

QUELQUES APPLICATIONS DE CERTAINES  
ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

PAR

D. V. IONESCU

(TIMIȘOARA)

Reçu le 10 Juin 1943

1. M. D. Pompeiu <sup>(1)</sup> a posé le problème de la détermination des fonctions continues  $F(x)$  et  $f(x)$  satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad \int_a^b F(x) f(x) dx = F\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b f(x) dx$$

quels que soient  $a$  et  $b$ , et a montré que les fonctions  $F(x)$  et  $f(x)$  satisfont aussi à l'équation fonctionnelle

$$(2) \quad F(y+x) f(y+x) + F(y-x) f(y-x) = F(y) [f(y+x) + f(y-x)]$$

quels que soient  $x$  et  $y$ .

M. Th. Anghelutza <sup>(2)</sup>, en posant

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

a écrit les équations (1) et (2) sous la forme

$$(1') \quad \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^a \varphi(x) dx} = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)},$$

$$(2') \quad f(y) [f(y+x) + f(y-x)] = f(y) [\varphi(y+x) + \varphi(y-x)].$$

<sup>(1)</sup> D. Pompeiu, Sur équation fonctionnelle qui s'introduit dans un problème de moyenne (C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, t. 190, 1930, p. 1107).

<sup>(2)</sup> Th. Anghelutza, Sur une équation fonctionnelle (C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, t. 194, 1932, p. 420).

M. Anghelutza a réduit l'intégration de l'équation fonctionnelle (2'), à celle de l'équation

$$(3) \quad \frac{f(y+4x) + f(y+2x)}{f(y+3x)} = \frac{f(y+2x) + f(y)}{f(y+x)}$$

à laquelle satisfait également la fonction  $\varphi(x)$ , et a trouvé toutes les solutions du problème, données par les formules

$$(4) \quad \begin{aligned} f(x) &= ax + b, & \varphi(x) &= a'x + b', \\ f(x) &= a \cos \theta x + b \sin \theta x, & \varphi(x) &= a' \cos \theta x + b' \sin \theta x, \\ f(x) &= a \operatorname{ch} \theta x + b \operatorname{sh} \theta x, & \varphi(x) &= a' \operatorname{ch} \theta x + b' \operatorname{sh} \theta x. \end{aligned}$$

$a, b, a', b'$  et  $\theta$  étant des constantes arbitraires.

Dans ce travail nous allons faire des applications de l'équation fonctionnelle (3).

2. Considérons l'équation fonctionnelle

$$(5) \quad f(\lambda+h) + f(\lambda-h) = 2f(\lambda)\varphi(h)$$

qui doit être satisfaite quels que soient  $\lambda$  et  $h$ , et supposons que la fonction  $f(x)$  soit continue.

Cette équation a été étudiée à un autre point de vue par M. Van der Lyn<sup>(3)</sup>.

Nous allons montrer que l'équation fonctionnelle (5) se ramène aisément à l'équation fonctionnelle (3) de M. Th. Anghelutza.

Dans l'équation (5) faisons d'abord,

$$\begin{aligned} \lambda &= y + 3x, & h &= x, \\ \lambda &= y + x, & h &= x. \end{aligned}$$

et ensuite

Nous obtenons

$$\begin{aligned} f(y+4x) + f(y+2x) &= 2f(y+3x)\varphi(x), \\ f(y+2x) + f(y) &= 2f(y+x)\varphi(x). \end{aligned}$$

En divisant membre à membre ces équations, nous aurons l'équation fonctionnelle

$$\frac{f(y+4x) + f(y+2x)}{f(y+2x) + f(y)} = \frac{f(y+3x)}{f(y+x)},$$

qui doit être satisfaite quels que soient  $x$  et  $y$  et qui est identique à l'équation (3) de M. Anghelutza.

<sup>(3)</sup> Van der Lyn. Sur l'équation fonctionnelle  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\varphi(y)$ . (Mathematica, Tome XVI, p. 91, 1940).

