

ces nombres étant pour $s = v$, les valeurs approchées de l'intégrale $z(x, y)$ et de ses dérivées partielles $p(x, y)$, $q(x, y)$ sur les noeuds du réseau, les valeurs absolues des différences $z(x_i, y_k) - z_{ik}^{(v)}$, $p(x_i, y_k) - p_{ik}^{(v)}$, $q(x_i, y_k) - q_{ik}^{(v)}$ étant plus petites que 2ε .

BIBLIOGRAPHIE

[1] Radon J., *Restausdrücke bei Interpolations und Quadratur Formeln durch bestimmte Integralen*. Monatshefte für Mathematik und Physik **42**, 389 (1935).

[2] Ionescu D. V., *Cuadraturi numerice*. București, Editura Tehnică 1957.

Reçu le 25. XI. 1959.

APPLICATIONS DES FONCTIONS CONVEXES
GÉNÉRALISÉES

par

ELENA MOLDOVAN

à Cluj

1. Dans ce travail nous allons donner des applications de la notion de fonction convexe par rapport à un ensemble de fonctions interpolatoires, que nous avons introduite dans notre travail [3].

Soit E un ensemble de points sur l'axe réelle et (\mathcal{F}_n) un ensemble de fonctions réelles et d'une variable réelle. Dans [3] nous avons donné la

Définition 1. L'ensemble (\mathcal{F}_n) s'appelle interpolatoire d'ordre n sur E ou simplement ensemble du type $I_n \{E\}$ si :

- (A) Les éléments de (\mathcal{F}_n) sont des fonctions continues sur E .
(B) Quels que soient les n points distincts de E

$$(1) \quad x_1, x_2, \dots, x_n$$

et quels que soient les n nombres

$$(2) \quad y_1, y_2, \dots, y_n$$

il existe une fonction et une seule $\varphi(x) \in (\mathcal{F}_n)$, tel que l'on ait

$$(3) \quad \varphi(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Pour mettre en évidence les conditions (3) et l'ensemble (\mathcal{F}_n) , nous employons pour la fonction $\varphi(x)$ qui vérifie les conditions (3) la notation

$$L((\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n | x)$$

et aussi

$$L((\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \dots, x_n; f | x)$$

lorsque $f(x)$ est une fonction qui prend les valeurs (2) aux points correspondants (1).

Considérons un système de $n + 1$ points distincts de l'ensemble E

$$(4) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$$

et une fonction $f(x)$ définie sur ces points. Nous utiliserons la notation

$$(5) \quad \begin{aligned} D[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}, x_i; f] = \\ = f(x_i) - L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; f|x_i), \\ i = 1, 2, \dots, n+1 \end{aligned}$$

Définition 2. La fonction $f(x)$, définie sur l'ensemble E , est dite convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe, ou concave par rapport à \mathcal{F}_n , sur l'ensemble E , suivant que

$$(6) \quad D[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}; f] >, \geq, =, \leq \text{ ou } < 0$$

pour tout système de $n+1$ points $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ de l'ensemble E .

C'est la définition de la convexité que nous avons donnée aussi dans [3].

Définition 3. La fonction $f(x)$, définie sur l'intervalle $[a, b]$ est dite n -valente par rapport à l'ensemble \mathcal{F}_n du type $I_n \{[a, b]\}$, si pour chaque fonction $g(x) \in \mathcal{F}_n$, la différence $f(x) - g(x)$ s'annule sur l'intervalle $[a, b]$ sur au plus n points.

Nous avons démontré dans [3] que la condition nécessaire et suffisant pour qu'une fonction continue sur $[a, b]$ soit convexe ou concave sur $[a, b]$ par rapport à l'ensemble \mathcal{F}_n du type $I_n \{[a, b]\}$, est qu'elle soit n -valente sur $[a, b]$ par rapport à l'ensemble \mathcal{F}_n .

Dans le travail cité [3] nous avons donné plusieurs propriétés qui résultent des définitions que nous avons répété ici. Le but du présent travail est d'étudier pour des cas particuliers les conditions suffisantes pour qu'un ensemble de fonctions soit interpolatoire d'ordre donné sur un ensemble donné de points. Nous faisons ici seulement une introduction à cet étude.

2. Définition 4. L'ensemble M_n des fonctions continues sur l'intervalle I , s'appelle du type $K_n \{I\}$ si : 1° pour chaque système (1) de n points distincts et pour chaque système (2) de n nombres il existe dans l'ensemble M_n au moins une fonction $\psi(x)$, tel que l'on ait $\psi(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; 2° la différence de deux fonctions quelconques de l'ensemble M_n ne peut s'annuler sur aucun sous-intervalle de I .

