a, b]$.

Démontrons maintenant le

Lemme 8. *Si l'extrémité a est un point critique de la fonctionnelle* A(f) *et si les conditions (48) et (49) sont satisfaites, on a*

$$(-1)^{n+1}\, \tau' > 0, \tag{52}$$

τ' étant le coefficient τ_i correspondant au point critique a.

Si l'extrémité b est un point critique, dans les même conditions, on a

$$\tau'' > 0, \tag{53}$$

τ'' étant le coefficient τ_i correspondant au point critique b [13]).

Désignons par $\sum\limits_{x_i \geqq \lambda}$, $\sum\limits_{x_i > \lambda}$, ... etc., des sommations qui s'étendent à toutes les valeurs de i pour lesquelles $x_i \geqq \lambda$, $x_i > \lambda$, .. etc. On a alors

$$0 \leqq A(\varphi_{n+1,\lambda}) = \int_\lambda^b (x-\lambda)^n\, d\,\alpha(x) + \sum_{x_i \geqq \lambda} \tau_i (x_i - \lambda)^n =$$

$$= -\int_a^\lambda (x-\lambda)^n\, d\,\alpha(x) - \sum_{x_i \leqq \lambda} \tau_i (x_i - \lambda)^n.$$

Nous en déduisons, pour $a < \lambda < b$,

$$-\frac{1}{(\lambda - a)^n} \int_a^\lambda (x-\lambda)^n\, d\,\alpha(x) + (-1)^{n+1} \tau' - \sum_{a < x_i \leqq \lambda} \tau_i \left(\frac{x_i - \lambda}{\lambda - a}\right)^n \geqq 0$$

et faisant $\lambda \to a$ on trouve (52).

[13]) Cette propriété est valable aussi dans le cas ou $A(f)$ se réduit à une fonctionnelle telle que (2). Les points (1) étant ordonnés et l'inégalité étant vérifiée par toute fonction non-concave d'ordre n définie sur les points (1) ou définie dans l'intervalle $[a, b]$ (en supposant $\tau_1 \neq 0$, $\tau_m \neq 0$, ce qui ne restrient pas la généralité), $(-1)^{n+1} \tau_1 > 0$, $\tau_m > 0$.

De même, nous avons,

$$\frac{1}{(b-\lambda)^n}\int_{\lambda}^{b}(x-\lambda)^n\,d\alpha(x)+\tau''+\sum_{b>x_i\geqq\lambda}\tau_i\left(\frac{x_i-\lambda}{b-\lambda}\right)^n\geqq 0.$$

et pour $\lambda \to b$ on déduit (53).

Soit maintenant une fonction $f(x)$ non-concave d'ordre n. La fonction $f^*(x)$ donnée par (30) est continue et aussi non-concave d'ordre n. Sous les hypothèses (48), (49) on a donc

$$A(f^*)\geqq 0$$

et

$$(54)\quad A(f)=A(f^*)+\tau'[f(a)-f(a+0)]+\tau''[f(b)-f(b-0)],$$

donc, en vertu du lemme 8,

$$A(f)\geqq 0.$$

Finalement donc nous avons le

Théorème 10. *Pour que l'inégalité (47) soit vérifiée par toute fonction non-concave d'ordre* n *dans* [a, b], *il faut et il suffit que les conditions (48) et (49) soient satisfaites.*

15. — Cherchons maintenant les conditions sous lesquelles l'inégalité plus précise

$$(55)\qquad A(f)>0,$$

est vraie pour toute fonction convexe d'ordre n dans l'intervalle $[a, b]$. Les conditions (48) et (49) sont encore nécessaires, puisque toute fonction non-concave d'ordre n est la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions convexes d'ordre n [14]).

La relation (54) nous montre qu'il suffit de considérer des fonctions continues et convexes d'ordre n.

Remarquons que la fonction

$$F(\lambda)=A(\varphi_{n+1,\lambda})$$

est continue et non-négative dans $[a, b]$.

Démontrons alors le

Lemme 9. *Si les conditions* (48) *et* (49) *sont satisfaites, et si la fonction* F(λ) *n'est pas identiquement nulle, toute fonction continue et convexe d'ordre* n *vérifie l'inégalité* (55).

[14]) Par exemple $f(x)$ est limite de $f(x)+\dfrac{x^{n+1}}{m}$ pour $m\to\infty$.

En effet, la continuité de F (λ) nous montre qu'on peut trouver un intervalle $[c, d]\subseteq[a, b]$ et un nombre positif C tels que

$$(56)\qquad F(\lambda)>C,\quad \lambda\in[c, d].$$

On peut toujours choisir les nombres c, d de manière qu'ils divisent rationnellement l'intervalle $[a, b]$ et que l'on ait $a<c<d<b$. Soit

$$c=a+\alpha\frac{b-a}{r},\quad d=a+\beta\frac{b-a}{r},$$

où $1\leqq\alpha<\beta\leqq r-1$, α, β, r étant des entiers.

Reprenons les points (36) avec $m=r.p$, où p est assez grand, en espèce $p<\dfrac{n(n+1)}{\beta-\alpha}$, et les fonctions (37) correspondantes.

Ces fonctions peuvent s'écrire

$$f_m(x)=\sum_{i=1}^{m-n}[\Delta_n^i(f)-\Delta_n^{i-1}(f)]\varphi_{n+1,\lambda_{i+n-1}}(x).$$

Les inégalités (50) et (56) nous donnent

$$A(\psi_m)=A(f_m)>C\sum_{i=\alpha p-n+1}^{\beta p-n+1}[\Delta_n^i(f)-\Delta_n^{i-1}(f)]>$$

$$>C\sum_{i=\alpha p+1}^{\beta p-n}[\Delta_n^i(f)-\Delta_n^{i-1}(f)]=C[\Delta_n^{\beta p-n}(f)-\Delta_n^{\alpha p}(f)].$$

Divisons l'intervalle $[\lambda_{\alpha p}, \lambda_{\beta p}]=[c, d]$ en $n+1$ parties égales par les points

$$y_i=c+i\frac{d-c}{n+1},\quad i=0, 1, \ldots, n+1.$$

Une formule bien connue des différences divisées nous donne

$$[y_0, y_1, \ldots, y_n;\, f]-\Delta_n^{\alpha p}(f)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\lambda_{\alpha p+i})[y_0, y_1, \ldots, y_i, \lambda_{\alpha p+i}, \lambda_{\alpha p+i+1}, \ldots, \lambda_{\alpha p+n};\, f]>0.$$

$$\Delta_n^{\beta p-n}(f)-[y_1, y_2, \ldots, y_{n+1};\, f]=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda_{\beta p-n+i}-y_{i+1})[\lambda_{\beta p-n}, \lambda_{\beta p-n+1}, \ldots, \lambda_{\beta p-n+i}, y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots, y_{n+1};\, f]>0,$$

Il en résulte que

$$\Delta_n^{\beta p-n}(f)-\Delta_n^{\alpha p}(f)>[y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}; f]-[y_0, y_1, \ldots, y_n; f]=$$

$$=(d-c)[y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}; f]>0.$$

Nous avons donc

$$A(\psi_m)>C(d-c)[y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}; f]>0.$$

Faisons maintenant $p \to \infty$, alors $m \to \infty$, mais les points y_i sont indépendants de p, donc de (51) il résulte que

$$A(f) \geqq C(d-c)[y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}; f]>0,$$

ce qui démontre le lemme **9.**

Nous complétons la propriété précédente par le

Lemme 10. *Si les conditions* (48), (49) *sont satisfaites et si l'inégalité* (55) *est vérifiée par une fonction continue et convexe d'ordre* n, *alors cette inégalité sera verifiée par toute fonction continue et convexe d'ordre* n.

En effet, si l'inégalité (55) est satisfaite pour une fonction convexe f, la formule (51) nous montre que F (λ) ne peut être identiquement nul. En particulier, x^{n+1} est une fonction convexe d'ordre n et nous déduisons le

Théorème 11. *Pour que l'inégalité* (55) *soit vérifiée par toute fonction convexe d'ordre* n *dans l'intervalle* [a, b] *il faut et il suffit que les conditions* (48), (49) *soient satisfaites et que, de plus, l'on ait*

$$A(x^{n+1})>0. \tag{57}$$

On peut aussi chercher dans quels cas l'égalité

$$A(f)=0 \tag{58}$$

est valable pour une fonction non-concave d'ordre n dans $[a, b]$.

L'analyse précédente nous montre que si les conditions (48), (49) sont satisfaites, l'égalité (58) n'est possible, pour une fonction non-concave d'ordre n que si cette fonction se réduit à un polynome de degré n dans tout intervalle où F (λ) est positif.

16. — Nous avons supposé jusqu'ici $n>0$. Supposons maintenant que $n=0$. Nous allons démontrer que *les théorèmes* **9** *et* **10** *restent vrais encore dans ce cas*[15]).

[15]) Cette propriété est comprise, en partie, dans le théorème 399 de l'excellent livre de MM. G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. POLYA „*Inequalities*", Cambridge Univ., Press. 1934.

Toutes les conditions précédentes sont évidemment nécessaires. Il reste à montrer qu'elles sont aussi suffisantes.

La suffisance des conditions (48), (49) pour l'inégalité (47) résulte, dans le cas où la fonction f est continue, comme plus haut.