Les solutions de l'équation fonctionnelle (5) sont donc

$$(6) \quad \begin{aligned} f(x) &= ax + b, \\ f(x) &= a \cos kx + b \sin kx, \\ f(x) &= a \operatorname{ch} kx + b \operatorname{sh} kx, \end{aligned}$$

où  $a, b, k$  sont des constantes arbitraires.

L'équation fonctionnelle (5) montre qu'à ces fonctions, correspondent

$$(7) \quad \begin{aligned} \varphi(h) &= 1, \\ \varphi(h) &= \cos kh, \\ \varphi(h) &= \operatorname{ch} kh. \end{aligned}$$

3. Considérons maintenant une courbe représentée par l'équation

$$y = f(x),$$

où  $f(x)$  est une fonction continue, et désignons par  $y_1, y_2, y_3$  les ordonnées correspondant aux abscisses  $\lambda - h, \lambda$  et  $\lambda + h$ .

L'équation fonctionnelle (5) montre que les courbes représentées par les équations (6) sont les seules pour lesquelles le rapport

$$\frac{y_1 + y_3}{2y_2}$$

ne dépend pas de  $\lambda$ .

Pour la droite

$$y = ax + b,$$

nous avons

$$y_1 + y_3 = 2y_2,$$

propriété bien connue du trapèze.

Pour la sinusoïde

$$y = a \cos kx + b \sin kx,$$

nous avons

$$y_1 + y_3 = 2y_2 \cos kh$$

et pour la courbe

$$y = a \operatorname{ch} kx + b \operatorname{sh} kx,$$

nous avons

$$y_1 + y_3 = 2y_2 \operatorname{ch} kh.$$

4. Considérons l'équation fonctionnelle de Poisson<sup>(4)</sup>

$$(8) \quad f(\lambda+h) + f(\lambda-h) = 2f(\lambda)f(h).$$

La méthode d'intégration de l'équation fonctionnelle (5), s'applique encore à cette équation.

<sup>(4)</sup> E. Picard, Leçons sur quelques équations fonctionnelles. Gauthier Villars, 1928, p. 6.

En faisant les mêmes transformations de calcul, on démontre que  $f(x)$  satisfait aussi à l'équation fonctionnelle de M. Anghelutza

$$\frac{f(y+4x) + f(y+2x)}{f(y+3x)} = \frac{f(y+2x) + f(y)}{f(y+x)},$$

qui a pour solutions

$$(9) \quad \begin{aligned} f(x) &= ax + b, \\ f(x) &= a \cos kx + b \sin kx, \\ f(x) &= a \operatorname{ch} kx + b \operatorname{sh} kx. \end{aligned}$$

En écrivant que ces fonctions satisfont à l'équation de *Poisson*, ou encore mieux, en comparant les formules (9) avec les formules (7), on trouve que les solutions de l'équation de *Poisson*, fonctions continues, sont

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= 1, \\ f(\lambda) &= \cos k\lambda, \\ f(\lambda) &= \operatorname{ch} k\lambda, \end{aligned}$$

où  $k$  est une constante.

5. Considérons l'équation fonctionnelle

$$(10) \quad \int_{\lambda-h}^{\lambda+h} f(x) dx = 2\varphi(h) f(\lambda)$$

qui doit être satisfaite quelles que soient les valeurs de  $\lambda$  et de  $h$ , et supposons la fonction  $f(\lambda)$  continue. La fonction  $\varphi(h)$  vérifiant avec  $f(\lambda)$  l'équation fonctionnelle (10), sera aussi continue.

On peut réduire l'intégration de l'équation fonctionnelle (10), à l'intégration de l'équation fonctionnelle (3) de M. Anghelutza.

