

КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧЕТЫРЬМЯ И ПЯТЬЮ ПЕРЕМЕННЫМИ

ЛАСКУ БАЛ

Клуж

1. Для приближённого решения уравнений с помощью номограмм не является общим методом, который применяется ко всякому уравнению. Различаются разные типы уравнений, для которых можно построить номограммы. Эти виды уравнений называются *каноническими формами*. Номографу важно знать насколько возможно больше канонических форм и соответствующих номограмм, чтобы мог ответить вовремя на вопросы, поставленные ему.

При получении канонических форм для уравнений, имеющих больше трёх переменных, М. ДОКАНЬ представляет движение одной или нескольких подвижных плоскостей на неподвижной плоскости, плоскости, которые предусмотрены помеченными геометрическими элементами. В уточнении положений этих плоскостей относительно неподвижной плоскости, появляются некоторые соотношения между помеченными элементами.

Удаление вспомогательных переменных приведёт к каноническим формам, а соответствующие геометрические изображения — к номограммам этих форм.

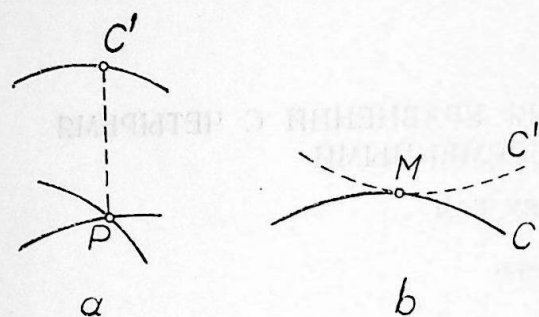
Самыми простыми и точными являются те номограммы, которые получаются при использовании единственной подвижной плоскости, так называемого *транспаранта*.

Поскольку подвижная плоскость имеет три степени свободы, некоторая связь между этими плоскостями уменьшает число степеней свободы.

Эта связь называется *контактом*, и она может быть: *контакт пересечения*, *тангенциальный контакт* и др. В контакте пересечения точка одной плоскости совмещается с линией второй плоскости, или одной точкой второй плоскости.

В тангенциальном контакте одна линия одной плоскости является касательной одной линии второй плоскости (черт. 1, а, б.).

Контакт, в котором число степеней свободы уменьшается на единицу, называется *простым контактом*, а контакт, в котором число степеней свободы уменьшается на две единицы, называется *двойным контактом*. Контакт, между некоторой линией одной плоскости и некоторой точкой другой, является простым контактом, а контакт между двумя точками — двойным.



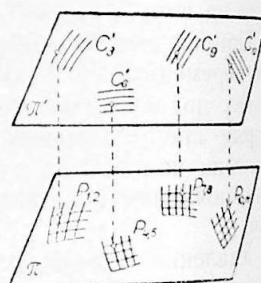
Черт. 1

Три простых контакта определяют положение подвижной плоскости на неподвижной плоскости, и они называются *контактами положения*, другие же контактами *решения*. В случае единственного контакта решения самая общая номограмма дана формулой структуры

$$P_{1,2} \cap C_3; P_{4,5} \cap C_6; P_{7,8} \cap C_9; P_{10,11} \rightarrow C_{12}.$$

Эта формула структуры даёт нам номограмму (черт. 2), решающую уравнение с двенадцати переменными.

В настоящей работе занимаемся тем случаем, когда одна прямая линия подвижной плоскости параллельна с прямой линией неподвижной плоскости, а геометрические элементы, вступающие в связь друг с другом, являются помеченными или непомеченными. В таком случае подвижная плоскость называется *ориентированным транспарантом*. Одновременно, ограничиваемся номограммами для уравнений с четырьмя и пятью переменными.



