

et alimentent aujourd'hui de nombreuses revues de spécialité, qui sont éditées par l'Académie de la République Populaire Roumaine ou bien par les soins des Facultés de mathématique et physique des différents instituts d'enseignement supérieur et sous l'égide de la Société des Sciences Mathématiques et Physiques de la République Populaire Roumaine. Nous rappelons à cet égard „Studii și cercetări matematice”, „Buletinul științific”, „Comunicările Academiei Republicii Populare Române”, „Buletinul matematic”, „Revue de mathématiques pures et appliquées”, „Analele Universității C.I. Parhon” qui paraissent à Bucarest — „Studii și cercetări de matematică”, „Buletinul Universității Babeș-Bolyai”, „Lucrări științifice” qui paraissent à Cluj — „Studii și cercetări științifice”, „Buletinul Institutului Politehnic din Iași”, „Analele științifice ale Universității Al. I. Cuza” qui paraissent à Iași et „Buletinul științific și Tehnic al Institutului Politehnic” de Timișoara. Parmi ces publications, quelques unes contiennent seulement des travaux mathématiques, les autres contiennent au contraire, à côté des travaux mathématiques, des travaux ayant trait à d'autres domaines de la science.

La parution de ces périodiques a ménagé de larges possibilités de collaboration entre les mathématiciens roumains et les mathématiciens des autres pays. La revue MATHEMATICA publiera des travaux se reportant à tous les domaines de recherche mathématique. Elle contribuera à la diffusion, — au delà des frontières de notre pays, — des résultats obtenus par les mathématiciens roumains, en analyse, algèbre, calcul numérique, géométrie, topologie, et autres branches des mathématiques. „MATHEMATICA” offrira de la sorte la possibilité d'une collaboration des mathématiciens roumains et des mathématiciens des autres pays. Nous estimons cette collaboration dans le domaine de la science particulièrement précieuse, attendu qu'elle peut contribuer réellement au renforcement des efforts entrepris de nos jours par les mathématiciens du monde entier en vue du développement de toutes les branches de la science.

La collaboration des mathématiciens, en vue d'aborder les problèmes actuels des mathématiques, peut contribuer au perfectionnement de l'instrument mathématique que la science exige aujourd'hui.

La nouvelle série de la revue MATHEMATICA paraîtra en volumes annuels composés de deux fascicules chacun.

Le présent fascicule est le premier du premier volume (le 24-ème de la collection). Nous annonçons à nos futurs collaborateurs, que les mémoires destinés à être publiés dans MATHEMATICA doivent être rédigés au choix de l'auteur, dans une des langues suivantes : roumain, russe, français, anglais, allemand, italien.

Le rédacteur responsable

TIBERIU POPOVICIU

SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

par

D. V. IONESCU

à Cluj

En analysant un mémoire de H. LÖWNER [1] sur les fonctions de matrices. T. POPOVICIU a attiré l'attention sur l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad \Delta_{n,h}[f(x)] = \begin{vmatrix} f(x) & f(x+h) & \dots & f(x+nh) \\ f(x+h) & f(x+2h) & \dots & f(x+(n+1)h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x+nh) & f(x+(n+1)h) & \dots & f(x+2nh) \end{vmatrix} = 0$$

pour laquelle on cherche des solutions $f(x)$ réelles et continues quel que soit x , et telles que l'équation fonctionnelle soit vérifiée quels que soient x et h , réels.

L'intégration de l'équation fonctionnelle (1) présente des difficultés assez grandes pour n quelconque. Nous avons pu surmonter ces difficultés dans le cas $n = 2$ et dans ce travail nous donnons la solution de ce cas particulier.

§ 1. Le cas $n = 1$

1. Il est évident que la fonction identiquement nulle est une solution de l'équation fonctionnelle (1). Écartant cette solution banale, nous allons considérer l'équation (1), correspondant à $n = 1$

$$(2) \quad \Delta_{1,h}[f(x)] = \begin{vmatrix} f(x) & f(x+h) \\ f(x+h) & f(x+2h) \end{vmatrix} = 0$$

Remarquons que si la solution $f(x)$ de l'équation fonctionnelle (2) a un zéro x_0 elle se réduit à la solution banale.

En effet, l'équation fonctionnelle (2) donne pour $x = x_0$

$$f(x_0 + h) = 0.$$

quel que soit h , et par suite $f(x) \equiv 0$.

Il résulte alors qu'une solution de l'équation fonctionnelle (2) qui n'est pas banale ne s'annule pas et garde son signe quel que soit x .

En posant

$$x = ph, \quad f(ph) = f_p.$$

où h est un nombre fixe, et p un entier quelconque, l'équation fonctionnelle devient

$$(3) \quad \begin{vmatrix} f_p & f_{p+1} \\ f_{p+1} & f_{p+2} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(3') \quad f_p f_{p+2} = f_{p+1}^2$$

Il résulte alors que

$$g_p = \log |f_p|$$

vérifie l'équation de récurrence

$$g_{p+2} - 2g_{p+1} + g_p = 0,$$

dont la solution est

$$g_p = g_0 + (g_1 - g_0)p.$$

L'équation (3) a donc pour solution

$$(4) \quad \log |f_p| = \log |f_0| + p \log \left| \frac{f_1}{f_0} \right|$$

Déterminons cette solution telle que

$$(5) \quad f(0) = f_0, f(h) = f_1$$

où f_0 et f_1 sont des nombres donnés.