Faisons dans l'équation (10) successivement

$$\begin{aligned} \lambda &= y, & h &= x, \\ \lambda &= y + 2x, & h &= x, \\ \lambda &= y + 4x, & h &= x. \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$(13) \quad \int_{y-x}^{y+x} f(x) dx = 2\varphi(x) f(y),$$

$$(14) \quad \int_{y+x}^{y+3x} f(x) dx = 2\varphi(x) f(y+2x),$$

$$(15) \quad \int_{y+3x}^{y+5x} f(x) dx = 2\varphi(x) f(y+4x).$$

En ajoutant les formules (13) et (14) et ensuite (14) et (15), nous aurons

$$\int_{y-x}^{y+3x} f(x) dx = 2\varphi(x) [f(y+2x) + f(y)],$$

$$\int_{y+x}^{y+5x} f(x) dx = 2\varphi(x) [f(y+4x) + f(y+2x)]$$

et en divisant ces formules membre à membre, nous aurons

$$(16) \quad \frac{\int_{y+x}^{y+5x} f(x) dx}{\int_{y-x}^{y+3x} f(x) dx} = \frac{f(y+4x) + f(y+2x)}{f(y+2x) + f(y)}$$

D'autre part, si nous faisons dans l'équation (10), d'abord

$$\lambda = y + x, \quad h = 2x$$

et ensuite

$$\lambda = y + 3x, \quad h = 2x,$$

nous obtenons

$$\int_{y-x}^{y+3x} f(x) dx = 2\varphi(2x) f(y+x),$$

$$\int_{y+x}^{y+5x} f(x) dx = 2\varphi(2x) f(y+3x)$$

En divisant ces formules, nous aurons

$$\frac{\int_{y+x}^{y+5x} f(x) dx}{\int_{y-x}^{y+3x} f(x) dx} = \frac{f(y+3x)}{f(y+x)}$$

et en comparant cette équation avec l'équation (16), nous aurons l'équation

$$\frac{f(y+4x) + f(y+2x)}{f(y+2x) + f(y)} = \frac{f(y+3x)}{f(y+x)}$$

qui est justement l'équation fonctionnelle (3) de M. Anghelutza.

Les fonctions  $f(x)$  satisfaisant à l'équation fonctionnelle (10) sont donc

$$(17) \quad \begin{aligned} f(x) &= ax + b, \\ f(x) &= a \cos kx + b \sin kx, \\ f(x) &= a \operatorname{ch} kx + b \operatorname{sh} kx, \end{aligned}$$

et à ces fonctions correspondent

$$(18) \quad \begin{aligned} \varphi(h) &= h, \\ \varphi(h) &= \frac{\sin kh}{k}, \\ \varphi(h) &= \frac{\operatorname{sh} kh}{k}, \end{aligned}$$

6. Considérons la courbe représentée par l'équation

$$y = f(x),$$

où  $f(x)$  est une fonction continue, et désignons par  $y$ , l'ordonnée correspondant à l'abscisse  $\lambda$  et par  $S$  l'aire comprise entre la courbe, l'axe  $Ox$  et les ordonnées des points d'abscisses  $x = \lambda - h$  et  $x = \lambda + h$ .

L'équation fonctionnelle (10), montre que les courbes représentées par les équations (17) sont les seules pour lesquelles le rapport

$$\frac{S}{2y_2}$$

est indépendant de  $\lambda$ .

Pour la droite

$$y = ax + b$$

nous aurons

$$S = 2y_2 h,$$

formule qui exprime une propriété bien connue du trapèze.

Pour la sinusoïde

$$y = a \cos kx + b \sin kx$$

nous avons

$$S = 2y_2 \frac{\sin kh}{k}$$

et pour les courbes

$$y = a \operatorname{ch} kx + b \operatorname{sh} kx,$$

nous avons

$$S = 2y_2 \cdot \frac{\operatorname{sh} kh}{k}.$$

7. Considérons maintenant l'équation fonctionnelle

$$\int_{\lambda-h}^{\lambda+h} f(x) dx = 2f(\lambda)f(h),$$

analogue à l'équation de Poisson.