Il est clair qu'on peut construire des exemples d'ensembles du type $K_n \{I\}$. Soit par exemple $n = 1$ et considérons l'ensemble M_1 dont les éléments sont les polynômes de la forme αx , α variable, et les fonctions constantes. Soit I un intervalle contenant l'origine. L'ensemble M_1 est du type $K_1 \{I\}$ mais il n'est pas du type $I_1 \{I\}$.

3. Définition 5. Soit \mathcal{F} un ensemble de fonctions définies sur un intervalle I . La fonction $f(x)$ définie sur I , s'appelle positive n -valente (négative n -valente) par rapport à l'ensemble \mathcal{F} , si : 1° $f(x)$ est n -valente par rapport à \mathcal{F} au sens de la définition 3; 2° $\varphi(x)$ étant un élément quelconque de l'ensemble \mathcal{F} , les relations $f(x_i) - \varphi(x_i) = 0$ $i = 1, 2, \dots, n$ pour $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, x_n étant à l'intérieur de I , ont comme conséquence l'inégalité $f(x) - \varphi(x) > 0$ ($f(x) - \varphi(x) < 0$) pour $x > x_n$, $x \in I$.

On peut observer que dans le cas d'un ensemble \mathcal{F} du type $I_n \{I\}$, la positive n -valence est équivalente avec la convexité et la négative n -valence avec la concavité de la fonction $f(x)$ par rapport à \mathcal{F} . Mais la notion de positive n -valence (négative n -valence) intervient même si l'ensemble \mathcal{F} n'est pas du type $I_n \{I\}$. Soit par exemple, \mathcal{F} un ensemble dont les éléments sont des fonctions convexes sur I par rapport à un autre ensemble \mathcal{F}_n du type $I_n \{I\}$. Alors chaque fonction de \mathcal{F}_n est négative n -valente sur I par rapport à \mathcal{F} . Soit par exemple \mathcal{F} l'ensemble des polynômes de la forme $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ où $\alpha > 0$. Chaque polynôme du premier degré est négative n -valente par rapport à cet ensemble \mathcal{F} .

4. THÉORÈME 1. Soit \mathcal{L}_2 un ensemble linéaire du type $K_2 \{[a, b]\}$. S'il existe une fonction $\varphi(x)$, continue sur l'intervalle $[a, b]$, négative bi-valente par rapport à \mathcal{L}_2 et $\varphi(x) > 0$ pour $x \in (a, b)$, alors l'ensemble \mathcal{L}_2 est du type $I_2 \{[a, b]\}$.

Pour la démonstration, admettons les hypothèses de l'énoncé et supposons que l'ensemble \mathcal{L}_2 ne soit pas du type $I_2 \{[a, b]\}$. Soit $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ deux points tel que $x_1 < x_2$ et $x_1, x_2 \in [a, b]$. Supposons qu'il existe deux fonctions distinctes $g_1(x), g_2(x) \in \mathcal{L}_2$ et $g_1(x_1) = g_2(x_1) = y_1$, $g_1(x_2) = g_2(x_2) = y_2$. La différence $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ est une fonction de l'ensemble \mathcal{L}_2 qui s'annule sur deux points $x_1 < x_2$. L'existence d'un intervalle $[\alpha, \beta] \subseteq [x_1, x_2]$ tel que $g(x) \neq 0$ pour $x \in (\alpha, \beta)$ et $g(\alpha) = g(\beta) = 0$, est assurée*. On peut supposer, à cause de la linéarité de l'ensemble \mathcal{L}_2 , que $g(x) > 0$ pour $x \in (\alpha, \beta)$. Le nombre c peut être choisi de manière que la différence $\varphi(x) - cg(x)$ s'annule sur deux points $x'_1 < x'_2$, $x'_2 < \beta$ et $\varphi(x) > cg(x)$ pour $x > x'_2$. Mais c'est en contradiction avec l'hypothèse faite sur la fonction $\varphi(x)$.

THÉORÈME 2. Soit \mathcal{L}_n un ensemble linéaire du type $K_n \{[a, b]\}$, $n > 2$. S'il existe une fonction $\varphi(x)$, continue sur $[a, b]$, négative n -valente par rapport à l'ensemble \mathcal{L}_n et $\varphi(a) = 0$, $\varphi(x) > 0$ pour $x \in (a, b)$, alors l'ensemble \mathcal{L}_n est du type $I_n \{[a, b]\}$.

Pour la démonstration, on suppose que les hypothèses de l'énoncé sont satisfaites et que la conclusion n'a pas lieu. Soit donc $g_1(x), g_2(x)$ deux fonctions de \mathcal{L}_n pour lesquelles $g_1(x_i) = g_2(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ et $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$. On démontre, comme nous l'avons fait dans [2], qu'on peut construire une fonction $g(x) = c(g_1(x) - g_2(x))$ qui coïncide avec $\varphi(x)$ sur n points $x'_1 < x'_2 < \dots < x'_n$ de l'intervalle $[a, b]$ et $\varphi(x) > g(x)$ pour $x > x'_n$. C'est en contradiction avec la négative n -valence de la fonction $\varphi(x)$.