En posant

$$(6) \quad \begin{aligned} C_1 &= f_0 \\ C_1 e^{\alpha_1 h} &= f_1 \end{aligned}$$

nous avons

$$\alpha_1 h = \log \frac{f_1}{f_0}$$

et l'équation (4) nous donne

$$(7) \quad f(ph) = C_1 e^{\alpha_1 p h}.$$

Cette formule est valable quel que soit l'entier p . Elle est vraie aussi lorsqu'on remplace p par un nombre rationnel r quelconque.

Reprenons en effet les considérations qui nous ont conduit à la formule (7), en partant de $h_1 = \frac{h}{s}$, où s est un nombre naturel quelconque. Nous aurons

$$(8) \quad f(ph_1) = C_1' e^{\alpha_1' p h_1}$$

quel que soit l'entier p .

On peut déterminer les constantes C_1' et α_1' par les conditions

$$f(0) = f_0, f(sh_1) = f(h) = f_1$$

Nous aurons les équations

$$C_1' = f_0$$

$$C_1' e^{\alpha_1' h} = f_1$$

qui coïncident avec les équations (6), d'où il résulte que

$$C_1' = C_1, \alpha_1' = \alpha_1.$$

et par suite la formule (8) devient

$$f\left(\frac{p}{s}h\right) = C_1 e^{\alpha_1 \frac{p}{s}h}.$$

ou

$$(9) \quad f(rh) = C_1 e^{\alpha_1 r h}.$$

r étant un nombre rationnel quelconque.

La fonction $f(x)$ étant continue quel que soit x , de l'équation (9) on déduit que la solution de l'équation fonctionnelle (2) non identiquement nulle, est

$$(10) \quad f(x) = C_1 e^{\alpha_1 x}.$$

où C_1 et α_1 sont des constantes qu'on peut déterminer par les conditions (5).

§ 2. Le cas $n = 2$. Considérations sur les zéros d'une solution $f(x)$.

2. En écartant la solution banale, nous remarquons que toute solution de l'équation fonctionnelle $\Delta_{1,h} [f(x)] = 0$, est aussi une solution de l'équation fonctionnelle $\Delta_{2,h} [f(x)] = 0$. Il suffit de vérifier que

$$\Delta_{2,h} [C_1 e^{\alpha_1 x}] = 0.$$

En écartant aussi ces solutions, nous chercherons des solutions de l'équation fonctionnelle

$$(11) \quad \Delta_{2,h}[f(x)] = \begin{vmatrix} f(x) & f(x+h) & f(x+2h) \\ f(x+h) & f(x+2h) & f(x+3h) \\ f(x+2h) & f(x+3h) & f(x+4h) \end{vmatrix} = 0,$$

qui ne sont pas des solutions de l'équation fonctionnelle $\Delta_{1,h}[f(x)] = 0$.

Il est indispensable pour l'intégration de l'équation fonctionnelle (11) de faire une analyse des zéros d'une solution continue de cette équation qui n'est pas identiquement nulle.

Soit x_0 un point où $f(x_0) \neq 0$. On peut alors entourer x_0 d'un intervalle (α, β) où $f(x) \neq 0$. Il peut se présenter plusieurs cas :

1° L'intervalle (α, β) est l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Alors nous avons $f(x) \neq 0$, quel que soit x .

2° L'intervalle (α, β) est l'intervalle $(\alpha, +\infty)$ et $f(\alpha) = 0$. Dans ce cas, la solution $f(x)$ ne peut pas avoir d'autres zéros $\alpha_0 < \alpha$.

Supposons le contraire, c'est à dire $f(\alpha_0) = 0$, avec $\alpha_0 < \alpha$. En choisissant dans l'équation fonctionnelle (11), $x = \alpha_0$ et $h = \alpha - \alpha_0$ nous avons

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & f(2\alpha - \alpha_0) \\ 0 & f(2\alpha - \alpha_0) & f(3\alpha - 2\alpha_0) \\ f(2\alpha - \alpha_0) & f(3\alpha - 2\alpha_0) & f(4\alpha - 3\alpha_0) \end{vmatrix} = 0,$$

d'où il résulte que $f(\alpha - \alpha_0) = 0$; $f(x)$ a donc un zéro $2\alpha - \alpha_0 > \alpha$, ce qui est impossible puisque dans l'intervalle $(\alpha, +\infty)$ nous avons $f(x) \neq 0$.

La solution $f(x)$ a donc dans ce cas un seul zéro α et nous avons $f(x) \neq 0$, pour $x \neq \alpha$.

3° L'intervalle (α, β) est fini; α et β sont deux zéros de la solution $f(x)$ que nous appellerons zéros consécutifs. Dans ce cas la solution $f(x)$ a une infinité de zéros $x_p = \alpha + ph$, où $h = \beta - \alpha$, et p est un entier quelconque.