Si la fonction non-décroissante $f(x)$ n'est pas continue le théorème **10** se démontre comme plus haut, mais en s'appuyant sur le théorème **7.** Pour cela il faut démontrer que si les conditions (48), (49) sont vérifiées, l'inégalité (37) est vraie pour toutes les fonctions $\varphi_{1,\lambda}(x;\rho)$ données par (40). Dans le cas où λ ne coïncide pas avec un point critique de A (f) ceci est évident, puisqu'alors A ($\varphi_{1,\lambda}(x;\rho)$) ne dépend pas de la valeur de la fonction au point λ.

Supposons donc que λ coïncide avec le point critique x_r. Si nous prenons, comme plus haut,

$$F(\lambda)=A(\varphi_{1,\lambda}),$$

la condition (49) s'écrit, pour $\lambda=x_r$,

$$F(x_r)=\alpha(b)-\alpha(x_r)+\sum_{x_i \geqq x_r} \tau_i \geqq 0.$$

La fonction F (λ) n'est pas continue en général, mais elle n'a que des discontinuités de première espèce au plus (plus exactement elle est à variation bornée). On en déduit que

$$F(x_r+0)=\alpha(b)-\alpha(x_r)+\sum_{x_i > x_r} \tau_i \geqq 0.$$

La propriété résulte maintenant de

$$A(\varphi_{1,x_r}(x;\rho))=\alpha(b)-\alpha(x_r)+\sum_{x_i > x_r} \tau_i+\tau_r\rho=$$

$$=\alpha(b)-\alpha(x_r)+\sum_{x_i \geqq x_r} \tau_i+\tau_r(\rho-1).$$

Examinons maintenant le théorème **11.** Supposons donc (48), (49) et A (x) >0 satisfaites. Je dis que, dans ce cas, on peut trouver un sous-intervalle $[c, d]$ de $[a, b]$ tel que

$$F(\lambda)>\gamma=\frac{A(x)}{2(b-a)}, \quad \lambda \in [c, d].$$

En effet, dans le cas contraire, l'ensemble des λ pour lesquels F (λ) $\leqq \gamma$ serait partout dense dans $[a, b]$. Sous cette hypothèse, construisons la fonction $\psi(x)$ du Nr. **11**, en prenant les λ_i dans cet ensemble tel que

$$(59) \qquad |A(x) - A(\psi_m)| < \frac{A(x)}{2}, \text{ donc } \frac{A(x)}{2} < A(\psi_m).$$

D'autre part

$$A(\psi_m) \leqq \frac{A(x)}{2(b-a)}(b-a) = \frac{A(x)}{2},$$

qui est en contradiction avec (59). La propriété est donc démontrée.

L'inégalité (55) pour une fonction continue et croissante résulte maintenant comme au Nr. précédent. Pour une fonction croissante quelconque, la décomposition (42) nous montre que la propriété est encore vraie. En effet, $f^*(x)$ est alors continue et croissante et on a

$$A(f) = A(f^*) + A(\chi), \quad A(f^*) \geqq 0, \quad A(\chi) \geqq 0.$$

Maintenant, ou bien il y a des discontinuités de f comprises entre c et d et alors $A(\chi) > 0$, ou bien f^* est croissante dans $[c, d]$ et alors $A(f^*) > 0$, comme il résulte de la démonstration du Nr. précedent.

Les conclusions relatives à l'égalité (58) s'étendent au cas $n = 0$. Si $f(x)$ est non-décroissante, pour que cette égalité ait lieu il faut et il suffit que

$$A(f^*) = 0, \quad A(\chi) = 0.$$

La première égalité ne peut avoir lieu que si f^* se réduit à une constante dans tout intervalle où $F(\lambda)$ reste plus grand qu'un nombre positif fixe. Pour que la seconde égalité ait lieu il faut que

$$A(\varphi_{1,\xi_i}(x;\rho_i)) = 0, \quad \rho_i = \frac{f(\xi_i) - f(\xi_i - 0)}{f(\xi_i + 0) - f(\xi_i - 0)}$$

pour toutes les discontinuités ξ_i de $f(x)$.

Mais,

$$A(\varphi_{1,\xi_i}(x;\rho_i)) = F(\xi_i)$$

si ξ_i n'est pas un point critique de $A(f)$ et

$$A(\varphi_{1,\xi_i}(x;\rho_i)) = F(x_r) - \tau_r(1 - \rho_i) = F(x_r + 0) + \tau_r \rho_i$$

si ξ_i coïncide avec le point critique x_r.

Il en résulte que l'égalité (58) n'est possible pour une fonction non-décroissante que si cette fonction se réduit à une constante dans tout intervalle ou $F(\lambda)$ reste plus grand qu'un nombre positif fixe.

17. Des résultats précédents nous déduisons une importante formule de moyenne qui, au moins sous une forme particulière, est due à M. N. Ciorănescu [16]).

Soit $A(f)$ la fonctionnelle linéaire considérée plus haut et supposons que (48), (49) et (57) soient satisfaites ($n \geqq 0$).

Si une fonction continue $f(x)$ vérifie l'égalité $A(f) = 0$, elle ne peut être ni convexe ni concave d'ordre n. Or, pour une telle fonction on peut toujours trouver $n+2$ points *distincts* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ situés dans l'intervalle $[a, b]$ et tels que

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] = 0.$$

Soit alors $f(x)$ une fonction continue quelconque dans l'intervalle $[a, b]$. Nous avons

$$A\left(f - \frac{A(f)}{A(x^{n+1})}\, x^{n+1}\right) = 0$$

et en appliquant le résultat précédent, on trouve

$$A(f) = A(x^{n+1})\,[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$$

donc

Théorème 12. *Si* $A(f)$ *est une fonctionnelle linéaire définie pour les fonctions continues dans l'intervalle* $[a, b]$ *et si*

$$A(1) = A(x) = \ldots = A(x^n) = 0, \quad A(x^{n+1}) > 0,$$
$$A(\varphi_{n+1,\lambda}) \geqq 0, \quad a \leqq \lambda \geqq b,$$

pour toute fonction continue $f(x)$ *dans l'intervalle* $[a, b]$ *on peut trouver* $n+2$ *points distincts* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ *de cet intervalle tels que l'on ait*

$$A(f) = A(x^{n+1})\,[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f].$$

La formule proprement dite de M. N. Ciorănescu en résulte pour les fonctions admettant une dérivée d'ordre $n+1$.

[16]) N. Ciorănescu *„La généralisation de la première formule de la moyenne"* l'Enseignement Mathématique, **37**, 292—302 (1938).

18. — Les résultats du Nr. **3** s'étendent immédiatement. Soit $B(f)$ une fonctionnelle linéaire telle que (45). Nous construisons à l'aide de cette fonctionnelle les moments (14), les déterminants (15) et les polynomes orthogonaux et normaux (16). La fonctionnelle $B(f)$ est non-négative resp. positive dans les mêmes conditions qu'au Nr. **3**.

Nous déduisons le

Théorème 13. *Si* $B(f)$ *est une fonctionnelle linéaire non-négative telle que* $\delta_{n+1} > 0$ *et si* P_{n+1} *est le polynome orthogonal* (et normal) *de degré* $n+1$ *correspondant à cette fonctionnelle, on a*

$$B(P_{n+1}\cdot f) \geqq 0 \text{ resp. } > 0, \tag{60}$$

pour toute fonction non-concave resp. convexe d'ordre n.

Ce théorème résulte d'ailleurs de la formule

$$\sqrt{\delta_n \cdot \delta_{n+1}}\, B(P_{n+1}\cdot f) =$$

$$= \frac{1}{(n+2)!} B_{t_1} B_{t_2} \dots B_{t_{n+2}} (V(t_1, t_2, \dots, t_{n+2})\, U(t_1, t_2, \dots, t_{n+2}; f)).$$

En particulier, nous pouvons prendre

$$B(f) = \int_a^b p(x) f(x)\, dx \tag{61}$$

où $p(x)$ est une fonction bornée sommable et non-négative, ayant une intégrale positive dans $[a, b]$. C'est alors bien une fonctionnelle linéaire positive.

Par exemple, si $p(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$, le polynome P_{n+1} diffère seulement par un facteur constant positif du polynome

$$X_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^{n+1} \tag{62}$$

de Legendre de degré $n+1$. En considérant la fonctionnelle

$$A(f) = \int_{-1}^{+1} X_{n+1}(x) f(x)\, dx$$

nous pouvons facilement calculer maintenant la fonction $F(\lambda)$.

On a

$$F(\lambda) = \int_\lambda^{+1} X_{n+1}(x)(x-\lambda)^n\, dx$$

et un calcul facile nous donne

$$F(\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}.$$

Nous avons donc le

Théorème 14. *Si* $X_{n+1}(x)$ *est le polynome de* Legendre *de degré* $n+1$, *on a l'inégalité*

$$\int_{-1}^{+1} X_{n+1}(x) f(x)\, dx \geqq 0$$

pour toute fonction non-concave d'ordre n *dans l'intervalle* $[-1, +1]$. *L'égalité n'est possible que si la fonction se réduit à un polynome de degré* n *dans l'intervalle ouvert* $(-1, +1)$.

Il est facile d'énoncer une propriété analogue correspondante à la fonctionnelle linéaire positive (61).

