

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОГО ПРИЗНАКА НЕКОЛЕБЛЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Елена Молдован

Клуж

1. — В работе В. А. КОНДРАТЬЕВА [1] дано необходимое и достаточное условие неколеблемости*) в данном интервале интегралов уравнения

$$(1) \quad L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

При предположении что $p(x)$ и $q(x)$ являются непрерывными функциями в отрезке $[a, b]$, теорема Кондратьева гласит:

для того чтобы интегралы уравнения (1) были неколеблющимися в $[a, b]$, необходимо и достаточно существование положительной и дважды дифференцируемой функции $u(x)$, удовлетворяющей условию

$$(2) \quad L(u) \leq 0.$$

Достаточность условия дано в работе de la VALLÉE POUSSIN, [6]. В предлагаемой заметке мы даём истолкование этой теоремы, из которого вытекает и одно её обобщение для линейных уравнений порядка выше двух.

2. — Предположим, что интегралы уравнения (1) неколеблющиеся в $[a, b]$. Тогда множество M_2 интегралов уравнения (1) есть множество типа $I_2[a, b]$, т. е. каковы бы ни были различные точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, и каковы бы ни были числа y_1, y_2 множество M_2 содержит одну, и только одну, функцию $y(x)$ такую, что $y(x_i) = y_i, i = 1, 2$. В этом предположении известно следующее свойство: если $f(x)$ есть дважды дифференцируемая функция в $[a, b]$ и если существуют три точки $x_1 < x_2 < x_3$ в $[a, b]$ такие,

*) Интеграл уравнения (1) называется неколеблющимся в интервале I , если он обращается в нуль не более, чем в одной точке этого интервала. В противном случае, интеграл называется колеблющимся.

что некоторый интеграл уравнения (1) совпадает на этих точках с функцией $f(x)$, тогда существует точка $\xi \in (x_1, x_2)$, такая, что $f''(\xi) + p(\xi)f'(\xi) + q(\xi)f(\xi) = 0$. Из этого свойства вытекает следующее замечание: если функция $f(x)$ удовлетворяет одному из неравенств $f''(x) + p(x)f'(x) + q(x)f(x) < 0$ или > 0 , тогда $f(x)$ не может совпадать более чем в двух точках интервала $[a, b]$ с никаким интегралом уравнения (1).

Определение 1. — Функция $f(x)$, заданная на интервале $[a, b]$, называется двухзначной относительно множества M_2 , если при любой $y(x) \in M_2$ равенство $y(x) = f(x)$ не может иметь места более чем в двух точках интервала $[a, b]$.

Это определение является частным случаем одного определения, данного в работе [3] для случая множества типа $I_n[a, b]$. Из теоремы 13 из [3] следует, что если $f(x)$ непрерывна в $[a, b]$ и двухзначна относительно множества M_2 тогда каковы бы ни были точки $x_1 < x_2 < x_3 \in [a, b]$, из $y(x) \in M_2$ и $f(x_i) = y(x_i)$, $i = 1, 2$ всегда следует что $f(x_3) - y(x_3) > 0$ или $f(x_3) - y(x_3) < 0$.

Определение 2. — Если на любой системе трёх точек $x_1 < x_2 < x_3$ из $[a, b]$, из $y(x) \in M_2$ и $y(x_i) = f(x_i)$; $i = 1, 2$ следует для всех одно из неравенств $f(x_3) - y(x_3) >, \geq, \leq$ или < 0 , тогда функция $f(x)$ называется выпуклой, вогнутой, невыпуклой соответственно относительно множества M_2 на интервале $[a, b]$.

Здесь мы не останавливаемся на том, что можно дать аналогичное определение, заменяя интервал $[a, b]$ через некоторый его подинтервал.

Если $f(x)$ дважды дифференцируемая функция, то можно доказать [2], что из неравенства $f''(x) + p(x)f'(x) + q(x)f(x) > 0$, $x \in [a, b]$ следует, что $f(x)$ есть выпуклая функция относительно множества M_2 , а из неравенства $f''(x) + p(x)f'(x) + q(x)f(x) < 0$, $x \in [a, b]$ следует, что $f(x)$ есть вогнутая функция относительно множества M_2 . Оба эти свойства относятся здесь ко всему интервалу $[a, b]$. Если неравенство $L(f) > 0$ или < 0 имеет место на некотором интервале $J \subset [a, b]$ оно влечёт за собой выпуклость, соотв. вогнутость на интервале J . Если же $L(f) \geq 0$ или ≤ 0 , то функция $f(x)$ является невогнутой, соотв. невыпуклой.