En effet faisons $x = \alpha + ph$ dans l'équation fonctionnelle (11), où $h = \beta - \alpha$ et posons

$$f(\alpha + ph) = f_p$$

Nous aurons

$$(12) \quad \begin{vmatrix} f_p & f_{p+1} & f_{p+2} \\ f_{p+1} & f_{p+2} & f_{p+3} \\ f_{p+2} & f_{p+3} & f_{p+4} \end{vmatrix} = 0$$

En faisant $p = 0$, nous avons $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, et par suite $f_2 = 0$; ensuite en faisant $p = 1$, nous aurons $f_3 = 0$, ... et ainsi de suite.

De même en faisant $p = -3$, nous avons $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, et par suite $f_{-1} = 0$; ensuite en faisant $p = -4$, nous avons $f_{-2} = 0$, ... et ainsi de suite.

Il résulte donc que la solution $f(x)$ a une infinité de zéros $x_p = \alpha + ph$. Ce sont les seuls zéros de $f(x)$.

Pour l'intégration de l'équation fonctionnelle (11) nous avons besoin de quelques théorèmes auxiliaires.

3. THÉORÈME A. Si $f(x)$ est une solution de l'équation fonctionnelle (11) qui n'est pas solution de l'équation fonctionnelle (2), il existe un nombre h tel que $f(rh)$ et $F\left(\frac{h}{s}\right)$ soient différents de zéro pour tout nombre rationnel r et pour tout nombre naturel s , où

$$(13) \quad F(h) = \begin{vmatrix} f(0) & f(h) \\ f(h) & f(2h) \end{vmatrix}$$

Nous démontrerons ce théorème, en examinant successivement les cas où la solution $f(x)$ a une infinité de zéros, un seul zéro, ou n'a pas de zéro.

1° La solution $f(x)$ a une infinité de zéros. Les zéros étant $x_0 + ph$, où p est un entier quelconque, plaçons l'origine au point x_0 .

L'ensemble $\mathcal{M} = \{rh\}$ où r est un nombre rationnel quelconque, est dénombrable. L'ensemble complémentaire de l'ensemble $\mathcal{M}$ ne contient aucun zéro de la solution $f(x)$. Si h' est un élément de l'ensemble complémentaire et r' est un nombre rationnel quelconque non nul, $r'h'$ est aussi un élément de l'ensemble complémentaire, car dans le cas contraire on aurait $h'r' = rh$, ou $h' = r'h$ ce qui est impossible, h' n'appartenant pas à l'ensemble $\mathcal{M}$.

Le nombre h' étant ainsi choisi, nous avons $f(r'h') \neq 0$, quel que soit le nombre rationnel r' .

Nous pouvons ajouter que

$$F(r'h') = \begin{vmatrix} f(0) & f(r'h') \\ f(r'h') & f(2r'h') \end{vmatrix} = -f^2(r'h') \neq 0$$

et par suite $F\left(\frac{h'}{s}\right) \neq 0$ quel que soit le nombre naturel s .

Le théorème A est donc démontré dans ce cas.

2° La solution $f(x)$ a un seul zéro x_0 . En plaçant l'origine au point x_0 , et h' étant un nombre quelconque non nul, nous avons $f(r'h') \neq 0$ quel que soit le nombre rationnel r' .

Nous aurons comme plus haut $F(r'h') \neq 0$, ou $F\left(\frac{h'}{s}\right) \neq 0$ quel que soit le nombre naturel s .

Le théorème A est donc démontré dans ce cas.

3° La solution $f(x)$ n'a pas de zéros. Nous avons $f(x) \neq 0$ quel que soit x . Il reste à choisir le nombre h' tel que $F(r'h') \neq 0$ pour tout nombre rationnel r' . Faisons dans l'équation fonctionnelle (11) $x = ph$ et posons $f_p = f(ph)$.

Nous aurons

$$(14) \quad \begin{vmatrix} f_p & f_{p+1} & f_{p+2} \\ f_{p+1} & f_{p+2} & f_{p+3} \\ f_{p+2} & f_{p+3} & f_{p+4} \end{vmatrix} = 0.$$

On en déduit aisément les équations

$$(15) \quad \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} f_p & f_{p+1} \\ f_{p+1} & f_{p+2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} f_p & f_{p+1} \\ f_{p+2} & f_{p+3} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} f_p & f_{p+1} \\ f_{p+2} & f_{p+3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} f_p & f_{p+2} \\ f_{p+2} & f_{p+4} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

et

$$(16) \quad \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} f_{p+2} & f_{p+3} \\ f_{p+3} & f_{p+4} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} f_{p+1} & f_{p+2} \\ f_{p+3} & f_{p+4} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} f_{p+2} & f_{p+3} \\ f_{p+3} & f_{p+4} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} f_{p+1} & f_{p+2} \\ f_{p+2} & f_{p+4} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

quel que soit le nombre entier p .

Démontrons maintenant que si h_1 est un zéro non nul de $F(h)$, la fonction $F(h)$ a une infinité de zéros $h = ph_1$, où p est un entier quelconque.