On peut appliquer à cette équation la méthode d'intégration de l'équation fonctionnelle (10). On démontre que la fonction  $f(x)$  satisfait à l'équation fonctionnelle (3) de M. Anghelutza et que ses solutions, fonctions continues de  $x$ , sont

$$f(x) = x,$$

$$f(x) = \frac{\sin kx}{k}$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh} kx}{k}$$

8. Considérons enfin l'équation fonctionnelle

$$(19) \quad \int_{\lambda-h}^{\lambda+h} f(x) dx = \varphi(h) [f(\lambda+h) + f(\lambda-h)]$$

qui doit être satisfaite quelques soient  $\lambda$  et  $h$ , et supposons que la fonction  $f(x)$  soit continue.

Nous allons ramener l'intégration de cette équation à l'intégration de l'équation (3) de M. Anghelutza.

En écrivant l'équation (19) pour les intervalles  $(y+2x, y+3x)$  et  $(y+3x, y+4x)$ , nous aurons

$$\int_{y+2x}^{y+3x} f(x) dx = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) [f(y+2x) + f(y+3x)],$$

$$\int_{y+3x}^{y+4x} f(x) dx = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) [f(y+3x) + f(y+4x)].$$

En ajoutant membre à membre ces équations, nous aurons

$$\int_{y+2x}^{y+4x} f(x) dx = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) [f(y+2x) + 2f(y+3x) + f(y+4x)].$$

Mais d'après l'équation (19), le premier membre de cette équation est égal à

$$\varphi(x) [f(y+2x) + f(y+4x)].$$

Nous avons donc

$$\varphi(x) [f(y+2x) + f(y+4x)] = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) [f(y+2x) + 2f(y+3x) + f(y+4x)],$$

d'où résulte que

$$(20) \quad \frac{f(y+2x) + f(y+4x)}{f(y+3x)} = \frac{2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{\varphi(x) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

En faisant les mêmes calculs, mais en partant des intervalles  $(y, y+x)$  et  $(y+x, y+2x)$ , nous arrivons à la formule

$$(21) \quad \frac{f(x) + f(y+2x)}{f(y+x)} = \frac{2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{\varphi(x) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

En comparant les équations (20) et (21), nous voyons que la fonction  $f(x)$  est solution de l'équation fonctionnelle

$$\frac{f(y+2x) + f(y+4x)}{f(y+3x)} = \frac{f(y+2x) + f(y)}{f(y+x)}$$

de M. Anghelutza.

Les solutions de l'équation fonctionnelle (19) sont donc

$$(22) \quad \begin{aligned} f(x) &= ax + b, \\ f(x) &= a \cos kx + b \sin kx, \\ f(x) &= a \operatorname{ch} kx + b \operatorname{sh} kx, \end{aligned}$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $k$  sont des constantes, et à ces fonctions correspondent

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= h, \\ \varphi(h) &= \frac{\operatorname{tg} kh}{k}, \\ \varphi(h) &= \frac{\operatorname{th} kh}{k}. \end{aligned}$$

9. Considérons la courbe représentée par l'équation

$$y = f(x),$$

où  $f(x)$  est une fonction continue, et désignons par  $y_1$  et  $y_3$  les ordonnées correspondant aux points d'abscisses  $\lambda - h$  et  $\lambda + h$  et par  $S$  l'aire comprise entre la courbe, l'axe  $Ox$  et ces ordonnées

L'équation fonctionnelle (19) montre que *les courbes représentées par les équations (22) sont les seules pour lesquelles le rapport*

$$\frac{S}{y_1 + y_3}$$

*est indépendant de  $\lambda$ .*

*Pour la droite*

$$y = ax + b$$

nous avons

$$S = (y_1 + y_3)h$$

ce qui exprime une propriété connue du trapèze.

*Pour la sinussoïde*

nous avons

$$y = a \cos kx + b \sin kx,$$

$$S = (y_1 + y_3) \frac{\operatorname{tg} kh}{k}$$

et pour la courbe

nous avons

$$y = a \operatorname{ch} kx + b \operatorname{sh} kx,$$

$$S = (y_1 + y_3) \frac{\operatorname{th} kh}{k}.$$