Черт. 2

2. Упорядочивая контакты пересечения по числу помеченных элементов, получим следующую таблицу:

3. Группируя во всех возможных случаях четыре простых контакта, один двойной контакт и два простых таким образом, чтобы один из простых контактов был параллельностью, и число помеченных элементов равнялось четырём, тогда найдём все типы номограмм, формулы структуры и канонические формы которые даны в следующей таблице:

гр
од

Пор. п.	Структурные формулы	Тип контакта	Черт	Обозначение контакта
1	$P_{1,2} \mid \equiv P_{3,4}$	Двойной контакт с четырьмя помеченными элементами		IV
2	$P_{1,2} \mid \equiv P_3$	Двойной контакт с тремя помеченными элементами		III
3	$P_{1,2} \mid \equiv P_0$	Двойной контакт с двумя помеченными элементами		II
4	$P_1 \mid \equiv P_2$	Двойной контакт с двумя помеченными элементами		II'
5	$P_1 \mid \equiv P_0$	Двойной контакт с одним помеченным элементом		I
6	$P_{1,2} \mid \equiv C_3$	Простой контакт с тремя помеченными элементами		3
7	$P_{1,2} \mid \equiv C_0$	Простой контакт с двумя помеченными элементами		2
8	$P_1 \mid \equiv C_2$	Простой контакт с двумя помеченными элементами		2'
9	$P_1 \mid \equiv C_0$	Простой контакт с одним помеченным элементом		1
10	$P_0 \mid \equiv C_1$	Простой контакт с одним помеченным элементом		1'
11	$P_0 \mid \equiv P_0$ $D_0 \mid \equiv D_0$	Двойной контакт с непомеченными элементами		0
12	$P_0 \mid \equiv C_0$	Простой контакт с непомеченными элементами		0'

... уменьшаются на единицу,

Пор. п	Группировка контактов	Каноническая форма
1	IV, 0, P	$F(f_{34} - f_{12}, g_{34} - g_{12}) = 0$
2	III, 1, P	$F(f_3 - f_{12} + f_4, g_3 - g_{12} + g_4) = 0$
3	III, 1, P	$z_4 = F(f_{12} - f_3, g_{12} - g_3)$
4	3, 1, 0, P	$z_1 = F(f_{12} + f_3, g_{12} + g_3)$
5	3, 1, 0, P	$z_4 = F(f_{12} + f_3, g_{12} + g_3)$
6	2, 2, 0, P	$F_{12} = G_{34}$
7	2, 2, 0, P	$F_{12} = G_{34}$
8	2, 2, 0, P	$F_{12} = G_{34}$
9	1, 1, 2, P	$F(f_{12} + f_{34}, g_{12} + g_{34}) = 0$
10	2, 1, 1, P	$F(f_{12} + f_{34}, g_{12} + g_{34}) = 0$
11	2, 1, 1, P	$F(f_{12} + f_{34}, g_{12} + g_{34}) = 0$
12	2, 1, 1, P	$z_4 = F(f_1 + f_{23}, g_1 + g_{23})$
13	2, 1, 1, P	$z_4 = F(f_1 + f_{23}, g_1 + g_{23})$
14	II, 2, P	$z_4 = F(f_1 + f_{23}, g_1 + g_{23})$
15	II, 2, P	$z_4 = F(f_1 + f_2 - f_3, g_1 + g_2 - g_3)$
16	II, 2, P	$z_4 = F(f_{12} + f_3, g_{12} + g_3)$
17	II, 2, P	$F(f_{12} + f_{34}, g_{12} + g_{34}) = 0$
18	I, 3, P	$z_4 = F(f_{12} - f_3, g_{12} - g_3)$

Эти номограммы решают следующие канонические формы:

- (1) $F(f_{12} + f_{34}, g_{12} + g_{34}) = 0$
- (2) $F(f_{12} + f_3, g_{12} + g_3, z_4) = 0$
- (3) $F(f_1 + f_2 - f_3, g_1 + g_2 - g_3, z_4) = 0$
- (4) $F_{12} = G_{34}$
- (5) $F(f_1 + f_2 - f_{34}, g_1 + g_2 - g_{34}) = 0$

и другие частные случаи этих формул.

Среди этих номограмм, как простейшие случаи, появляются номограммы с параллельным индексом, шестиугольная номограмма, номограмма ромбоидальная и некоторые составные номограммы.

Ставится задача: установить *необходимые и достаточные условия* для того, чтобы некоторые уравнения с четырьмя переменными

$$F(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$$

принадлежало одному из вышеуказанных типов канонических форм.

