

KÜLÖNLENYOMAT

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
III. (MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI) OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEIBŐL

IV. KÖTET

3. SZÁM

TIBERIU POPOVICIU
FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK KÖZÉPÉRTÉKTÉTELEIRŐL



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1954.

FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK KÖZÉPÉRTÉKTÉTELEIRŐL

TIBERIU POPOVICIU

Előadta az 1954. június 18-án tartott nyilvános osztályülésein

1. Valamely $f(x)$ függvény osztott differenciái a következő rekurziós képlettel értelmezhetők:

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \frac{[x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; f] - [x_1, x_2, \dots, x_n; f]}{x_{n+1} - x_1},$$

$$[x_1; f] = f(x_1).$$

Ekkor

$$(1) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f]$$

n -edrendű osztott differencia és az $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ pontok ennek *csomópontjai*. Ebben a definícióban az osztópontokat különbözőeknek tételezzük fel s felteesszük, hogy növekvően vannak elrendezve:

$$(2) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}.$$

A különböző csomópontok esetéből kiindulva, határátmenetekkel és az $f(x)$ függvény egymás utáni deriváltjainak bevezetésével át lehet térni a részben egybeeső csomópontok esetére. Ebben az értelemben például az $[x, x, \dots, x; f]$ n -edrendű osztott differencia $\frac{1}{n!} f^{(n)}(x)$ -szel egyenlő, ahol $f^{(n)}(x)$ az $f(x)$ függvény n -edik deriváltja. Az osztott differenciák tehát a deriváltak általánosításainak tekinthetők.

Stieltjes óta tudjuk viszont, hogy ha $f(x)$ n -edik deriváltja az x_0 helyen folytonos, akkor az (1) osztott differencia $\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$ -hoz tart, mikor $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \rightarrow x_0$.

Ha $f^{(n)}(x)$ létezik a csomópontokat tartalmazó legkisebb intervallumban, akkor

$$(3) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

ahol $\xi \in (x_1, x_{n+1})$; ez az $n = 1$ esetnek megfelelő klasszikus Lagrange-féle képletnek általánosítása.

A következőkben a (3) képletnek mutatjuk be néhány általánosítását.

2. Az osztott differenciák elmélete egy sereg teljesen elemi jellegű képletet tartalmaz, amelyek határátmenettel a függvény és deriváltjai között különféle kapcsolatokat szolgáltatnak. Ezek közül a továbbiakban egyet fogunk felhasználni.

Legyen

$$(4) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_m \quad (m \geq n+1)$$

m különböző pontból álló sorozat és vezessük be a

$$(5) \quad D_i^j[f] = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}; f] \\ (i = 1, 2, \dots, m-j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1)$$

jelölést. Ekkor $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1} = m$ esetén

$$(6) \quad [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}; f] = \sum_{i=1}^{m-n} A_i D_i^n[f],$$

ahol az A_i együtthatók nem függnek az $f(x)$ függvényről és

$$\sum_{i=1}^{m-n} A_i = 1, \quad A_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m-n).$$

A (6) képlet mutatja, hogy a (4) pontok közül választott bármely $n+1$ csomópontra vonatkozó osztott differencia a (4) sorozat $n+1$ egymás utáni pontjára vonatkozó osztott differenciáknak súlyozott számtani középértéke. Ez a középértéktétel szolgál a következő tételek alapjául.

3. Kimutatható mindenekelőtt a (3) képlet következő általánosítása:

1. TÉTEL. Ha az $f(x)$ függvény folytonos egy a (2) csomópontokat tartalmazó intervallumban, akkor található oly $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ hely, hogy ξ minden környezetében van $n+1$ különböző és ξ által kettéválasztott $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1}$ pont, melyekre az

$$[x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1}; f] = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f]$$

egyenlőség teljesül.

Az x'_i pontokról akkor mondjuk, hogy a ξ hely kettéválasztja őket, ha ξ az x'_i pontokat tartalmazó legkisebb intervallumnak belsejébe esik.

Az 1. tétellel kapcsolatban a következő megjegyzést tehetjük.

Ha a (2) csomópontok ekvidisztánsok:

$$x_i = c + (i-1)h \quad (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

akkor

$$[c, c+h, \dots, c+nh; f] = \frac{1}{n! h^n} \mathcal{A}_n^h f(c),$$

ahol

$$\mathcal{A}_n^h f(c) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(c+ih).$$

Kimutatható, hogy ha $f(x)$ folytonos egy a (2) csomópontokat tartalmazó intervallumban, akkor találhatók ebben az intervallumban olyan $c, \dots, c+nh$ pontok, hogy

$$(7) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \frac{1}{n! h^n} \mathcal{A}_n^h f(c).$$

Innen adódik Sz. N. Bernstein és D. Rajkov következő tételének állítása:

Ha $f(x)$ folytonos egy a (2) csomópontokat tartalmazó intervallumban, akkor található egy $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ pont úgy, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz tartozzék legalább egy c s egy $h \neq 0$, $\xi - \varepsilon < c < \xi < c + nh < \xi + \varepsilon$, melyekre (7) teljesül.

4. A (3) képletnek azonban még általánosabb kiterjesztése is adható. Ez az osztott differencia fogalmának megfelelő kiterjesztésén alapszik.