§ 4. — Inégalités bilinéaires pour les fonctions convexes définies dans un intervalle

19. — Considérons maintenant une fonctionnelle bilinéaire $A(f, g)$ définie dans le champs des fonctions f, g bornées et admettant au plus des discontinuités de première espèce dans l'intervalle $[a, b]$. $A(f, g)$ est donc une fonctionnelle linéaire de f resp. de g de la nature indiquée au § 3, pour toute fonction donnée g resp. f. Un cas très particulier est la fonctionnelle bilinéaire (20) étudiée au § 1. Il est inutile de préciser ici la forme de $A(f, g)$ dans le cas général.

Proposons nous de chercher des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'inégalité

$$A(f, g) \geqq 0 \tag{63}$$

soit vérifiée par tout couple de deux fonctions non-concaves d'ordre n dans $[a, b]$.

Supposons d'abord $n > 0$.

Tout d'abord on trouve, comme plus haut, les conditions nécessaires

$$A(f, x^i) = A(x^i, f) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \tag{64}$$

où f est une fonction non-concave d'ordre n dans $[a, b]$.

D'ailleurs, si les conditions (64) sont satisfaites par f non-concave d'ordre n, elles sont satisfaites identiquement pour toute fonction f continue dans $[a, b]$. Cette propriété résulte du lemme suivant.

Lemme 11. *Si* A (f) *est une fonctionnelle linéaire et si* A (f) = 0 *pour toute fonction continue et non-concave d'ordre* n *dans* [a, b], *on a cette même égalité* A (f) = 0 *pour toute fonction continue dans* [a, b].

En effet, de $A(-f) = -A(f)$ il résulte que l'égalité est vérifiée aussi par toute fonction non-convexe d'ordre n. La propriété est donc vraie aussi pour toute fonction qui est la somme d'une fonction non-concave et d'une fonction non-convexe d'ordre n. Or, toute fonction continue est la limite uniforme de fonctions qui sont des tels sommes (des polynomes par exemple). D'où la propriété.

La nature des conditions (64) est donc précisée.

Le lemme 4 nous montre que les conditions

$$A(\varphi_{n+1,\lambda}, \varphi_{n+1,\mu}) \geqq 0, \quad a \leqq \lambda \leqq b, \quad a \leqq \mu \leqq b, \tag{65}$$

sont aussi nécessaires pour l'inégalité (63).

Les conditions (64), (65) sont aussi suffisantes. Pour le voir il suffit de construire les fonctions ψ_m correspondantes à f et à g supposées continues et non-concaves d'ordre n dans $[a, b]$. Soient ψ'_m, ψ''_m ces fonctions. On voit d'abord que

$$A(\psi'_m, \psi''_m) \geqq 0$$

et ensuite

$$\lim_{m' \to \infty} A(\psi'_{m'}, \psi''_{m''}) = A(f, \psi''_{m''}), \quad \lim_{m'' \to \infty} A(f, \psi''_{m''}) = A(f, g).$$

Pour que l'inégalité plus précise

$$A(f, g) > 0 \tag{66}$$

soit vérifiée par tout couple de deux fonctions convexes d'ordre n, il est nécessaire de plus que

$$A(x^{n+1}, x^{n+1}) > 0. \tag{67}$$

Cette condition est aussi suffisante. En effet, si (64), (65) et (67) sont satisfaites on a

$$A(x^{n+1}, g) > 0,$$

pour toute fonction g convexe d'ordre n, puisque la fonctionnelle linéaire $A(x^{n+1}, g)$ de g vérifie les conditions (48), (49) et (57). g étant une fonction convexe d'ordre n, la fonctionnelle linéaire $A(f, g)$ de f

vérifie aussi les conditions (48), (49) et (57). On a donc l'inégalité (66) si f est aussi convexe d'ordre n.

Enfin, si les fonctions f, g ne sont pas continues, en voit que les résultats subsistent. En effet, f^*, g^* étant les fonctions (30) correspondantes, on a d'abord

$$A(f^*, g^*) \geqq 0.$$

d'où

$$A(f, g^*) \geqq 0.$$

La fonctionnelle linéaire $A(f, g)$ de g nous montre alors la propriété.

Finalement donc

Théorème 15. *Pour que l'inégalité (62) soit vérifiée par tout couple de deux fonctions non-concaves d'ordre* n *dans* [a, b], *il faut et il suffit que les conditions (64), (65) soient satisfaites.*

Pour que l'inégalité plus précise (66) soit vérifiée par tout couple de deux fonctions convexes d'ordre n *dans* [a, b], *il faut et il suffit que les conditions (64), (65) et (67) soient satisfaites.*

Si les conditions (64), (65) et (67) sont satisfaites et si g est une fonction convexe d'ordre n donnée, on trouve les conditions sous lesquelles

$$A(f, g) = 0$$

pour une fonction non-concave d'ordre n, comme plus haut, en considérant la fonctionnelle linéaire $A(f, g)$ de f.

20. — Les résultats du Nr. **5** peuvent se généraliser immediatement. Ce que nous avons établi jusqu'ici nous permet d'énoncer le

Théorème 16. *Si* B (f) *est une fonctionnelle linéaire non-négative telle que* $\delta_{n+1} > 0$ *et si on considère les polynomes orthogonaux* (et normaux) *(16) relatifs à cette fonctionnelle, on a*

$$B(fg) \geqq \text{resp.} > \sum_{r=0}^{n} B(P_r f)\, B(P_r g), \tag{68}$$

pour tout couple de deux fonctions non-concaves resp. convexe d'ordre n *dans l'intervalle* [a, b].

Cette propriété résulte d'ailleurs immédiatement de l'inégalité

$$B_{t_1} B_{t_2} \dots B_{t_{n+2}} (U(t_1, t_2, \dots, t_{n+2}; f)\, U(t_1, t_2, \dots, t_{n+2}; g)) \geqq 0.$$

En particulier, on peut prendre la fonctionnelle positive (61). Dans ce cas, si $p(x)$ reste plus grand qu'un nombre positif fixe, on peut affirmer que l'égalité dans (68) n'est possible, si l'une des fonctions est convexe d'ordre n et l'autre non-concave d'ordre n, que si cette dernière se réduit à un polynome de degré n dans l'intervalle ouvert (a, b).

Prenons le cas particulier $p(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$. P_r sont alors, à des facteurs constants positifs près, les polynomes de LEGENDRE (62). On a

$$P_r = \sqrt{\frac{2r+1}{2}}\, X_r$$

et nous déduisons le

Théorème 17. Si $X_0, X_1, \ldots, X_n$ *sont les polynomes de* LEGENDRE *de degrés* $0, 1, \ldots, n$, *on a l'inégalité*

$$(69) \qquad \int_{-1}^{+1} f(x)\, g(x)\, dx \geqq \text{resp.} >$$

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{2r+1}{2} \left[\int_{-1}^{+1} X_r(x) f(x)\, dx\right]\left[\int_{-1}^{+1} X_r(x)\, g(x)\, dx\right],$$

pour tout couple de deux fonctions non-concaves resp. convexes d'ordre n *dans l'intervalle* $[-1, 1]$.

D'ailleurs, si l'une des fonctions f, g *est convexe et l'autre non-concave d'ordre* n *dans* $[-1, 1]$, *l'égalité dans (69) n'est possible que si cette seconde fonction se réduit à un polynome de degré* n *dans l'intervalle ouvert* $(-1, 1)$.

Il est facile d'énoncer une propriété analogue pour la fonctionnelle plus générale (61).

21. — Le théorème **16** généralise une inégalité de TCHEBYCHEFF. Pour $n = 0$ l'inégalité (69) revient à celle de TCHEBYCHEFF. Sous une forme un peu plus générale cette inégalité peut s'écrire

$$\int_a^b p(x)\, dx \int_a^b p(x) f(x) g(x)\, dx \geqq \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx,$$

f, g étant non-décroissantes dans (a, b) et $p(x)$ de la nature indiquée dans (61).

De toute inégalité bilinéaire (63) resp. (66) on déduit une inégalité linéaire, en particularisant l'une des fonctions f, g. Ainsi le théorème **13** peut se déduire du théorème **16** en prenant $g = x^{n+1}$.

L'inégalité (68) est vérifiée identiquement si $f \equiv g$ et nous obtenons ainsi le

Théorème 18. *Toute fonction bornée et ayant au plus des discontinuités de première espèce dans* [a, b], *vérifie l'inégalité* [17])

$$(70) \qquad B(f^2) \geqq \sum_{r=0}^{n} [B(P_r \cdot f)]^2,$$

où $B(f)$ *et* P_r *ont la même signification que dans le théorème* ***16.***

C'est n'est autre que l'inégalité de BESSEL correspondante au développement de la fonction f suivant les polynomes orthogonaux et normaux P_r.

Dans certains cas on peut affirmer immédiatement que l'égalité dans (70) n'est possible que si f se réduit à un polynome de degré n. Il en est ainsi, par exemple, si f est supposée être continue et $B(f)$ est de la forme (61) avec $p(x) > \gamma > 0$, dans $[a, b]$.

§ 5. — Sur quelques limitations d'une fonctionnelle linéaire

22. — Considérons une fonctionnelle linéaire $A(f)$. Dans ce § nous supposerons toujours que cette fonctionnelle vérifie l'égalité

$$(71) \qquad A(1) = 0,$$

donc qu'elle ne dépend pas d'une constante additive de f.