Posons

$$f(ph_1) = \bar{f}_p$$

Ayant

$$(17) \quad \begin{vmatrix} \bar{f}_0 & \bar{f}_1 \\ \bar{f}_1 & \bar{f}_2 \end{vmatrix} = 0,$$

les équations (15) et (16) donnent pour $p = 0$ et $p = -2$

$$(18) \quad \begin{vmatrix} \bar{f}_0 & \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 & \bar{f}_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \bar{f}_{-1} & \bar{f}_0 \\ \bar{f}_1 & \bar{f}_2 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut déterminer, le nombre $\lambda \neq 0$, par l'équation

$$\bar{f}_1 = \lambda \bar{f}_0$$

et alors les équations (17) et (18) nous donnent.

$$\bar{f}_2 = \lambda \bar{f}_1$$

$$\bar{f}_3 = \lambda \bar{f}_2$$

$$\bar{f}_0 = \lambda \bar{f}_{-1}$$

De ces relations on déduit que

$$\begin{vmatrix} \bar{f}_1 & \bar{f}_2 \\ \bar{f}_2 & \bar{f}_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \bar{f}_{-1} & \bar{f}_0 \\ \bar{f}_0 & \bar{f}_1 \end{vmatrix} = 0.$$

D'une manière analogue on démontre qu'en général on a

$$\bar{f}_p = \lambda \bar{f}_{p-1}$$

quel que soit l'entier p .

Il résulte alors les identités

$$(19) \quad \begin{vmatrix} \bar{f}_0 & \bar{f}_{p+1} \\ \bar{f}_{p+1} & \bar{f}_{2p+2} \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} \bar{f}_0 & \bar{f}_p \\ \bar{f}_p & \bar{f}_{2p} \end{vmatrix}$$

$$(20) \quad \begin{vmatrix} \bar{f}_0 & \bar{f}_{-p-1} \\ \bar{f}_{-p-1} & \bar{f}_{-2p-2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda^2} \begin{vmatrix} \bar{f}_0 & \bar{f}_{-p} \\ \bar{f}_{-p} & \bar{f}_{-2p} \end{vmatrix}$$

pour $p \neq 0$.

Pour $p = 1$, le second membre de la formule (19) est nul, h_1 étant un zéro de $F(h)$. Il résulte alors que $2h_1$ est aussi un zéro de $F(h)$, ... et, ainsi de suite, on démontre que les ph_1 sont des zéros de $F(h)$, p étant un nombre naturel quelconque.

Nous avons aussi l'identité

$$\begin{vmatrix} \bar{f}_0 & \bar{f}_{-1} \\ \bar{f}_{-1} & \bar{f}_{-2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda^4} \begin{vmatrix} \bar{f}_0 & \bar{f}_1 \\ \bar{f}_1 & \bar{f}_2 \end{vmatrix}$$

qui montre que $-h_1$ est un zéro de $F(h)$ et si nous faisons dans l'identité (20) $p = 1, 2, \dots$ nous déduisons que les $-ph_1$ sont des zéros de $F(h)$, p étant un nombre naturel quelconque.

Revenons à la fonction $F(h)$ et remarquons que $h = 0$ est un de ses zéros.

Il peut arriver que pour $h > 0$, on ait $F(h) \neq 0$. Dans ce cas nous prendrons un nombre quelconque $h' > 0$ et nous aurons $F(h') \neq 0$ et aussi $F\left(\frac{h'}{s}\right) \neq 0$, quel que soit le nombre naturel s . Le théorème A est démontré dans ce cas.

Il peut arriver aussi que $F(h)$ soit différent de zéro dans l'intervalle $(0, h_1)$ où h_1 est un nombre fini et $F(h_1) = 0$. Nous prendrons alors un nombre h' quelconque de l'intervalle $(0, h_1)$ et nous aurons $F(h') \neq 0$, ainsi que $F\left(\frac{h'}{s}\right) \neq 0$, quel que soit le nombre rationnel s . Le théorème A est démontré aussi dans ce cas.

Mais il peut se faire que l'origine soit un point d'accumulation de zéros de la fonction continue $F(h)$. Nous allons démontrer que dans ce cas, la fonction

$F(h)$ est nulle quel que soit h et que $f(x)$ est une solution de l'équation fonctionnelle (2).

En effet, soit h un point quelconque et ε un nombre positif quelconque. La fonction $F(h)$ étant continue au point h , on peut déterminer le nombre positif η , tel que

$$(21) \quad |F(\bar{h}) - F(h)| < \varepsilon$$

pour

$$(21') \quad |\bar{h} - h| < \eta.$$

Le nombre η étant ainsi déterminé, soit $h_1, 0 < h_1 < \eta$, un zéro de $F(h)$. Mais alors tous les nombres ph_1 sont des zéros de $F(h)$, p étant un entier quelconque. Il peut arriver que h soit de la forme $h = ph_1$ et dans ce cas on a $F(h) = 0$. Si non, le nombre h appartiendra à un intervalle $(ph_1, (p+1)h_1)$ de longueur $h_1 < \eta$. En prenant $\bar{h} = ph_1$ dans l'inégalité (21) nous déduisons que $|F(h)| < \varepsilon$, ce qui montre que la fonction $F(h)$ est identiquement nulle. Tenant compte de l'équation

$$\begin{vmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} = 0$$

quel que soit h , les équations (15) et (16) nous donnent

$$\begin{vmatrix} f_0 & f_1 \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} f_{-1} & f_0 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} = 0$$

et en procédant comme plus haut, on démontre que

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} f_{-1} & f_0 \\ f_0 & f_1 \end{vmatrix} = 0$$

et en général

$$(21) \quad \begin{vmatrix} f_p & f_{p+1} \\ f_{p+1} & f_{p+2} \end{vmatrix} = 0$$

quel que soit l'entier p .