Tekintsük a (4) pontokat, ha m elég nagy, és használjuk az (5) jelöléseket. Képezzük nemnegatív egész k mellett az

$$U_{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}}^{n, k}[f] = \| D_{i_j}^k[x^k] D_{i_j}^k[x^{k+1}] \dots D_{i_j}^k[x^{k+n-1}] D_{i_j}^k[f] \| \quad (j = 1, 2, \dots, n+1)$$

$(n+1)$ -edrendű determinánst.

Ekkor

$$(8) \quad V_{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}}^{n, k} = U_{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}}^{n, k} [x^{k+n}]$$

a Vandermonde-féle determináns általánosítása,

$$(9) \quad D_{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}}^{n, k}[f] = U_{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}}^{n, k}[f] / V_{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}}^{n, k}$$

pedig az ismételt osztott differenciák egy fajtája.

A (9) kifejezésnek természetesen csak akkor van értelme, ha a (8) determináns zérustól különböző. Ehhez szükséges, hogy az i_j indexek mind különbözők legyenek, amikor is feltehető, hogy

$$1 = i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1} = m-k.$$

Ekkor kimutatható, hogy

$$U_{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}}^{n, k}[f] = \sum_{i=1}^{m-k-n} B_i D_i^{n+k}[f],$$

ahol a B_i együtthatók nem függnek az $f(x)$ függvényről és pozitívak. Ebből adódik, hogy

$$V_{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}}^{n, k} = \sum_{i=1}^{m-k-n} B_i > 0.$$

Innen következik, hogy a (9) ismételt osztott differencia a

$$D_i^{n+k}[f] \quad (i = 1, 2, \dots, m-k-n)$$

osztott differenciák számtani középértéke.

5. Megfordítva is kimutatható azonban, hogy legalább is abban az esetben, mikor a (4) csomópontok ekvidisztánsok, a (4) pontok közül választott csomópontokra vonatkozó bármely $(n+k)$ -adrendű osztott differencia ismételt osztott differenciáknak számtani középértéke. Innen adódik végül a következő általános tétel:

2. TÉTEL. Ha $f(x)$ folytonos egy a (2) csomópontokat tartalmazó intervallumban és ha k n -nél nem nagyobb természetes szám, akkor találhatók olyan $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-k} \in (x_1, x_{n+1})$, $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n-k}$ pontok, hogy ezeknek minden környezet-rendszerében van $(n-k+1)(k+1)$ számú

$$(10) \quad x'_1 < x'_2 < \dots < x'_{(n-k+1)(k+1)}$$

pont, az

$$x'_{j(k+1)+1}, x'_{j(k+1)+2}, \dots, x'_{(j+1)(k+1)}$$

pontokat a ξ_j hely kettéválasztja ($j = 0, 1, \dots, n-k$), továbbá

$$D_{1, (k+1)+1, 2(k+1)+1, \dots, (n-k)(k+1)+1}^{n-k, k}[f] = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f],$$

ahol az ismételt osztott differencia a (10) pontsorozatra vonatkozik.

A 2. tételből következik speciálisan, hogy ha $f(x)$ folytonos egy a (2) csomópontokat tartalmazó intervallumban és ha az $f^{(k)}(x)$ derivált létezik (x_1, x_{n+1}) -ben, akkor található ebben az intervallumban $n-k+1$ számú különböző $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-k}$ pont úgy, hogy

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \frac{1}{n(n-1) \dots (n-k+1)} [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-k}; f^{(k)}].$$

6. A felsorolt középertéktételeknek az ad fontosságot, hogy ezek lehetővé tesznek bizonyos, az analízis néhány közelítő képletének, éspedig interpolációs, továbbá numerikus deriválási és integrálási képleteknek maradéktagjával kapcsolatos vizsgálatokat. Az ilyen képletek maradéktagja mindig

$$A[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}; f] + B[\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{n+1}; f]$$

alakú, ahol egyrészt a ξ_i , másrészt a ξ'_i csomópontok különbözők és az A, B együtthatók nem függnak az $f(x)$ függvénytől. Bizonyos speciális esetekben ezenkívül az A és B együtthatók egyike eltűnik; ezekkel az esetekkel már előzőleg foglalkoztam.

TARTALOMJEGYZÉK

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

<i>Hajós György</i> : Beszámoló az Osztály munkájáról és feladatairól	Olda 303
<i>Kovács István és Kalmár László</i> hozzászólásai	309
<i>Alexits György</i> válasza	315
<i>Gombás Pál</i> : A statisztikus atommodell és a hullámmechanika közti kapcsolat	317
<i>Hoffmann Tibor, Fényes Imre és Kalmár László</i> hozzászólásai	323
<i>Gombás Pál</i> válasza	326
<i>Szalay Sándor</i> : Vizsgálatok nagy atomsúlyú kationok adszorpciójára humusz kolloidokon	327
<i>Szádeczky-Kardos Elemér</i> hozzászólása	340
<i>L. Csakalov</i> : Az algebrai egyenletek elméletében fellépő két faktorsorozatról	343
<i>Tiberiu Popoviciu</i> : Polytonos függvények középértéktételeiről	353
<i>Turán Pál</i> : A Riemann-féle zetafüggvény gyökeiről	357
<i>Rényi Alfréd</i> : A valószínűségszámítás új axiomatikus felépítése	369
<i>Császár Ákos</i> hozzászólása	427
<i>Vincze István</i> : A tömeggyártás minőségellenőrzésének matematikai statisztikai mód- szereiről	429
<i>Sarkadi Károly és Tallián Tibor</i> hozzászólásai	442