Il en résulte que si Ω est l'oscillation de la fonction f (là où elle est définie), il existe une constante M, indépendante de la fonction f, telle que l'on ait

$$(72) \qquad |A(f)| < M \cdot \Omega.$$

La fonctionnelle $A(f)$ étant donnée, le nombre M de (72) a un minimum M_0 qui est évidemment donné par l'égalité

$$M_0 = \max |A(f)|,$$

le maximum étant relatif à toute les fonctions (admises) dont les valeurs restent comprises entre 0 et 1.

Nous allons chercher à préciser la limitation (72) lorsqu'on impose à la fonction f des conditions supplémentaires. Supposons, par exemple, que f soit k-fois monotone. Le nombre M de (72) a alors un minimum M_k qui est donné par

$$M_k = \max |A(f)|,$$

où le maximum est relatifs à toutes les fonctions k-fois monotones dont les valeurs restent comprises entre 0 et 1.

[17]) L'inégalité reste vraie dans des cas beaucoup plus généraux. Par exemple, si on prend la fonctionnelle (61), pour toute fonction f mesurable et bornée dans $[a, b]$.

Si la fonction est définie dans un intervalle, on peut aussi considérer des fonctions complètement monotones. Dans ce cas le minimum M^* de M est donné par

$$M^* = \max | A(f) | ,$$

le maximum étant relatif à toutes les fonctions complètement monotones dont les valeurs restent comprises entre 0 et 1.

La suite

$$(73) \qquad M_0, M_1, \ldots$$

est non-croissante. Si $f(x)$ est définie sur m points cette suite a m termes. Si $f(x)$ est définie dans un intervalle la suite est infinie et on a évidemment

$$(74) \qquad \lim_{k \to \infty} M_k \geqq M^*$$

23. — Supposons d'abord que la fonction $f(x)$ soit définie sur les m points ordonnés (1) et considérons la fonctionnelle (2) satisfaisant, bien entendu, à (71).

On voit immédiatement que

$$M_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} | \tau_i | ,$$

et ce maximum est atteint par toute fonction qui prend la valeur 0 en tous les points x_i auxquels correspondent des coefficients τ_i de même signe et la valeur 1 en tous les points x_i auxquels correspondent des coefficients τ_i qui ont le signe contraire.

Voyons maintenant comment on détermine les nombres M_k, $k > 0$. On voit immédiatement que pour trouver M_k il suffit de considérer seulement les fonctions non-négatives k-fois monotones et telles que

$$f(x_1) = 0, \quad f(x_m) = 1.$$

Si $k = 1$, une telle fonction est de la forme

$$(75) \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{m-1} c_i f^*_{1,\,i}(x),$$

où $c_i \geqq 0$, $c_1 + c_2 + \ldots + c_{m-1} = 1$.

Le nombre M_1 est donc égal au maximum de $\left| \sum_{i=1}^{m-1} c_i A(f^*_{1,\,i}) \right|$ lorsque les nombres non-négatifs c_i ont leur somme égale à 1. Mais, nous avons

$$a_{1,\,i} = A(f^*_{1,\,i}) = \sum_{j=i+1}^{m} \tau_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1$$

et il en résulte que

$$M_1 = \max (| a_{1,\,1} | , | a_{1,\,2} | , \ldots, | a_{1,\,m-1} |).$$

Ce maximum est atteint par toute fonction (75) dans laquelle tous les c_i sont nuls, sauf ceux pour lesquels $| a_{1,\,i} | = M_1$.

Si $k > 1$, la fonction $f(x)$ est de la forme

$$(76) \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_i) + \sum_{i=1}^{m-k} c_i f^*_{k,\,i}(x),$$

où les γ_i, c_i sont non-négatifs et vérifient l'égalité

$$(77) \qquad \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i (x_m - x_1)(x_m - x_2) \ldots (x_m - x_i) + \sum_{i=1}^{m-k} c_i (x_m - x_{i+1})(x_m - x_{i+2}) \ldots (x_m - x_{i+k-1}) = 1$$

Le nombre M_k est alors égal au maximum de

$$\left| \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i A((x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_i)) + \sum_{i=1}^{m-k} c_i A(f^*_{k,\,i}) \right| ,$$

lorsque les γ_i, c_i restent non-négatifs et vérifient l'égalité (77).

Posons

$$a_i = \frac{A((x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_i))}{(x_m-x_1)(x_m-x_2) \ldots (x_m-x_i)} = \frac{\sum_{j=i+1}^{m} \tau_j (x_j - x_1)(x_j - x_2) \ldots (x_j - x_i)}{(x_m - x_1)(x_m - x_2) \ldots (x_m - x_i)}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m-2$$

$$a_{k,i} = \frac{A(f^*_{k,i})}{(x_m - x_{i+1})(x_m - x_{i+2})\dots(x_m - x_{i+k-1})} =$$

$$= \frac{\sum_{j=i+k}^{m} \tau_j (x_j - x_{i+1})(x_j - x_{i+2})\dots(x_j - x_{i+k-1})}{(x_m - x_{i+1})(x_m - x_{i+2})\dots(x_m - x_{i+k-1})}$$

$$i = 1, 2, \dots, m-k, \quad k = 2, 3, \dots, m-1.$$

Nous avons alors

(78) $$M_k = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{k-1}|, |a_{k,1}|, |a_{k,2}|, \dots, |a_{k,m-k}|)'$$

et ce maximum est atteint par toute fonction de la forme (76) où tous les γ_i, c_i sont nuls sauf ceux pour lesquels $|a_i| = M_k$ resp. $|a_{k,i}| = M_k$ et les γ_i, c_i non nuls satisfaisant bien entendu, à (77).

24. — L'égalité $M_0 = M_1$ a certainement lieu si la suite des coefficients de $A(f)$,

(79) $$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m,$$

présente une seule variation de signe[18]). Dans ce cas, en effet, M_0 est atteint par une fonction qui est 1-fois monotone (non-décroissante). Plus exactement nous avons le

Théorème 19. *Pour que l'on ait* $M_0 = M_1$ *il faut et il suffit que la suite* (79) *présente une seule variation de signe.*

Nous avons déjà remarqué que la condition est suffisante. Montrons qu'elle est aussi nécessaire. Soit

$$M_1 = |a_{1,r}| = |\tau_{r+1} + \tau_{r+2} + \dots + \tau_m| = |\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_r|.$$

De $M_0 = M_1$ on déduit

$$\sum_{i=1}^{r} |\tau_i| + \sum_{i=r+1}^{m} |\tau_i| = |\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_r| + |\tau_{r+1} + \tau_{r+2} + \dots + \tau_m|.$$

ce qui exige que $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ d'une part et $\tau_{r+1}, \tau_{r+2}, \dots, \tau_m$ d'autre part soient de même signe. Le théorème est donc démontré.

Examinons maintenant la possibilité de l'égalité $M_k = M_{k+1}$, $k > 0$.

---

18) Cette suite présente au moins une variation de signe, en vertu de (71). Nous supposons, bien entendu, que les τ_i ne sont pas tous nuls. Le cas contraire ne présente aucun intérêt puisqu'alors $A(f)$ est nul identiquement.

Considérons d'abord les nombres

$$M'_k = \max(|a_{k,1}|, |a_{k,2}|, \dots, |a_{k,m-k}|),$$

$$k = 1, 2, \dots, m-1,$$

Nous avons

$$a_{k+1,i} = \frac{\sum_{j=i+1}^{m-k} (x_{j+k} - x_j)(x_m - x_{j+1})(x_m - x_{j+2})\dots(x_m - x_{j+k-1})\, a_{k,j}}{(x_m - x_{i+1})(x_m - x_{i+2})\dots(x_m - x_{i+k})}$$

$$i = 1, 2, \dots, m-k-1, \quad k = 1, 2, \dots, m-2$$

et

$$\sum_{j=i+1}^{m-k} (x_{j+k} - x_j)(x_m - x_{j+1})(x_m - x_{j+2})\dots(x_m - x_{j+k-1}) =$$

$$= (x_m - x_{i+1})(x_m - x_{i+2})\dots(x_m - x_{i+k}),$$

donc

Lemme 12. *Le nombre* $a_{k+1,i}$ *est une moyenne arithmétique* (généralisée) *des nombres* $a_{k,i+1}, a_{k,i+2}, \dots, a_{k,m-k}$.

Il en résulte que

$$|a_{k+1,i}| \leqq \max(|a_{k,i+1}|, |a_{k,i+2}|, \dots, |a_{k,m-k}|),$$

l'égalité n'étant possible et ayant effectivement lieu seulement si

$$a_{k,i+1} = a_{k,i+2} = \dots = a_{k,m-k}$$

Remarquons aussi que nous avons

$$a_{k,m-k} = \tau_m,$$

quel que soit k. Nous pouvons alors énoncer le

Lemme 13. *Si* $M'_k = M'_{k+1}$ *on a aussi* $M'_k = M'_{k+1} = \dots = M'_{m-1}$.

Tout d'abord du lemme **12** il résulte que

(80) $$M'_1 \geqq M'_2 \geqq \dots \geqq M'_{m-1}.$$

Je dis que l'égalité $M'_k = M'_{k+1}$ entraint $M' = |\tau_m|$. En effet, supposons le contraire. Il existe alors un indice r tel que $M'_1 = |a_{k,r}| > |\tau_m|$. Le lemme **12** nous montre alors que

$$|a_{k+1,i}| < |a_{k,r}|, \quad i = 1, 2, \dots, m-k-1,$$

donc $M'_k > M'_{k+1}$, ce qui est impossible. Nous avons donc bien $M'_k = |\tau_m| = M'_{m-1}$, ce qui démontre le lemme **13**.