Mais alors, cette équation est identique à l'équation (3) et par suite il résulte que

$$(22) \quad f(ph) = C_1 e^{a_1 ph}.$$

L'équation (21) étant valable quel que soit h , on peut remplacer dans la formule (22) h par $\frac{h}{s}$, d'où il résulte qu'on a

$$f(rh) = C_1 e^{a_1 rh}$$

r étant un nombre rationnel quelconque.

La fonction $f(x)$ étant continue, en tout point x , on en déduit que

$$f(x) = C_1 e^{a_1 x}$$

ce qui montre que la solution $f(x)$ est aussi une solution de l'équation fonctionnelle (2).

onelle (2). Ce cas a été exclu dès le début (nr. 2) et par conséquent le théorème A est complètement démontré.

4. THÉORÈME B. En supposant que le nombre h a été choisi selon les exigences du théorème A, tous les déterminants

$$(23) \quad \begin{vmatrix} f_p & f_{p+1} \\ f_{p+1} & f_{p+2} \end{vmatrix}$$

où $f_p = f(ph)$, sont différents de zéro quel que soit le nombre entier p .

Pour le démontrer, reprenons les équations (15) et (16) que nous écrivons sous la forme

$$(15') \quad \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} f_{p-2} & f_{p-1} \\ f_{p-1} & f_p \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} f_{p-2} & f_{p-1} \\ f_p & f_{p+1} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} f_{p-2} & f_{p-1} \\ f_p & f_{p+1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} f_{p-2} & f_p \\ f_p & f_{p+2} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

et

$$(16') \quad \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} f_p & f_{p+1} \\ f_{p+1} & f_{p+2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} f_{p-1} & f_p \\ f_{p+1} & f_{p+2} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} f_{p-1} & f_p \\ f_{p+1} & f_{p+2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} f_{p-2} & f_p \\ f_p & f_{p+2} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

et supposons que le déterminant

$$(24) \quad \begin{vmatrix} f_{p-1} & f_p \\ f_p & f_{p+1} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, ce qui a lieu pour $p = 1$.

Supposons que le déterminant (23) soit nul. Alors l'équation (16') nous montre que

$$\begin{vmatrix} f_{p-1} & f_p \\ f_{p+1} & f_{p+2} \end{vmatrix} = 0$$

et, en développant le déterminant,

$$\begin{vmatrix} f_{p-2} & f_{p-1} & f_p \\ f_{p-1} & f_p & f_{p+1} \\ f_p & f_{p+1} & f_{p+2} \end{vmatrix} = 0$$

suivant les éléments de la première colonne, nous aurons

$$f_p \begin{vmatrix} f_{p-1} & f_p \\ f_p & f_{p+1} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est impossible puisque les deux facteurs sont différents de zéro. Les déterminants (23) sont donc différents de zéro pour $p = 1, 2, 3, \dots$

En reprenant l'hypothèse que le déterminant (24) est différent de zéro, ce qui a lieu pour $p = 1$, démontrons que le déterminant

$$(25) \quad \begin{vmatrix} f_{p-2} & f_{p-1} \\ f_{p-1} & f_p \end{vmatrix}$$

est aussi différent de zéro.

Supposons au contraire que le déterminant (25) soit nul. L'équation (15') nous montre alors qu'on a aussi

$$\begin{vmatrix} f_{p-2} & f_{p-1} \\ f_p & f_{p+1} \end{vmatrix} = 0$$

En développant le déterminant

$$\begin{vmatrix} f_{p-2} & f_{p-1} & f_p \\ f_{p-1} & f_p & f_{p+1} \\ f_p & f_{p+1} & f_{p+2} \end{vmatrix} = 0$$

suivant les éléments de la dernière colonne on obtient

$$f_p \begin{vmatrix} f_{p-1} & f_p \\ f_p & f_{p+1} \end{vmatrix} = 0$$

ce qui est impossible. Donc les déterminants (23) sont différents de zéro, pour $p = 0, -1, -2, -3, \dots$ et par suite le théorème B est complètement démontré.

§ 3. Intégration de l'équation fonctionnelle (11).