Le cas $n = 1$ n'est pas contenu dans les théorèmes 1 et 2. Mais on peut énoncer le

THÉORÈME 3. Soit \mathcal{L}_1 un ensemble linéaire du type $K_1 \{[a, b]\}$. S'il existe une fonction $\varphi(x)$, continue sur l'intervalle $[a, b]$, négative univale sur $[a, b]$, par rapport à l'ensemble \mathcal{L}_1 et $\varphi(x) > 0$ pour $x \in (a, b)$, alors l'ensemble \mathcal{L}_1 est du type $I_1 \{[a, b]\}$.

* Ceci résulte de la définition 4 et du fait que l'ensemble des points sur lesquels $g(x)$ s'annule ne peut être dense dans l'intervalle $[x_1, x_2]$, $g(x)$ étant continu.

On voit aisément quel est le motif pour lequel dans la conclusion on a $I_1 \{(a, b)\}$ et non pas $I_1 [a, b]$ comme nous l'avons vu dans les énoncés précédents.

5. Dans les théorèmes que nous venons d'énoncer, on a supposé seulement la continuité des fonctions dont on a parlé. Si l'on suppose aussi la dérivabilité, alors on peut obtenir des applications qui sont intéressantes pour l'étude des équations différentielles. L'étude qualitatif des équations différentielles est étroitement lié avec les inégalités différentielles qui caractérisent les fonctions introduites par la définition 2 si l'on suppose leur dérivabilité.

6. Considérons l'équation différentielle

$$(7) \quad y^{(n)} - G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

qui satisfait aux conditions :

1° la fonction $G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ est continue par rapport à l'ensemble de ses variables $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, sur le domain défini par les inégalités

$$(D) \quad a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty, -\infty < y^{(i)} < +\infty, i = 1, 2, \dots, n-1;$$

2° pour chaque point $x_0 \in [a, b]$, l'équation (7) a une intégrale et une seule $y(x)$ tel que

$$y(x_0) = y_0, \quad y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

les nombres $y_0, y_0^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n-1$ étant arbitraires.

Définition 6. L'équation (7) s'appelle du type $\mathcal{I}_n \{[a, b]\}$ si les hypothèses 1° - 2° ont lieu et l'ensemble G_n des intégrales est du type $I_n \{[a, b]\}$.

Dans notre travail [2] en langue roumaine, nous avons démontré le théorème suivant

THÉORÈME 4. Soit $f(x)$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et avec la $n^{\text{ième}}$ dérivée continue sur (a, b) . Si l'équation (7) est du type $\mathcal{I}_n \{[a, b]\}$ et l'ensemble G_n contient une intégrale qui prend les valeurs de la fonction $f(x)$ sur $n+1$ points $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ de $[a, b]$, alors il existe un point $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ tel que

$$(8) \quad f^{(n)}(\xi) - G(\xi, f(\xi), \dots, f^{(n-1)}(\xi)) = 0$$

La démonstration du théorème 14 résulte en appliquant à l'ensemble G_n le théorème 7 donné dans [3]. Le théorème 4 est une généralisation d'un théorème de la moyenne donné par G. Pólya dans [6].

7. THÉORÈME 5. Si la fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et avec la $n^{\text{ième}}$ dérivée continue sur (a, b) et si l'équation (7) est du type $\mathcal{I}_n \{[a, b]\}$, alors l'inégalité

$$(9) \quad f^{(n)}(x) - G(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)) > 0, \quad x \in [a, b]$$

est suffisante pour la convexité de $f(x)$ par rapport à l'ensemble G_n , sur $[a, b]$.

Un théorème analogue a lieu si au lieu de l'inégalité $>$ nous posons $<$ dans (9) et au lieu de la convexité on pose la concavité dans l'énoncé.

La démonstration du théorème 5 s'obtient, comme on peut l'observer facilement, en appliquant les théorèmes 8 et 13 de [3] et en utilisant la condition 2°.

8. THÉORÈME 6. L'équation (7) étant du type $\mathcal{I}_n \{[a, b]\}$ et la fonction $f(x)$ continue sur $[a, b]$, avec la $n^{\text{ième}}$ dérivée continue sur (a, b) la condition nécessaire et suffisante pour la G_n -non-concavité ou la G_n -non-convexité de $f(x)$ sur $[a, b]$ est l'inégalité

$$(10) \quad f^{(n)}(x) - G(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)) \geq 0, \quad x \in [a, b]$$

ou

$$(11) \quad f^{(n)}(x) - G(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)) \leq 0, \quad x \in [a, b]$$

La démonstration de ce théorème est donné dans [2].