Nous pouvons maintenant démontrer le

Théorème 20. *Dans le cas de la fonctionnelle* (2), *vérifiant la condition* (71), *la suite* $M_1, M_2, \dots, M_{m-1}$ *est, ou bien décroissante, ou bien il existe un indice* k, $1 \leq k \leq m-2$ *tel que l'on ait*

$$M_1 > M_2 > \dots > M_{k-1} > M_k = M_{k+1} = \dots = M_{m-1}.$$

Posons

$$M''_k = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{k-1}|), \quad k = 2, 3, \dots, m-1.$$

Nous avons alors

$$M_1 = M'_1, \; M_k = \max(M'_k, M''_k), \; k = 2, 3, \dots, m-1$$

Supposons maintenant que $M_k = M_{k+1}$. Il suffit de démontrer qu'on a alors aussi $M_{k+1} = M_{k+2}$. Si $M_{k+1} = M''_{k+1}$ la propriété est démontrée puisque le maximum M_{k+1} est alors atteint par un polynome qui est aussi $(k+2)$-fois monotone. Si $M_{k+1} = M'_{k+1}$, de $M''_k \leq M''_{k+1}$ et de

$$\max(M'_k, M''_k) = \max(M'_{k+1}, M''_{k+1}).$$

il résulte que $M'_k = M'_{k+1}$, donc aussi, d'après le lemme **13**, $M'_k = M'_{k+1} = M'_{k+2}$.

L'égalité $M_k = M_{k+1}$ résulte alors de

$$M_{k+1} = M'_{k+1} \geq M_{k+2} = \max(M'_{k+2}, M''_{k+2}) \geq M'_{k+2}.$$

Le maximum M_1 est toujours atteint par une fonction de la forme $f^*_{1,i}$ et le maximum M_k, $k > 1$, par une fonction de la forme

$$\frac{f^*_{k,i}(x)}{(x_m - x_{i+1})(x_m - x_{i+2}) \dots (x_m - x_{i+k-1})}$$

ou par un polynome de la forme

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_i)}{(x_m - x_1)(x_m - x_2) \dots (x_m - x_i)}, \; i \leq k-1$$

Si M_k est atteint par un tel polynome on a nécessairement $M_k = M_{k+1} = \dots = M_{m-1}$.

25. — Donnons un exemple. Prenons les points

$$x_i = i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

et soit

$$A(f) = \frac{2}{m} \sum_{j=2}^{m} \sum_{i=1}^{j-1} (j - i)[f(j) - f(i)] = \sum_{i=1}^{m} (2i - m - 1) f(i),$$

qui est une fonctionnelle de la forme (18).

Ici nous sommes précisément dans le cas où, d'après le théorème **19**, on a

$$M_0 = M_1 = \frac{m^2}{4} \text{ ou } = \frac{m^2 - 1}{4} \text{ (suivant que } m \text{ est pair ou impair).}$$

Dans ce cas nous pouvons facilement calculer les nombres a_i, $a_{k,i}$. On trouve

$$a_i = \frac{im(m+1)}{(i+1)(i+2)}, \quad a_{k,i} = \frac{(m-i)[(k-1)(m+1) + 2i]}{k(k+1)}$$

et on en déduit

$$M'_2 = \begin{cases} \dfrac{m(3m+2)}{16}, & m \equiv 0 \pmod 2) \\ \dfrac{(3m+1)^2}{48}, & m \equiv 1 \pmod 4) \\ \dfrac{(m+1)(3m-1)}{16}, & m \equiv 3 \pmod 4) \end{cases}$$

$$M'_k = \frac{(m-1)[(k-1)(m+1)+2]}{k(k+1)}, \quad k = 3, 4, \dots, m-1,$$

$$M''_k = \frac{m(m+1)}{6} \quad k = 2, 3, \dots, m-1,$$

Nous avons donc

$$M_0 = M_1 > M_2 > M_3 = M_4 = \dots = M_{m-1} = \frac{m(m+1)}{6}$$

Cet exemple nous montre aussi que l'égalité $M_0 = M_1$ est bien possible sans que tous les M_k soient égaux.

26. — Considérons maintenant des fonctions $f(x)$ définies dans un intervalle $[a, b]$ et prenons la fonctionnelle linéaire (45), satisfaisant toujours à (71).

On peut facilement calculer le nombre M_0. Sans insister ici sur la démonstration, disons seulement qu'on a

$$M = \frac{1}{2}(V + \Sigma \mid \tau_i \mid)$$

où V est la variation totale de la fonction $\alpha(x)$. Mais, en général, il n'est pas sûr que ce maximum est atteint par une fonction ayant seulement des discontinuités de première espèce. Par exemple, si $A(f)$ est de la forme

$$A(f) = \int_a^b p(x) f(x)\, dx + \Sigma \tau_i f(x_i),$$

où $p(x)$ est sommable et bornée dans $[a, b]$ l'intégrale étant prise au sens de LEBESGUE, le maximum M_0 est atteint par la fonction qui est égale à 1 en tout point où $p(x)$ est positif (négatif) et en tout point x_i auquel correspond un coefficient τ_i positif (négatif) et est égale à 0 aux autres points de $[a, b]$. Cette fonction est mesurable et bornée, donc $p(x) f(x)$ est sommable.

Quelquefois on peut immédiatement conclure que $M_0 = M_1$. Il en est ainsi, par exemple, si

$$A(f) = \int_a^b p(x) f(x)\, dx,$$

où $p(x)$ change une seule fois de signe dans $[a, b]$. Dans ce cas, en effet, M_0 est atteint par une fonction non-décroissante.

Voyons maintenant comment on peut déterminer les nombres M_k, $k > 0$,

Si $k = 1$, une fonction non-décroissante est, ou bien une fonction élémentaire d'ordre 0, ou bien la limite uniforme de telles fonctions. On voit facilement que, pour calculer M_k, il suffit de considérer seulement des fonctions élémentaires d'ordre 0, non-décroissantes et telles que $f(a) = 0$, $f(b) = 1$. Une telle fonction est de la forme

$$(81) \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_{1, \lambda_i}(x; \rho_i), \quad a \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m \leqq b,$$

où $c_i \geqq 0$, $c_1 + c_2 + \ldots + c_m = 1$. ($\rho_1 = 0$ si $\lambda_1 = a$ et $\rho_m = 1$ si $\lambda_m = b$).

On en déduit, comme plus haut,

$$M_1 = \max_{\substack{\lambda \in [a, b] \\ 0 \leq \rho \leq 1}} \mid A(\varphi_{1,\lambda}(x; \rho)) \mid .$$

Reprenons la fonction $F(\lambda) = A(\varphi_{1,\lambda})$ du Nr. **16.** Alors $A(\varphi_{1,\lambda}(x; \rho))$ est toujours compris entre $F(\lambda)$ et $F(\lambda + 0)$. On a donc

$$(82) \qquad M_1 = \max_{\lambda \in [a, b]} \mid A(\varphi_{1,\lambda}) \mid .$$

Considérons le cas $k > 1$. Toute fonction k-fois monotone est, ou bien une fonction élémentaire d'ordre $k - 1$ et k-fois monotone, ou bien la limite uniforme de telles fonctions, éventuellement corrigées par la fonction (43). On voit encore que, pour calculer M_k, il suffit de considérer seulement des fonctions élémentaires d'ordre $k + 1$, k-fois monotones, corrigées par la fonction (43) et telles que $f(a) = 0$, $f(b) = 1$. Une telle fonction est de la forme

$$(83) \qquad \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i (x - a)^i + \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_{k,\lambda_i}(x) + c^* \varphi_{1,b}(x),$$

où $a < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m < b$, $\quad \gamma_i \geqq 0$, $c_i \geqq 0$, $c^* \geqq 0$ et

$$(84) \qquad \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i (b - a)^i + \sum_{i=1}^{m} c_i (b - \lambda_i)^{k-1} + c^* = 1.$$

Posons encore

$$a_i = \frac{A((x - a)^i)}{(b - a)^i}, \ i = 1, 2, \ldots, \ a_{k,\lambda} = \frac{A(\varphi_{k,\lambda})}{(b - \lambda)^{k-1}}, \ k = 1, 2, \ \ldots$$

$$(85) \qquad M'_k = \max_{\lambda \in (a, b)} \mid a_{k,\lambda} \mid, \ M''_k = \max(\mid a_1 \mid, \mid a_2 \mid, \ldots, \mid a_{k-1} \mid).$$

Nous avons alors

$$(86) \qquad M_k = \max(M'_k, M''_k, A(\varphi_{1,b})).$$

Si l'extrémité b de l'intervalle $[a, b]$ n'est pas un point critique de $A(f)$, on a $A(\varphi_{1,b}) = 0$. Dans ce cas donc

$$(87) \qquad M_k = \max(M'_k, M''_k).$$

27. — La fonction $a_{1,\lambda}$ de λ n'est autre que $A(\varphi_{1,\lambda})$. Nous savons que cette fonction est bornée et n'a que des discontinuités de première espèce au plus. On a, d'ailleurs,

$$a_{1,\lambda} = \int_{\lambda}^{b} d\alpha(x) + \sum_{x_i \geqq \lambda} \tau_i$$

et il en résulte que

$$\lim_{\lambda \to b} a_{1,\lambda} = \tau'' \text{ [19]},$$

où nous désignons par τ'' un nombre égal à zéro si b n'est pas un point critique de $A(f)$ et égal au coefficient τ_i correspondant au point critique b, dans le cas contraire.