5. Reprenons l'équation fonctionnelle (11) et remplaçons x par ph , où h est un nombre choisi selon les exigences du théorème A. Nous aurons

$$(26) \quad \begin{vmatrix} f_p & f_{p+1} & f_{p+2} \\ f_{p+1} & f_{p+2} & f_{p+3} \\ f_{p+2} & f_{p+3} & f_{p+4} \end{vmatrix} = 0$$

quel que soit le nombre entier p et d'après le théorème B, le déterminant

$$(27) \quad \Delta_p = \begin{vmatrix} f_p & f_{p+1} \\ f_{p+1} & f_{p+2} \end{vmatrix}$$

qui est différent de zéro, quel que soit le nombre entier p .
On détermine les nombres λ_0 et λ_1 par les équations

$$(28) \quad \begin{aligned} \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 &= f_2 \\ \lambda_0 f_1 + \lambda_1 f_2 &= f_3 \end{aligned}$$

ce qui est possible puisque le déterminant du système est $\Delta_0 \neq 0$.

En faisant $p = 0$ dans l'équation (26) et en tenant compte des équations (28), on déduit aussi

$$(28') \quad \lambda_0 f_2 + \lambda_1 f_3 = f_4$$

En faisant ensuite dans l'équation (26) $p = 1$, et en tenant compte des équations (28) et (28') et du fait que $\Delta_1 \neq 0$, on en déduit

$$\lambda_0 f_3 + \lambda_1 f_4 = f_5$$

et ainsi de suite.

En général on a l'équation de récurrence

$$(29) \quad \lambda_0 f_n + \lambda_1 f_{n+1} = f_{n+2}$$

valable pour $n = 0, 1, 2, \dots$

Si nous considérons maintenant l'équation

$$\begin{vmatrix} f_{-1} & f_0 & f_1 \\ f_0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0$$

et si nous tenons compte des équations (28), on en déduit

$$\lambda_0 f_{-1} + \lambda_1 f_0 = f_1$$

ce qui prouve que l'équation (29) est valable aussi pour $n = -1$. On démontre de proche en proche qu'elle est valable aussi pour $n = -2, -3, \dots$, c'est à dire qu'elle est valable quel que soit le nombre entier n .

L'équation caractéristique de l'équation de récurrence (29) est

$$(30) \quad \rho^2 - \lambda_1 \rho - \lambda_0 = 0$$

En éliminant λ_0 et λ_1 entre les équations (28) et (30) on trouve que l'équation caractéristique est

$$(30') \quad \begin{vmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ f_0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0$$

On rencontre aussi cette équation dans la détermination des nombres $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$ par les équations

$$(31) \quad \begin{aligned} C_1 + C_2 &= f_0 \\ C_1 e^{\alpha_1 h} + C_2 e^{\alpha_2 h} &= f_1 \\ C_1 e^{2\alpha_1 h} + C_2 e^{2\alpha_2 h} &= f_2 \\ C_1 e^{3\alpha_1 h} + C_2 e^{3\alpha_2 h} &= f_3 \end{aligned}$$

Supposons pour un moment que les nombres α_1 et α_2 soient différents et éliminons C_1 et C_2 entre ces équations. Nous aurons les équations

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & f_0 \\ e^{\alpha_1 h} & e^{\alpha_2 h} & f_1 \\ e^{2\alpha_1 h} & e^{2\alpha_2 h} & f_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & f_1 \\ e^{\alpha_1 h} & e^{\alpha_2 h} & f_2 \\ e^{2\alpha_1 h} & e^{2\alpha_2 h} & f_3 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(32) \quad \begin{aligned} f_0 e^{(\alpha_1 + \alpha_2)h} - f_1 (e^{\alpha_1 h} + e^{\alpha_2 h}) + f_2 &= 0 \\ f_1 e^{(\alpha_1 + \alpha_2)h} - f_2 (e^{\alpha_1 h} + e^{\alpha_2 h}) + f_3 &= 0 \end{aligned}$$

En posant

$$(33) \quad \mu_1 = e^{\alpha_1 h}, \quad \mu_2 = e^{\alpha_2 h}$$

nous voyons que μ_1 et μ_2 sont les racines de l'équation

$$(34) \quad e^{(\alpha_1 + \alpha_2)h} - (e^{\alpha_1 h} + e^{\alpha_2 h})\mu + \mu^2 = 0$$

En éliminant $e^{(\alpha_1 + \alpha_2)h}$, $e^{\alpha_1 h} + e^{\alpha_2 h}$ entre les équations (32) et (34) on obtient l'équation en μ

$$(35) \quad \begin{vmatrix} 1 & \mu & \mu^2 \\ f_0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0$$

qui est identique à l'équation caractéristique (30').

Il résulte que les racines de l'équation caractéristique (30') sont

$$\rho_1 = e^{\alpha_1 h}, \quad \rho_2 = e^{\alpha_2 h}$$

dans l'hypothèse qu'elle a des racines distinctes.

La solution de l'équation de récurrence (29) est alors

$$\text{ou} \quad f_n = A_1 \rho_1^n + A_2 \rho_2^n$$

$$f_n = A_1 e^{\alpha_1 n h} + A_2 e^{\alpha_2 n h}$$

où les constantes A_1 et A_2 sont données par les équations

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= f_0 \\ A_1 e^{\alpha_1 h} + A_2 e^{\alpha_2 h} &= f_1 \end{aligned}$$

En comparant ce système avec les deux premières équations (31), on en déduit que

de sorte que

(36)

quel que soit le nombre entier n .

