MATHEMATICA XXII (1946), pp. 102—108

RELATIONS ENTRE POLYNOMES DÉFINIS PAR CERTAINES RELATIONS DE RÉCURRENCE

PAR

D. V. IONESCO
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE CLUJ

Reçu le 16 Décembre 1945

1. Considérons la transformation fuchsienne

$$z_1 = \frac{az+b}{cz+d} = f(z) \tag{1}$$

où les nombres réels a, b, c, d satisfont à la relation

$$ad - bc = 1,$$

ainsi que les transformations successives

$$z_2 = f(z_1), \ldots, z_n = f(z_{n-1}), \ldots$$

On voit que z_n peut s'écrire encore sous la forme

$$z_n = \frac{P_n z + Q_n}{R_n z + S_n}, \tag{2}$$

où les fonctions P_n, Q_n, R_n, S_n de a, b, c, d sont données par les relations de récurrence

$$P_{n+1} = aP_n + bR_n, \quad R_{n+1} = cP_n + dR_n,$$
$$Q_{n+1} = aQ_n + bS_n, \quad S_{n+1} = cQ_n + dS_n.$$

A l'aide de ces relations on démontre que la transformation (2) est encore une transformation fuchsienne.

Les points doubles de cette transformation sont donnés par l'équation

$$R_n z^2 - (P_n - S_n) z - Q_n = 0,$$

dont le discriminant est

$$\Delta_n = (P_n + S_n)^2 - 4. \tag{3}$$

En posant

$$U_n = P_n + S_n, \tag{3}$$

on remarque que U_n est le polynome en

$$a + d = x,$$

défini par les relations de récurrence

$$U_n = x U_{n-1} - U_{n-2}, \tag{4}$$

avec

$$U_1 = x, \quad U_2 = x^2 - 2. \tag{4'}$$

Il résulte que Δ_n est également un polynome en x.

Nous allons définir aussi les polynomes $V_n(x)$, par les mêmes relations de récurrence

$$V_n = x V_{n-1} - V_{n-2} \tag{5}$$

mais où

$$V_1 = x, \quad V_2 = x^2 - 1. \tag{5'}$$

Dans cette note nous voulons démontrer d'abord la relation

$$\boxed{U_n^2 - 4 = (x^2 - 4) V_{n-1}^2} \tag{6}$$

entre les polynomes U_n et V_{n-1}.

2. Les polynomes V_n sont les polynomes de *Gegenbauer* définis par le développement de la fonction

$$\frac{1}{1 - \alpha x + \alpha^2}$$

suivant les puissances de α.

En posant

$$\boxed{x = 2\cos\theta} \tag{7}$$

nous avons la formule

$$\frac{1}{1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2} = 1 + \alpha\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} + \alpha^2\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} + \cdots$$

qui montre que

$$\boxed{V_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}}. \tag{8}$$

La relation

$$U_n = V_n - V_{n-2},$$

facile à démontrer, montre à l'aide de la formule (8), que

$$\boxed{U_n = 2\cos n\theta}. \tag{9}$$

Les formules (7), (8) et (9) aident à vérifier l'identité (6).

Les polynomes V_n ayant toutes les racines réelles, on voit que le discriminant $\Delta_n = U_n^2 - 4$, a les racines simples 2 et -2, les autres racines étant réelles et doubles.

3. On peut démontrer la relation (6) aussi d'une autre façon en la présentant comme le résultat d'un fait analytique.

On démontre à l'aide des relations (4) et (4′) que

$$\boxed{U_n(x) = x^n - \frac{n}{1} x^{n-2} + \frac{n}{2} C^1_{n-3} x^{n-4} - \frac{n}{3} C^2_{n-4} x^{n-6} + \cdots} \tag{10}$$

le dernier terme de ce développement étant $(-1)^p\, 2$ lorsque $n = 2p$ et $(-1)^p (2p+1)\, x$, lorsque $n = 2p+1$.

On démontre aussi que [1]

$$\boxed{V_n(x) = x^n - C^1_{n-1} x^{n-2} + C^2_{n-2} x^{n-4} - C^3_{n-3} x^{n-6} + \cdots} \tag{11}$$

le dernier terme étant $(-1)^p C^p_p$ lorsque $n = 2p$ et $(-1)^p C^p_{p+1}\, x$, lorsque $n = 2p+1$.

En dérivant la formule (10), on obtient la relation

$$\boxed{U'_n = n V_{n-1}}. \tag{12}$$

En éliminant V_{n-1} entre cette équation et l'équation différentielle des polynomes V_{n-1}

$$\boxed{(x^2-4)V''_{n-1} + 3xV'_{n-1} - (n^2-1)V_{n-1} = 0}, \tag{13}$$

on obtient l'équation différentielle

$$(x^2-4)U'''_n + 3xU''_n - (n^2-1)U'_n = 0,$$

qui peut s'écrire

$$[(x^2-4)U''_n + xU'_n - n^2U_n]' = 0.$$

On a par suite

$$(x^2-4)U''_n + xU'_n - n^2U_n = C,$$

et en remplaçant x par zéro et en utilisant la formule (10), on démontre

(1) *A. Angelescu*, Thèse, p. 11,

que $C = 0$, et par suite l'équation différentielle des polynomes U_n est

$$\boxed{(x^2-4)U''_n + xU'_n - n^2U_n = 0}. \tag{14}$$

Cette équation a *l'intégrale première*

$$(x^2-4)U'^2_n - n^2U_n = k, \tag{15}$$

qu'on obtient en multipliant les deux membres de l'équation (14) par $2U'_n$ et en intégrant.