Prenons maintenant la fonction $a_{k,\lambda}$ de λ pour $k > 1$. Nous avons

$$a_{k,\lambda} = \frac{1}{(b-\lambda)^{k-1}} \int_{\lambda}^{b} (x-\lambda)^{k-1} d\alpha(x) + \sum_{x_i \geqq \lambda} \tau_i \left(\frac{x_i - \lambda}{b-\lambda}\right)^{k-1}. \tag{88}$$

C'est une fonction continue de λ dans l'intervalle $[a, b)$.

La partie intégrale de (88) tend vers zéro pour $\lambda \to b$. Il suffit, en effet, d'écrire

$$\int_{\lambda}^{b} (x-\lambda)^{k-1} d\alpha(x) = (b-\lambda)^{k-1}\alpha(b) - (k-1)\int_{\lambda}^{b} (x-\lambda)^{k-2}\alpha(x)\,dx$$

et d'appliquer à la dernière intégrale la première formule de la moyenne. Compte tenant de l'absolue convergence de la série $\sum \tau_i$ on déduit aussi que

$$\sum_{b > x_i \geqq \lambda} \tau_i \left(\frac{x_i - \lambda}{b-\lambda}\right)^{k-1} \tag{89}$$

tend vers zéro si $\lambda \to b$.

Il en résulte donc que

$$\lim_{\lambda \to b} a_{k,\lambda} = \tau'' \tag{90}$$

τ'' ayant la signification du plus haut. Cette formule est donc vraie pour $k = 1, 2, \ldots$

[19]) Les fonctions n'étant définies que dans l'intervalle $[a, b]$, $\lambda \to b$ signife $\lambda \to b - 0$.

Démontrons aussi le

Lemme 14. *Si* $k \to \infty$, *la fonction* $a_{k,\lambda}$ *de* λ *tend uniformément vers la constante* τ'' *dans l'intervalle* $[a, b)$.

Pour démontrer ce lemme montrons d'abord que la partie intégrale de (88) tend uniformément vers zéro pour $k \to \infty$.

Désignons toujours par V la variation totale de la fonction $\alpha(x)$ dans $[a, b]$ et par V_k sa variation totale dans l'intervalle $\left[b - \frac{1}{\sqrt{k}}, b\right]$ $\left(k > \frac{1}{(b-a)^2}\right)$. La fonction $\alpha(x)$ étant continue et à variation bornée dans $[a, b]$ on a

$$\lim_{k \to \infty} V_k = 0.$$

Nous pouvons écrire

$$\left| \int_{b-\frac{1}{\sqrt{k}}}^{b} (x-\lambda)^{k-1} d\alpha(x) \right| \leqq (b-\lambda)^{k-1} V_k$$

et, si $\lambda < b - \frac{1}{\sqrt{k}}$,

$$\left| \int_{\lambda}^{b-\frac{1}{\sqrt{k}}} (x-\lambda)^{k-1} d\alpha(x) \right| \leqq \left(b - \frac{1}{\sqrt{k}} - \lambda\right)^{k-1} V,$$

d'aprés la formule de la moyenne d'une intégrale de Stieltjes.

Nous en déduisons

$$\left| \frac{1}{(b-\lambda)^{k-1}} \int_{\lambda}^{b} (x-\lambda)^{k-1} d\alpha(x) \right| \leqq V_k + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}(b-\lambda)}\right)^{k-1} V.$$

Mais,

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}(b-\lambda)}\right)^{k-1} = \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}(b-\lambda)}\right)^{\sqrt{k}(b-\lambda)}\right]^{\frac{k-1}{\sqrt{k}(b-\lambda)}} < \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{k-1}{\sqrt{k}(b-a)}}$$

et on voit que le second membre est indépendent de λ et tend vers zéro pour $k \to \infty$.

D'autre part l'absolue convergence de la série $\Sigma \tau_i$ nous montre immédiatement que (89) tend uniformément vers zéro pour $k \to \infty$.

Le lemme **14** est donc démontré.

Considérons aussi les nombres a_i. Nous avons $a_i = a_{i+1,a}$. Le lemme **14** s'applique donc et on a

(91) $$\lim_{i \to \infty} a_i = \tau''$$

28. — Nous pouvons maintenant étudier les nombres M_k. Remarquons que

$$A(\varphi_{k+1,\lambda}) = k \int_\lambda^b A(\varphi_{k,t})\, dt$$

ce qu'on peut aussi écrire

(92) $$a_{k+1,\lambda} = \frac{\int_\lambda^b (b-t)^{k-1} a_{k,t}\, dt}{\int_\lambda^b (b-t)^{k-1}\, dt}, \quad k=1, 2, \ldots$$

donc

Lemme 15. — La fonction $a_{k+1,\lambda}$ *de* λ *est une moyenne aritmétique de la fonction* $a_{k,\lambda}$ *de* λ *dans l'intervalle* (λ, b).

C'est l'analogue du lemme **12.**

Il en résulte que la suite

(93) $$M'_1, M'_2, \ldots, M'_k, \ldots$$

est non-croissante. D'après le lemme **14**, on a

(94) $$\lim_{k \to \infty} M'_k = |\tau''|,$$

donc nous avons aussi $M'_k \geqq |\tau''|$.

Nous avons $A(\varphi_{1,b}) = \tau''$. On peut donc toujours substituer la formule (87) à la formule (86).

Nous supposons évidemment que $A(f)$ n'est pas identiquement nul. Il est facile de voir alors, en appliquant un raisonnement analogue à celui que nous avons employé pour la démonstration du lemme **11**, que tous les nombres (93) sont non nuls, donc positifs.

Si nous supposons $M'_k > |\tau''|$, d'après de lemme **15**, on doit avoir aussi $M'_k > M'_{k+1}$. Il en résulte que si $M'_k = M'_{k+1}$ on a nécessairement $M'_k = |\tau''|$, donc $M'_k = M'_{k+1} = M'_{k+2} = \ldots = |\tau''|$

Si b n'est pas un point critique de $A(f)$ ce dernier cas ne se présente pas puisqu'alors $\tau'' = 0$.

Nous obtenons ainsi l'analogue du lemme **13**,

Lemme 16. — Le suite (93) est, ou bien décroissante ou bien il existe un indice k *tel que*

$$M'_1 > M'_2 > \ldots > M'_{k-1} > M'_k = M'_{k+1} = M'_{k+2} = \ldots\ldots$$

Si l'extrémité b *de l'intervalle* [a, b] *n'est pas un point critique de A* (f), *nous sommes toujours dans le premier cas.*

Examinons aussi la suite

$$M''_2, M''_3, \ldots, M''_k, \ldots$$

Cette suite est évidemment bornée et non-décroissante. D'après le lemme **14**, on a

(95) $$\lim_{k \to \infty} M'' \geqq |\tau''|.$$

D'ailleurs, $A(f)$ étant supposé non identiquement nul, les M''_k ne sont pas tous nuls.

Considérons maintenant la suite non-croissante

(96) $$M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$$

Une démonstration identique à celle employée pour le théorème **20**, nous montre que si $M_k = M_{k+1}$ on a aussi $M_k = M_{k+1} = M_{k+2} = \ldots$ Si le point b n'est pas un point critique, la formule (94) nous montre qu'il existe nécessairement un indice k tel que $M_k = M_{k+1}$.

Pour trouver le nombre M^* il suffit de considérer seulement des polynomes en $x - a$ à coefficients non-négatifs, corrigés éventuellement par la fonction (43) et prenant la valeur 0 en a et la valeur 1 en b, il en résulte que

(97) $$M^* = \lim_{k \to \infty} M''_k$$

et, compte tenant de (94) et (95),

$$M^* = \lim_{k \to \infty} M_k$$

ce qui précise, enfin, la formule (74).

Finalement donc nous pouvons énoncer l'analogue suivant du théorème **20**,

Théorème 21. *Dans le cas d'une fonctionnelle A* (f) *de la forme (45), vérifiant la condition (71), la suite (96) est, ou bien croissante, ou bien il existe un indice* k *tel que l'on ait*

$$M_1 > M_2 > \ldots > M_{k-1} > M_k = M_{k+1} = M_{k+2} = \ldots\ldots$$

Si l'extrémité b *de l'intervalle* [a, b] *n'est pas un point critique de A* (f) *nous sommes toujours dans ce dernier cas.*

Le nombre M est toujours égal à la limite de la suite (96).*

De l'analyse précédente il résulte que le maximum M_1 est atteint par une fonction de la forme $\varphi_{1,\lambda}$. Le maximum M_k est toujours atteint par une fonction de la forme $C\,\varphi_{k,\lambda}$, ou par un polynome $C\,(x-a)^i$ avec $i \leq k-1$. Si M_k est atteint par $C.\,(x-a)^i$ on est sûr que $M_k = M_{k+1} = \ldots = M^*$. C est ici partout une constante convenable.