Si l'équation caractéristique (30') a des racines confondues, égales à ρ_1 , la solution de l'équation de récurrence (29) est

$$(37) \quad f_n = \rho_1^n (A + Bn)$$

où A et B sont des constantes.

On rencontre l'équation caractéristique avec les racines confondues aussi dans la détermination des nombres C_1 , C_2 , α_1 par les équations

$$(38) \quad \begin{aligned} C_1 &= f_0 \\ e^{\alpha_1 h} (C_1 + C_2 h) &= f_1 \\ e^{2\alpha_1 h} (C_1 + 2C_2 h) &= f_2 \\ e^{3\alpha_1 h} (C_1 + 3C_2 h) &= f_3 \end{aligned}$$

analogues aux équations (31).

En effet, en éliminant C_1 entre ces équations, on trouve les équations

$$\begin{aligned} e^{\alpha_1 h} C_2 h &= f_1 - f_0 e^{\alpha_1 h} \\ e^{2\alpha_1 h} C_2 h &= f_2 - f_1 e^{\alpha_1 h} \\ e^{3\alpha_1 h} C_2 h &= f_3 - f_2 e^{\alpha_1 h} \end{aligned}$$

En éliminant ensuite C_2 , on trouve les équations

$$\begin{aligned} f_2 - f_1 e^{\alpha_1 h} - e^{\alpha_1 h} (f_1 - f_0 e^{\alpha_1 h}) &= 0 \\ f_3 - f_2 e^{\alpha_1 h} - e^{\alpha_1 h} (f_2 - f_1 e^{\alpha_1 h}) &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} f_2 - 2e^{\alpha_1 h} f_1 + e^{2\alpha_1 h} f_0 &= 0 \\ f_3 - 2e^{2\alpha_1 h} f_2 + e^{2\alpha_1 h} f_1 &= 0 \end{aligned}$$

Ces deux équations montrent que $e^{\alpha_1 h}$ est une racine double de l'équation caractéristique (30') car les deux équations

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ f_0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2\rho \\ f_0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0$$

sont vérifiées par $\rho = e^{\alpha_1 h}$.

Nous pouvons donc remplacer dans l'équation (37) ρ_1 par $e^{\alpha_1 h}$ et nous aurons

$$f_n = e^{n\alpha_1 h} (A + Bn).$$

Les constantes A et B sont déterminées par les équations

$$\begin{aligned} A &= f_0 \\ e^{\alpha_1 h} (A + B) &= f_1. \end{aligned}$$

En comparant ces équations avec les deux premières équations (38) on en déduit

$$A = C_1, \quad B = C_2 h.$$

et par suite la solution de l'équation de récurrence (29) est

$$(39) \quad f(nh) = e^{a_1 nh} (C_1 + C_2 nh)$$

où α_1 , C_1 et C_2 sont donnés par les équations (38).

6. Démontrons que les formules (36) et (39) sont valables aussi lorsqu'on remplace n par un nombre rationnel r quelconque.

En effet si nous remplaçons h par $h_1 = \frac{h}{s}$, où s est un nombre naturel quelconque, tous les calculs précédents sont valables. Nous aurons

$$(40) \quad f(ph_1) = C_1 e^{a_1 ph_1} + C_2 e^{a_2 ph_1}$$

ou

$$(41) \quad f(ph_1) = e^{a_1 ph_1} (C_1 + C_2 ph_1)$$

selon que l'équation caractéristique correspondante a des racines distinctes, ou confondues, et où p est un entier quelconque.

Pour déterminer les constantes C_1 , C_2 , α_1 , α_2 de la formule (40), ou C_1 , C_2 , α_1 de la formule (41) on peut se servir des systèmes d'équations (31) ou (38) où l'on remplace h par h_1 . Mais comme il s'agit de la solution $f(x)$ de l'équation fonctionnelle (11) déterminée par les conditions

$$f(0) = f_0, \quad f(h) = f_1, \quad f(2h) = f_2, \quad f(3h) = f_3$$

et comme les équations (40) et (41) sont valables quel que soit l'entier p , on peut former quatre équations successives pour déterminer les constantes, en donnant à p les valeurs 0, s , $2s$, $3s$.

Puisque $sh_1 = h$, ces équations sont

$$C_1 + C_2 = f(0) = f_0$$

$$C_1 e^{a_1 h} + C_2 e^{a_2 h} = f(h) = f_1$$

$$C_1 e^{2a_1 h} + C_2 e^{2a_2 h} = f(2h) = f_2$$

$$C_1 e^{3a_1 h} + C_2 e^{3a_2 h} = f(3h) = f_3$$

et

$$C_1 = f(0) = f_0$$

$$e^{a_1 h} (C_1 + C_2 h) = f(h) = f_1$$

$$e^{2a_1 h} (C_1 + 2C_2 h) = f(2h) = f_2$$

$$e^{3a_1 h} (C_1 + 3C_2 h) = f(3h) = f_3$$

Ces systèmes d'équations sont identiques aux équations (31) et (38); on en déduit alors pour le premier système