Для формы (4) имеем условия Гурса, а для формы (2) особый случай $g_3 = 0$ был изучен недавно [2] и [3].

Эти же пять вышеуказанных форм решаются по одной группе различных номограмм, и, кроме того, по их составу и пользованию. Таким образом форма (1) решается пятью номограммами, форма (2) во семью номограммами, форма (4) тремя номограммами и последние две 3 и 5 по одной, различным номограммам.

4. В случае уравнений с пятью переменными, группируются четыре простых контакта, или два простых и один двойной таким же образом, чтобы число помеченных элементов было пять. Получаются канонические формы и номограммы с транспарантом для уравнений с пятью переменными:

Пор. н.	Группировка контактов	Каноническая форма
1	IV, 1, P.	$z_5 = F(f_{34} - f_{12}, g_{34} - g_{12})$
2	IV, 1', P.	$F(f_5 + f_{12} - f_{34}, g_5 + g_{34} - g_{12}) = 0$
3	III, 2', P.	$F(f_1 - f_{23} + f_{45}, g_1 - g_{23} + g_{45}) = 0$
4	III, 2, P.	$z_5 = F(f_1 + f_2 - f_{34}, g_1 + g_2 - g_{34})$
5	II, 3, P.	$z_5' = F(f_1 - f_2 + f_{34}, g_1 - g_2 + g_{34})$
6	II, 3, P.	$z_5 = F(f_{12} - f_{34}, g_{12} - g_{34})$
7	3, 1, 1, P.	$z_5 = F(f_{12} + f_{34}, g_{12} + g_{34})$
8	3, 1, 1', P.	$z_5 = F(f_{12} + f_{34}, g_{12} + g_{34})$
9	3, 1', 1', P.	$z_5 = F(f_{12} + f_{34}, g_{12} + g_{34})$

Имеются и другие группировки контактов, которым же не соответствуют другие канонические формы.

Оттуда имеются последующие канонические формы для уравнений с пятью переменными.

$$(6) \quad z_5 = F(f_{12} + f_{34}, g_{12} + g_{34})$$

$$(7) \quad F(f_1 + f_{23} + f_{45}, g_1 + g_{23} + g_{34}) = 0$$

$$(8) \quad F(f_1 + f_2 + f_{34}, g_1 + g_2 + g_{34}) = z_5$$

Для многих технических формул с четырьмя и пятью переменными можно построить такие номограммы. Например, в гидрологии применяется формула Шамова.

$$g = 0,95 \sqrt{d} \left(\frac{v}{v_0} \right)^3 (v - v_0) \left(\frac{d}{H} \right)^{1/4}$$

Если обозначим так

$$f_5 = 2 \log g; f_{12} = \log \frac{v^6(v - v_0)^2}{v_0^6}$$

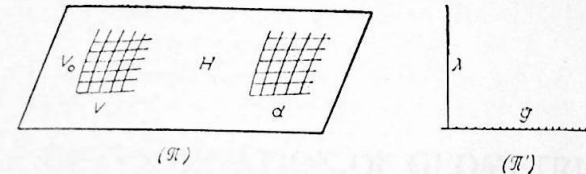
$$f_{34} = \log \frac{H^{1/2}}{0,95^2 d^{3/2}}$$

уравнение примет вид,

$$f_5 = f_{12} - f_{34}$$

включающиеся в канонической форме и решается при помощи номограммы, схема которой даётся в черт. 3 и имеет структурную формулу

$$P_{1,2} | \rightarrow D'_1; P_{3,4} | \rightarrow D'_5$$



Черт. 3

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bal L. și Rado F., *Leccióni de nomografie*, Ed. tehnică. București, 1956.
- [2] Rado F., Bal L., Gergely E. și Ionescu Gh., *Lucrările consfătuirii de geometrie diferențială*, din 9-12 iunie 1955, Acad. R.P.R. Baza Timișoara, 361-366 (1955).
- [3] Belgrano T. C., *Tratado de nomografia*, Inst. tecnico de la construction y del cemento, Madrid 1953.
- [4] Хованский Г. С., *Номограммы с ориентированным транспарантом*, ГИТТЛ, Москва, 1957 г.

Поступило 20.XI.1959