En remplaçant dans l'équation (15) x par zéro, on trouve pour la constante k la valeur $-4n^2$, et par suite nons avons

$$(x^2-4)U'^2_n = n^2(U^2-4). \tag{15′}$$

Il suffit maintenant de remplaçer dans cette formule $\frac{U'_n}{n}$ par V_{n-1}, pour retrouver la formule (6).

La formule (6) résulte donc du fait que l'équation différentielle (14) des polynomes U_n, admet une intégrale première.

4. Nous allons signaler maintenant les relations suivantes entre les polynomes U_n et V_n

$$U_{2n} + 2 = U_n^2, \tag{16}$$

$$U_{2n} - 2 = (x^2-4)V^2_{n-1}, \tag{17}$$

$$U_{2n+1} + 2 = (x+2)(V_n - V_{n-1})^2, \tag{18}$$

$$U_{2n+1} - 2 = (x-2)(V_n + V_{n-1})^2, \tag{19}$$

$$V_{2n-1} = U_n V_{n-1}, \tag{20}$$

$$V_{2n} = V_n^2 - V^2_{n-1}. \tag{21}$$

Les formules (20) et (21) sont des conséquences des formules (16), (17), (18), (19) et de la formule (6).

On peut vérifier immédiatement les formules (16), (17), (18) et (19) à l'aide des formules (7), (8) et (9).

Mais on peut aussi leur donner une autre démonstration en utilisant l'intégrale première de l'équation différentielle (14) qui nous a fourni la formule (6).

5. Démontrons par exemple la formule (16).

En posant

$$Y(x) = U_{2n}(x) + 2, \quad Z(x) = U_n^2(x),$$

on vérifie d'abord à l'aide de la formule (10), que

$$Y(0) = Z(0) \quad \text{et} \quad Y'(0) = Z'(0).$$

Ensuite, puisque $U_{2n}(x)$ satisfait à l'équation différentielle (14) où l'on remplaçe n par $2n$, $Y(x)$ sera une intégrale de l'équation

$$F(Y) = (x^2-4)Y'' + xY' - 4x^2Y = -8n^2. \tag{22}$$

Pour démontrer que $Y = Z$, il suffira de prouver que Z est également une intégrale de cette équation.

Il est facile de voir que

$$F(Z) = 2U_n[(x^2-4)U_n'' + xU_n'] + 2(x^2-4)U_n'^2 - 4n^2U_n,$$

et en remplaçant la première paranthèse par n^2U_n, d'après l'équation (14), nous aurons

$$F(Z) = 2[(x^2-4)U_n'^2 - n^2U_n^2].$$

Tenant compte maintenant de l'intégrale première (15') de l'équation différentielle (14), il résultera que

$$F(Z) = -8n^2,$$

ce qui prouve que Z est une intégrale de l'équation différentielle (22).

6. Démontrons aussi la relation (17).

En posant

$$Y_1(x) = U_{2n}(x) - 2, \qquad Z_1(x) = (x^2-4)V_{n-1}^2(x),$$

on démontre à l'aide des formules (10) et (11), que

$$Y_1(0) = Z_1(0) \quad \text{et} \quad Y_1'(0) = Z_1'(0).$$

U_n étant une intégrale de l'équation différentielle (14), il résulte que $Y_1(x)$ sera une intégrale de l'équation

$$F_1(Y_1) = (x^2-4)Y_1'' + xY_1' - 4n^2Y_1 = 8n^2. \tag{23}$$

Pour démontrer que $Y_1 = Z_1$, il suffira de prouver que Z_1 est une intégrale de l'équation différentielle (23).

En formant $F_1(Z_1)$ et en tenant compte que V_{n-1} est une intégrale de l'équation différentielle (13), on trouve

$$F_1(Z_1) = \{(x^2-4)^2V_{n-1}'^2 + 2x(x^2-4)V_{n-1}V_{n-1}' + [x^2-(x^2-4)n^2]V_{n-1}^2\}.$$

Mais si dans l'équation différentielle (14), on remplace U_n' par nV_{n-1} et U_n'' par nV_{n-1}', on obtient

$$(x^2-4)V_{n-1}' + xV_{n-1} = nU_n,$$

et si on élimine U_n entre cette équation et la formule (6), on trouve

$$(x^2-4)V_{n-1}'^2 + 2x(x^2-4)V_{n-1}V_{n-1}' + [x^2-(x^2-4)n^2]V_{n-1}^2 = 4n^2$$

et par suite

$$F_1(Z_1) = 8n^2$$

ce qui prouve que Z_1 est aussi une intégrale de l'équation différentielle (23).