$$C_1 = C_1, \quad C_2 = C_2, \quad \alpha_1 = \alpha_1, \quad \alpha_2 = \alpha_2$$

et pour le second système

$$C_1' = C_1, \quad C_2' = C_2, \quad \alpha_1' = \alpha_1$$

Il résulte que dans les formules (40) et (41) on peut remplacer C_1 , C_2 , α_1 , α_2 par C_1 , C_2 , α_1 , α_2 et C_1 , C_2 , α_1 par C_1 , C_2 , α . En remplaçant aussi h par $\frac{h}{s}$, et ensuite $\frac{p}{s}$ par r , nous pouvons écrire les équations (40) et (41) sous la forme

$$(42) \quad f(rh) = C_1 e^{a_1 rh} + C_2 e^{a_2 rh}$$

ou

$$(43) \quad f(rh) = e^{a_1 rh} (C_1 + C_2 rh).$$

Les fonctions $f(x)$, $e^{a_1 x}$, $e^{a_2 x}$, $xe^{a_1 x}$ étant continues quel que soit x , nous déduisons que, pour x quelconque, nous avons

$$(44) \quad f(x) = C_1 e^{a_1 x} + C_2 e^{a_2 x}$$

ou

$$(45) \quad f(x) = e^{a_1 x} (C_1 + C_2 x)$$

Dans l'équation (44), $e^{a_1 h}$ et $e^{a_2 h}$ sont les racines de l'équation caractéristique (30'). Ces racines peuvent être réelles ou complexes conjuguées. Dans ce dernier cas les deux premières équations (31) donnent pour C_1 et C_2 des valeurs complexes conjuguées.

En posant

$$\alpha_1 = \beta_1 + i\beta_2, \quad \alpha_2 = \beta_1 - i\beta_2$$

$$C_1 = \frac{K_1 - iK_2}{2}, \quad C_2 = \frac{K_1 + iK_2}{2}$$

la formule (44) devient

$$f(x) = e^{\beta_1 x} \left[\frac{K_1 - iK_2}{2} (\cos \beta_2 x + i \sin \beta_2 x) + \frac{K_1 + iK_2}{2} (\cos \beta_2 x - i \sin \beta_2 x) \right]$$

ou

$$(44') \quad f(x) = e^{\beta_1 x} [K_1 \cos \beta_2 x + K_2 \sin \beta_2 x]$$

En résumé, les solutions réelles, continues quel que soit x , de l'équation fonctionnelle (11) sont de la forme

$$(46) \quad \begin{aligned} f(x) &= C_1 e^{a_1 x} + C_2 e^{a_2 x} \\ f(x) &= e^{\beta_1 x} (K_1 \cos \beta_2 x + K_2 \sin \beta_2 x) \\ f(x) &= e^{a_1 x} (C_1 + C_2 x) \end{aligned}$$

Les résultats de ce travail ont été communiqués à l'Académie de la République Populaire Roumaine. [2].

BIBLIOGRAFIE

1. H. Löwner, Über monotone Matrixfunctionen Mat. Zeit. 38. 1934. p. 177—216
2. D. V. Ionescu, Integrarea ecuației funcționale

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(x+h) & f(x+2h) \\ f(x+h) & f(x+2h) & f(x+3h) \\ f(x+2h) & f(x+3h) & f(x+4h) \end{vmatrix} = 0$$

Sesiunea științifică a Academiei R.P.R. Filiala Cluj

Reçu le 15 mars 1958.

SUR UN PROBLÈME AUX LIMITES QUI INTERVIENT DANS UN PROJET D'UNE CHAUDIÈRE À VAPEUR

par

C. KALIK

à Cluj

1. Dans son travail [1] L. NÉMETI s'occupe d'un problème qui se pose lorsqu'on veut établir le projet d'une chaudière tubulaire à vapeur ayant un passage forcé. L'auteur propose une méthode de calcul de la tension thermique dans les murs du tube. Cependant, pour calculer la tension thermique il est nécessaire de connaître la température, ce qui exige la résolution d'un problème aux limites. Le but du présent travail est de donner la résolution de ce problème aux limites.

D'abord, nous introduisons les signes ci-dessous utilisés et formulons le problème aux limites. Soit r , φ , z des coordonnées cylindriques dans l'espace à trois dimensions. Le tube de la chaudière est déterminé par les inégalités suivantes :

$$r_0 \leq r \leq r_0 + s; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad -L \leq z \leq +L$$

où r_0 est le rayon intérieur, s l'épaisseur et $2L$ la longueur du tube. Le champ thermique peut être considéré comme étant le même dans chaque section du tube avec le plan $\varphi = \text{constante}$. Le phénomène devient statique à un moment donné, donc la fonction u qui nous donne les valeurs de la température doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(1.1) \quad A(u) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

à chaque point du mur du tube.

Les conditions aux limites sont déterminées par les données suivantes : à l'extérieur du tube on maintient un régime constant de telle manière que le flux de chaleur soit la constante Q . Supposons que la chaleur ne passe pas par les extrémités $z = \pm L$ du tube, ce qui signifie qu'ici le