29. — Examinons quelques exemples,

Considérons d'abord

$$A(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - f(0).$$

Dans ce cas $M_0 = M_1 = 1$. Les a_i, $a_{k,\lambda}$ se calculent facilement. Nous avons

$$a_i = \frac{1}{i+1}, \qquad a_{k,\lambda} = \frac{1-\lambda}{k}$$

et il résulte que

$$M_2 = \frac{1}{2}, \qquad M_0 = M_1 > M_2 = M_3 = \ldots, \qquad M^* = \frac{1}{2}$$

Considérons aussi la fonctionnelle

$$A(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - f(1)$$

L'extrémité droite de l'intervalle est, dans ce cas, un point critique. On a encore $M_0 = M_1 = 1$. Nous trouvons

$$M_0 = M_1 = M_2 = \ldots\ldots\ldots, \qquad M^* = 1.$$

Il suffit, d'ailleurs, de remarquer que, dans ce cas, M_1 est atteint par le fonction $\varphi_{1,b}(x)$ qui est aussi complètement monotone.

Considérons aussi la fonctionnelle

$$A(f) = \int_{-1}^{+1} x f(x)\,dx$$

C'est une fonctionnelle de la forme (60). x est précisément le polynome de Legendre de degré 1. Dans ce cas on a encore $M_0 = M_1 = \frac{1}{2}$ et

$$a_i = \frac{2i}{(i+1)(i+2)}, \qquad a_{k,\lambda} = \frac{(1-\lambda)(\lambda+k)}{k(k+1)}$$

donc

$$M_2' = \frac{3}{8}, \qquad M_k' = \frac{2(k-1)}{k(k+1)}, \qquad k = 3, 4, \ldots$$

$$M_k'' = \frac{1}{3}, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Nous avons donc $M_2 = \frac{3}{8}$, $M_3 = \frac{1}{3}$ et

$$M_0 = M_1 > M_2 > M_3 = M_4 = \ldots\ldots, \qquad M^* = \frac{1}{3}$$

Si nous prenons la fonctionnelle

$$A(f) = \int_{-1}^{+1} X_{n+1}(x) f(x)\,dx,$$

où $X_{n+1}(x)$ est le polynome de Legendre de degré $n+1$, le calcul des nombres M_k, est plus compliqué. Toutefois il est encore facile d'obtenir le nombre M^*. Nous avons, en effet,

$$a_i = \frac{2i(i-1)\ldots(i-n)}{(i+1)(i+2)\ldots(i+n+2)}$$

dont le maximum s'obtient pour $i = n^2 + 3n + 1$. Nous avons donc

$$M^* = \frac{2\,[(n^2+3n+1)!]^2}{[n(n+2)]!\,[(n+1)(n+3)]!}.$$

Dans ce cas $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, donc surement,

$$M_1 > M_2 > \ldots > M_{n+1}.$$

Cette observation est d'ailleurs valable pour toute fonctionnelle A (f) qui vérifie les relations

$$A(x^i) = 0, \; i = 0, 1, \ldots, n$$

et pour laquelle l'extrémité droite de l'intervalle $[a, b]$, n'est pas un point critique. En effet, une égalité $M_k = M_{k+1}$, $k \leqq n$ entrainerait $0 < M^* \leqq M_k = M'_k = M'_{k+1} = \ldots$, qui est en contradiction avec (94) ($\tau'' = 0$).

§ 6. — Sur quelques limitations d'une fonctionnelle bilinéaire.

30. — On peut aussi se proposer de chercher des limitations analogues pour une fonctionnelle bilinéaire $A(f, g)$. Nous nous contenterons ici de donner quelques indications sur ce problème dans le cas particulier de la fonctionnelle

$$A(f, g) = B(fg) - \sum_{r=0}^{n} B(P_r \cdot f)\, B(P_r \cdot g),$$

que nous avons considéré au Nrs. **5** et **20.** Nous supposerons donc que $B(f)$ est une fonctionnelle linéaire non-négative telle que $\delta_{n+1} > 0$ et que P_r sont les polynomes orthogonaux et normaux (16) correspondants.

Remarquons que cette fonctionnelle est symétrique en f et g et que $A(f, f) \geqq 0$, quelle que soit la fonction f. Il est facile d'en déduire l'inégalité de Schwarz

$$|A(f, g)| \leqq \sqrt{A(f, f)\, A(g, g)} \tag{98}$$

Il suffit de nous occuper de la fonctionnelle quadratique $A(f, f)$. Nous avons

$$A(1, f) = A(f, 1) = 0,$$

identiquement par rapport à la fonction f, donc $A(f+c, f+c) = A(f, f)$ si c est une constante. On voit alors qu'il existe une constante N telle que

$$A(f, f) < N \cdot \Omega, \tag{99}$$

Ω étant toujours l'oscillation de la fonction f (là où elle est définie).

Le nombre N a un minimum, soit N_0, qui est déterminé par la condition de maximum

$$N_0 = \max A(f, f) \tag{100}$$

relative à toutes les fonctions f (admises) dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1. De même soit N_k le minimum de N lorsque f reste k-fois monotone et N^* le minimum de N lorsque f reste complètement monotone. Les nombres N_k, N^* s'obtiennent par des conditions de maximum telle que (100), exactement comme pour les nombres M_k, M^* du Nr. **22.**

Les nombres N_k, N^* étant déterminés, on déduit de (98) des limitations

$$|A(f, g)| \leqq N \cdot \Omega_f\, \Omega_g,$$

où Ω_f, Ω_g sont les oscillations de f, g et $N = N_0$, $N = N_k$ resp. $N = N^*$ suivant qu'on impose à ces fonctions f, g les conditions de monotonie signalées.

On peut facilement trouver une limitation supérieure pour N_0. Nous avons évidemment

$$A(f, f) \leqq B(1) \cdot \max |f|^2.$$

Si f reste comprise entre 0 et 1, nous pouvons écrire $\left| f - \frac{1}{2} \right| \leqq \frac{1}{2}$

donc

$$A(f, f) = A\left(f - \frac{1}{2}, f - \frac{1}{2}\right) \leqq \frac{B(1)}{4}.$$

On a donc nécessairement

$$N_0 \leqq \frac{B(1)}{4}. \tag{101}$$

Mais, il est à remarquer que l'égalité peut ne pas avoir lieu même dans des cas très simples. Il en est ainsi, par exemple, si

$$B(f) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_m),$$

m étant impair. Ce fait se présente d'ailleurs seulement si nous nous trouvons dans le cas des fonctions définies sur un ensemble fini (1). Au contraire l'égalité dans (101) a lieu généralement si les valeurs des fonctions interviennent effectivement dans une infinité de points. Il en est ainsi, par exemple, si

$$B(f)=\int_a^b f(x)\,dx,$$

comme nous le verons à la fin de ce travail (nous prendrons $a=-1$, $b=1$, ce qui ne restreint pas la généralité).

Nous pouvons, en tout cas, énoncer le

Théorème 22. *Si* B (f) *est une fonctionnelle linéaire non-négative et telle que* $\delta_{n+1}>0$ *et si* $P_0, P_1, \dots, P_n$ *sont les polynomes orthogonaux* (et normaux) *de degré* 0, 1,. . .n, *correspondants à cette fonctionnelle, on a*

$$\left| B(fg)-\sum_{r=0}^{n} B(P_r\cdot f)\,B(P_r\cdot g)\right| \leq \frac{B(1)}{4}\,\Omega_f\cdot\Omega_g,$$

Ω_f, Ω_g *étant les oscillations des fonctions* f, g.

Bien entendu, les fonctions f, g sont définies sur les points (1) ou dans l'intervalle $[a, b]$ suivant les cas.

31. — Cherchons à déterminer les nombres N_k dans le cas où les fonctions sont définies sur les m points (1).

Prenons d'abord le cas $k=1$. On voit encore qu'il suffit de considérer des fonctions de la forme (75) avec

$$c_i \geq 0,\ c_1+c_2+\dots+c_{m-1}=1.$$

Alors A (f, f) devient une forme quadratique en $c_1, c_2, \dots, c_{m-1}$,

$$A(f,f)=\sum_{i,\,j=1}^{m-1} c_i c_j\, A(f^*_{1,\,i}, f^*_{1,\,j}).$$

Cette forme quadratique est non-négative et on voit donc, compte tenant de (98), que

$$N_1=\max_{i=1,2,\dots,m-1} A(f^*_{1,\,i}, f^*_{1,\,i}).$$

Dans le cas $k>1$, un raissonnement absolument identique nous montre que

$$N_k=\max(N'_k, N''_k)$$

où

$$N'_k=\max_{i=1,2,\dots,m-k}\frac{A(f^*_{k,\,i}, f^*_{k,\,i})}{[(x_m-x_{i+1})(x_m-x_{i+2})\dots(x_m-x_{i+k-1})]^2}$$

$$N''_k=\max_{i=1,2,\dots,k-1}\frac{A((x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_i),(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_i))}{[(x_m-x_1)(x_m-x_2)\dots(x_m-x_i)]^2}.$$