Remarque. Cette démonstration nous conduit à l'intégrale première

$$(x^2-4)^2y'^2 + 2x(x^2-4)yy' + [x^2-(x^2-4)n^2]y^2 = C,$$

de l'équation différentielle (13)

$$(x^2-4)y'' + 3xy' - (n^2-1)y = 0,$$

des polynomes V_{n-1}.

7. Pour démontrer les formules (18) et (19), en suivant une méthode analogue à celle développée dans les n^{os} 5 et 6, on démontre d'abord que les polynomes

$$T_n = V_n + V_{n-1}, \qquad W_n = V_n - V_{n-1}. \tag{24}$$

sont des intégrales des équations différentielles

$$(x^2-4)T_n'' + 2(x+1)T_n' - n(n+1)T_n = 0, \tag{25}$$

$$(x^2-4)W_n'' + 2(x-1)W_n' - n(n+1)W_n = 0. \tag{26}$$

Ensuite, en posant

$$Y_2(x) = U_{2n+1}(x) - 2, \qquad Z_2(x) = (x-2)T_n^2(x),$$

on remarque que

$$Y_2(0) = Z_2(0) \quad \text{et} \quad Y_2'(0) = Z_2'(0).$$

U_n étant une intégrale de l'équation différentielle (14), il résulte que $Y_2(x)$ sera une intégrale de l'équation

$$F_2(Y_2) = (x^2-4)Y_2'' + xY_2' - (2n+1)^2Y = 2(2n+1)^2. \tag{27}$$

Pour démontrer que $Y_2 = Z_2$, il suffira de prouver que Z_2 est aussi une intégrale de l'équation différentielle (27). En formant $F_2(Z_2)$ et en tenant compte de l'équation différentielle (25), on trouve

$$F_2(Z_2) = 2\{(x^2-4)(x-2)T_n'^2 + (x^2-4)T_nT_n' + [(2n^2+2n+1) - n(n+1)x]T_n^2\}.$$

Mais l'équation différentielle (25)

$$(x^2-4)y'' + 2(x+1)y' - n(n+1)y = 0,$$

admet l'intégrale première

$$(x^2-4)(x-2)y'^2 + (x^2-4)yy' + [(2n^2+2n+1) - n(n+1)x]y^2 = C,$$

qui pour l'intégrale $y = T_n$, donne la formule

$$(x^2-4)(x-2)T_n'^2 + (x^2-4)T_nT_n' + [(2n^2+2n+1) - n(n+1)x]T_n^2 = (2n+1)^2.$$

Il résulte que

$$F_2(Z_2) = 2(2n+1)^2,$$

ce qui prouve que Z_2 est une intégrale de l'équation différentielle (27). La formule (19) est ainsi démontrée.

On démontre de la même manière la formule (18), ou bien on remarque que le changement de x en $-x$, remplace la formule (19) par la formule (18).

8. Si dans les formules (6), (16), (17), (18), (19), (20) et (21), on remplace U_n et V_n par les formules (10) et (11) et si on identifie les coefficients de x^p des deux membres, on obtient des identités intéressantes en n qui doivent être valables quel que soit l'entier n. Comme ces identités sont des polynomes de degré q, il résulte que nous pouvons remplacer l'entier n par une variable quelconque x.

Par exemple en partant de la formule (20), on est conduit à l'identité

$$\boxed{\begin{aligned}
&(x-q-1)(x-q-2)\dots(x-2q)\\
&\quad+C_q^1 x(x-q)(x-q-1)\dots(x-2q+2)\\
&\qquad+C_q^2 x(x-3)(x-q+1)(x-q)\dots(x-2q+4)\\
&\qquad\quad+\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad+C_q^{q-2}(x-q+1)(x-q)\dots(x-2q+5)(x-3)(x-4)\\
&\qquad\qquad\quad+C_q^{q-1} x(x-q)(x-q-1)\dots(x-2q+3)(x-2)\\
&\qquad\qquad\qquad+C_q^q x(x-q-1)(x-q-2)\dots(x-2q+1)\\
&=(2x-q-1)(2x-q-2)\dots(2x-2q)
\end{aligned}}$$

En faisant par exemple $q=2, 3, 4$, on obtient

$$(x-3)(x-4)+C_2^1 x(x-2)+C_2^2 x(x-3)=(2x-3)(2x-4)$$

$$\begin{aligned}
(x-4)(x-5)(x-6)&+C_3^1 x(x-3)(x-4)+C_3^2 x(x-3)(x-2)\\
&+C_3^3 x(x-4)(x-5)=(2x-4)(2x-5)(2x-6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)&+C_4^1 x(x-4)(x-5)(x-6)+C_4^2 x(x-3)(x-3)(x-4)\\
&+C_4^3 x(x-4)(x-5)(x-2)+C_4^4 x(x-5)(x-6)(x-7)\\
&=(2x-5)(2x-6)(2x-7)(2x-8).
\end{aligned}$$