9. L'idée d'appliquer les inégalités différentielles à l'étude qualitatif des équations différentielles se trouve dans plusieurs travaux comme par exemple dans [1], [4], [5]. Les inégalités de Tschaplyguine [5], sont liées au problème de Cauchy. Les inégalités donnés dans les théorèmes de ce travail sont liées au problème polylocal pour les équations différentielles. L'équation (7) étant donnée, le problème n -local revient à l'existence et l'unicité de l'intégrale $y(x)$ qui prend des valeurs données sur n points distincts donnés. Le problème de Cauchy s'obtient comme un cas à la limite.

Si l'équation (7) est linéaire, et $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ est un système fondamentale d'intégrales, alors l'existence et l'unicité, pour chaque système de points distincts x_1, x_2, \dots, x_n d'une intégrale qui prend des valeurs données sur ces points est équivalente avec le fait que le déterminant

$$V \begin{pmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

est toujours différent de zero. Si la condition $V \begin{pmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix} \neq 0$ a lieu pour chaque système de n points distincts $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ alors les fonctions $\varphi_i(x), i = 1, 2, \dots, n$, forment un système Tschebyscheff. Mais, si l'équation (7) est donnée, même si elle est linéaire, il est intéressant de déduire les propriétés d'interpolation de l'ensemble G_n de ses intégrales, à l'aide de la fonction $G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Soit par exemple l'équation

$$(13) \quad L_2(y) = y'' + P(x)y' + R(x)y = 0$$

où les fonctions $P(x)$ et $R(x)$ sont continues sur l'intervalle $[a, b]$. Nous disons qu'une intégrale $y(x)$ de (13) est non-oscillatoire sur $[a, b]$ si elle ne s'annule qu'au plus sur un point de $[a, b]$. Dans le cas contraire l'intégrale $y(x)$ s'appelle oscillatoire. Quand les intégrales de (13) ne sont pas oscillatoires sur $[a, b]$ alors l'équation (13) est du type $I_2\{[a, b]\}$.

Du théorème 1 et de l'inégalité (10) il résulte l'observation :

s'il existe une fonction $u(x)$ deux fois dérivable et $u(x) > 0$ pour $x \in (a, b)$ et $L_2(u) \leq 0$, $x \in [a, b]$, alors l'équation (13) est du type $I_2\{[a, b]\}$.

On trouve cette proposition dans [4]. Dans [1] on démontre aussi la nécessité de la condition donnée dans l'énoncé.

Du théorème 2 il résulte aussi une application pour l'équation linéaire d'ordre n .

On peut voir facilement que la notion de convexité introduite a ses applications même dans le cas des équations différentielles non linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Кондратьев В. А. Элементарный вывод необходимого и достаточного условия неколебности решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. УМН, 12, 159—160 (1957).
 - [2] Moldovan E., *Asupra noțiunii de funcție convexă față de o mulțime de funcții interpolare*. Studii și Cercetări de Mat. Cluj, IX, 161—224 (1958).
 - [3] Moldovan E., *Sur une généralisation des fonctions convexes*. Mathematica, 1(24), 49—80, (1959).
 - [4] Vallée Poussin, Ch. de la, *Sur l'équation différentielle du second ordre*. Journ. de Math. pures et appl. 8, 125—144 (1929).
 - [5] Чаплыгин С. А., *Полное собрание сочинений*. III, 75—79 (1935).
 - [6] Polya G., *On Mean-Value Theorem corresponding to a Given Linear Homogeneous Differential Equation*, Trans. Am. Math. Soc. 24, 312—324 (1922).
- R. cu le 20. XI. 1959

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

И. МУНТЯНУ

Клуж

Математическое исследование различных электротехнических и радиотехнических схем, в частности, рассмотрение лампового генератора, а так же исследование некоторых механических схем, встреченных, например, в вопросах динамики, ведёт к системам двух дифференциальных уравнений, вообще нелинейных, следующего типа:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Ряд результатов в этом направлении, с техническими применениями, даны во втором издании книги АНДРОНОВА, ВИТТА и ХАЙКИНА [1].

В настоящей работе указываются условия осуществления периодического режима для некоторого частного случая упомянутой системы дифференциальных уравнений. Именно, воспользовавшись рабочим методом развитым ЛЕВИНСОНЫМ и СМИТОМ [2], ФИЛИППОВЫМ [3] и ДРАГИЛЕ-ВЫМ [4] и опираясь на идею введения нелинейного члена [5], в этой работе даётся лёгкое обобщение одной теоремы Драгилёва, доказывая, что при выполнении некоторых условий, система дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= h(y) - F(x), \\ \frac{dy}{dt} &= -g(x) \end{aligned}$$

допускает, по крайней мере, одно периодическое решение. Работа не занимается проблемой единственности найденного периодического решения.