Remarquons que

$$f^*_{k+1,\,i}=\sum_{j=i+1}^{m-k}(x_{j+k}-x_j)\,f^*_{k,\,j}.$$

Nous en déduisons

$$A(f^*_{k+1,\,i}, f^*_{k+1,\,i})=\sum_{j_1,\,j_2=i+1}^{m-k}(x_{j_1+k}-x_{j_1})(x_{j_2+k}-x_{j_2})\,A(f^*_{k,\,j_1}, f^*_{k,\,j_2})$$

et, en vertu de (98),

$$\text{(102)}\qquad \frac{\sqrt{A(f^*_{k+1,\,i}, f^*_{k+1,\,i})}}{(x_m-x_{i+1})(x_m-x_{i+2})\dots(x_m-x_{i+k})}\leq$$

$$\leq\frac{\displaystyle\sum_{j=i+1}^{m-k}(x_{j+k}-x_j)(x_m-x_{j+1})(x_m-x_{j+2})\dots(x_m-x_{j+k-1})\frac{\sqrt{A(f^*_{k,\,j}, f^*_{k,\,j})}}{(x_m-x_{j+1})(x_m-x_{j+2})\dots(x_m-x_{j+k-1})}}{(x_m-x_{i+1})(x_m-x_{i+2})\dots(x_m-x_{i+k})}.$$

C'est la formule analogue à la formule de la moyenne du Nr. **24.**

On voit que la suite

$$N'_1,\ N'_2,\ \dots,\ N'_{m-1}$$

est non-croissante. On a encore

$$\frac{A(f^*_{k,\,m-k}, f^*_{k,\,m-k})}{[(x_m-x_{m-k+1})(x_m-x_{m-k+2})\dots(x_m-x_{m-1})]^2}=A(f^*_{1,\,m-1}, f^*_{1,\,m-1})$$

qui est donc indépendant de k. On en déduit, comme pour le lemme **13,** que si $N'_k=N'_{k+1}$ on a aussi $N'_k=N'_{k+1}=N'_{k+2}=\dots=N'_{m-1}$.

D'autre part la suite

$$N''_2, N''_3, \ldots, N''_{m-1}$$

est évidemment non-décroissante.

Finalement on obtient l'analogue suivant du théorème **20.**

Théorème 23. *— La suite*

$$N_1, N_2, \ldots, N_{m-1}$$

est, ou bien décroissante, ou bien il existe un indice k *tel que*

$$N_1 > N_2 > \ldots > N_{k-1} > N_k = N_{k+1} = \ldots = N_{m-1},$$

La démonstration est la même que pour le théorème **20.**

Il est clair que si N_k est atteint par un polynome de la forme

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_i)}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_i)}$$

on a nécessairement $N_k = N_{k+1} = \ldots = N_{m-1}$,

32. — Supposons maintenant que les fonctions soient définies dans l'intervalle $[a, b]$.

On voit alors que

$$N_1 = \max_{\lambda \in [a,b]} A(\varphi_{1,\lambda}, \varphi_{1,\lambda})$$

$$N'_k = \max_{\lambda \in (a,b)} \frac{A(\varphi_{k,\lambda}, \varphi_{k,\lambda})}{(b-\lambda)^{2k-2}}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$N''_k = \max_{i=1,2,\ldots,k-1} \frac{A((x-a)^i, (x-a)^i)}{(b-a)^{2i}}, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

$$N_k = \max(N'_k, N''_k), \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Nous avons, dans ce cas

$$A(\varphi_{k+1,\lambda}, \varphi_{k+1,\lambda}) = k^2 \int_\lambda^b \int_\lambda^b A(\varphi_{k,t}, \varphi_{k,u})\, dt du,$$

qui est une formule facile à vérifier.

Nous pouvons alors écrire, en tenant compte de (98),

$$\frac{\sqrt{A(\varphi_{k+1,\lambda}, \varphi_{k+1,\lambda})}}{(b-\lambda)^k} \leq \frac{\displaystyle\int_\lambda^b (b-t)^{k-1} \frac{\sqrt{A(\varphi_{k,t})}}{(b-t)^{k-1}}\, dt}{\displaystyle\int_\lambda^b (b-t)^{k-1}\, dt}$$

qui est la formule (102) correspondante et est l'analogue de (92).

Dans ce cas, encore la suite

(103) $$N'_1, N'_2, \ldots, N'_k, \ldots$$

est non-croissante et si $N'_k = N'_{k+1}$ on a nécessairement

$$N'_k = N'_{k+1} = N'_{k+2} = \ldots\ldots$$

La suite

$$N''_2, N''_3, \ldots, N''_k, \ldots$$

est non-décroissante.

Remarquons que

$$A(f, f) = B(f^2) - \sum_{r=0}^{n} [B(P_r . f)]^2$$

et alors le lemme **15** peut s'appliquer aux fonctionnelles linéaires $B(P_r\ f)$ de f et à $B(f^2)$ de f^2. On en déduit que la suite (103) tend vers une limite pour $k \to \infty$,

$$\lim_{k \to \infty} N'_k = \tau$$

qui est nécessairement nulle si l'extrémité b n'est pas un point critique de $B(f)$. On a aussi

$$\lim_{k \to \infty} N''_k \geqq \tau.$$

En poursuivant le raisonnement comme au Nr. **28,** on en déduit le

Théorème 24. *— Dans le cas d'un intervalle* [a, b], *la suite*

(104) $$N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots$$

est, ou bien décroissante, ou bien il existe un indice k *tel que l'on ait*

$$N_1 > N_2 > \ldots > N_{k-1} > N_k = N_{k+1} = \ldots\ldots$$

Si l'extrémité droite de l'intervalle [a, b] *n'est pas un point critique de B* (f), *nous sommes toujours dans le second cas.*

Enfin, le nombre N^* est toujours égal à la limite de la suite (104).
Les nombres N_k, N^* sont atteints par des fonctions élémentaires simples comme dans le cas du théorème **21.** Il est clair que si N_k est atteint par un polynome de la forme $\frac{(x-a)^i}{(b-a)^i}$, on a nécessairement $N_k = N_{k+1} = \dots = N^*$.

33. — Pour donner un exemple prenons la fonctionnelle bilinéaire

$$A(f, g) = \int_{-1}^{+1} f(x)\, g(x)\, dx -$$

$$- \sum_{r=0}^{n} \frac{2r+1}{2} \left[\int_{-1}^{+1} X_r(x)\, f(x)\, dx \right] \left[\int_{-1}^{+1} X_r(x)\, g(x)\, dx \right]$$

où $X_r(x)$ sont les polynomes de LEGENDRE.
Dans le cas $n = 0$ nous avons

$$A((x+1)^i, (x+1)^i) = \frac{2^{2i+1}\, i^2}{(i+1)^2 (2i+1)}$$

$$A(\varphi_{k,\lambda}, \varphi_{k,\lambda}) = (1-\lambda)^{2k-1} \left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1-\lambda}{2k^2} \right]$$

Nous en déduisons $N_1 = \frac{1}{2}$, et

$$N'_2 = \frac{2}{9},\ N'_3 = \frac{9}{50},\ N'_k = \frac{2(k-1)^2}{k^2(2k-1)},\ k = 4, 5, \dots$$

$$N''_k = \frac{8}{45},\ k = 2, 3, \dots$$

On en déduit que

$$N_2 = \frac{2}{9},\ N_3 = \frac{9}{50},\ N_4 = N_5 = \dots = N^* = \frac{8}{45}$$

Ce résultat est du à MM. G. GRUSS et E. LANDAU [20]).

[20]) GERHARD GRUSS „*Uber das Maximum des absoluten Betrages von*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) g(x)\, dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)\, dx \int_a^b g(x)\, dx\ .\text{“}$$

Math. Zeitschrift, **39,** 215—226 (1934). EDMUND LANDAU „*Uber mehrfach monotone Folgen*“ Prace mat.-fiz., **44,** 337—351 (1937).

Si $n > 0$ la détermination exacte des nombres N_k est un calcul plus compliqué. Si $n = 1$ on peut obtenir facilement $N_1 = \frac{1}{6}$.

Le nombre N^* peut être déterminé car

$$\frac{1}{2^{2i}} A((x+1)^i, (x+1)^i) = \frac{2\, i^2 (i-1)^2 \dots (i-n)^2}{(i+1)^2 (i+2)^2, \dots (i+n+1)^2 (2i+1)}$$

et il suffit de chercher le nombre naturel i tel que cette expression devient maximum. La valeur de ce maximum est la valeur de N^*.

Pour terminer, nous allons montrer que dans ce cas nous avons égalité dans la formule (101), donc que $N_0 = \frac{1}{2}$.

Pour cela construisons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [x_{2i}, x_{2i+1}), \\ 1, & x \in [x_{2i+1}, x_{2i+2}), \end{cases} \qquad i = 0, 1, \dots$$

où $-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} < x_{n+2} = 1$. Il suffit de montrer qu'on peut déterminer les points x_i, $i = 1, 2, \dots, n+1$, de manière que

$$\int_{-1}^{+1} f^2(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = 1,\ \int_{-1}^{+1} X_r(x)\, f(x)\, dx = 0, \tag{105}$$

$$r = 1, 2, \dots, n$$

Le système (105) est vérifié si

$$x_1^s - x_2^s + \dots + (-1)^n x_{n+1}^s = \frac{(-1)^s + (-1)^n}{2}$$

$$s = 1, 2, \dots, n+1$$

et d'après un résultat de A. KORKINE et G. ZOLOTAREFF [21]) ceci a effectivement lieu si les x_i sont les zéros du polynome trigonométrique

$$\frac{\sin\{(n+2) \arccos x\}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

[21]) A. KORKINE et G. ZOLOTAREFF „*Sur un certain minimum*“ Nouv. Annales de Math., (2) **12,** 337—355 (1873).

Bucureşti, 15 Septemvrie 1942