С помощью этих понятий можно доказать теорему Кондратьева. Предположим, что условие теоремы выполнено. Пусть $V(x)$ колеблющийся на $[a, b]$ интеграл уравнения (1). Пусть $x_1 < x_2$ две последовательных точки множества точек из $[a, b]$ на которых $V(x)$ обращается в нуль. Предположим, что $V(x) > 0$ на (x_1, x_2) . Тогда, в силу теоремы Штурма, интегралы уравнения (1) являются неколеблющимися на интервале (x_1, x_2) . Следовательно, из $L(u) \leq 0$ вытекает что $u(x)$ является невыпуклой относительно M_2 на интервале (x_1, x_2) . Но, так как $u(x)$ положительная функция, существует постоянная c , такая, что $c \cdot V(x)$ совпадает по крайней мере в двух точках $x'_1 < x'_2$ из (x_1, x_2) с $u(x)$, а $u(x_2 - \epsilon) - cV(x_2 - \epsilon) > 0$ при достаточно малом $\epsilon > 0$, что противоречит свойству невыпуклости функции $u(x)$. Итак, уравнение (1) не может иметь ни одного колеблющегося интеграла на интервале $[a, b]$. Достаточность условия доказана.

Для доказательства необходимости достаточно заметить, что если интегралы уравнения (1) являются неколеблющимися на интервале $[a, b]$ тогда интеграл $y(x)$ удовлетворяющий условиям $y(a) = y(b) = a > 0$, положителен во всём интервале $[a, b]$.

3. — Применение понятия выпуклой функции в вышеуказанном смысле приводит нас к одной более общей теореме сравнения, содержащей теорему Кондратьева как частный случай.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$(3) \quad L_n(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

где $a_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ непрерывные функции в конечном и замкнутом интервале $[a, b]$ Обозначим через M_2 множество интегралов уравнения (3). Множество M_n — по аналогии с данными в работе [3] определениями — назовём множеством типа $I_n[a, b]$ если для любой системы из n различных точек $x_1, x_2, \dots, x_n$ из $[a, b]$ и для любой системы произвольных чисел $y_1, y_2, \dots, y_n$ множество M_n содержит один, и только один, интеграл проходящий через точки $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Сохраняя обозначения из работы [3], функцию $f(x)$ определённую на интервале $J \subseteq [a, b]$, будем называть выпуклой, невогнутой, невыпуклой или вогнутой относительно множества M_n если для любой системы $n + 1$ точек $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$, принадлежащих интервалу J , из $y(x) \in M_n$ и $y(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ вытекает всегда

$$f(x_{n+1}) - y(x_{n+1}) >, \geq, \leq, \text{ соотв. } < 0.$$

Согласно теореме о среднем, принадлежащей Г. Polya [5], можно утверждать, что если множество M_n является множеством типа $I_n[a, b]$, тогда неравенства

$$(4) \quad L_n(f) >, \geq, \leq, < 0 \quad \text{для} \quad x \in I \subseteq [a, b]$$

влекут выпуклость, невогнутость, невыпуклость, соотв. вогнутость функции $f(x)$ на интервале I .

Если вместо дифференциального оператора $L_n(y)$, мы рассмотрим оператор $G_n(y) = G_n(x, y, y', \dots, y^{(n)})$, где функция $G_n(u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$, определена в области

$$(D) \quad a \leq u_1 \leq b, \quad -\infty < u_k < +\infty, \quad k = 2, 3, \dots, n+1$$

и непрерывна относительно совокупности своих переменных в D , тогда вышеуказанные понятия (множество типа $I_n[a, b]$ и понятие выпуклости) могут быть распространены на множество G_n интегралов дифференциального уравнения

$$(5) \quad G_n(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

В предположении что G_n является множеством типа $I_n[a, b]$ имеет место теорема Polya для уравнения (5), данная нами в работе [2]. Из этой теоремы следует, что неравенства

$$G_n(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) >, \geq, \leq \text{ или } < 0, \quad x \in I \subseteq [a, b]$$

влекут выпуклость, невогнутость, невыпуклость, соотв. вогнутость функции $f(x)$ на интервале I .

Напомним также, что свойство множества M_n быть множеством типа $I_n[a, b]$ равносильно следующему свойству: ни одна функция из M_n не обращается в нуль n раз в $[a, b]$. Это следует из линейности множества M_n . Следовательно, в случае $n=2$, это свойство означает неколеблемость интегралов уравнения (1).

ТЕОРЕМА. — Для того чтобы множество M_n интегралов уравнения (3) было множеством типа $I_n[a, b]$, $n \geq 2$, необходимо и достаточно существование такого уравнения (5), чтобы множество G_n было множеством типа $I_n[a, b]$ и были выполнены условия:

1° если $n=2$, G_n содержит положительную функцию в $[a, b]$, если $n > 2$, G_n содержит функцию $y(x)$ такую что $y(a)=0$ и $y(x) > 0$ для $x \in [a, b]$;

2°. $L_n(y) \leq G_n(x, y, y', \dots, y^{(n)})$, $x \in [a, b]$ для каждой интегралов уравнения (3) в $[a, b]$.

Доказательство получается непосредственно. Необходимость условия теоремы следует из того, что если M_n является множеством типа $I_n[a, b]$, тогда M_n содержит одну функцию $y(x)$, удовлетворяющую условию 1°, и условие 2° также имеет место.

Для доказательства предположим, что условия теоремы выполнены. Неравенство 2° влечёт невыпуклость всех интегралов уравнения (3) относительно множества G_n . Если уравнение (3) имело бы интеграл $V(x)$ обращающийся в нуль n раз, тогда функция $cV(x)$ где c — постоянная, выбранная подходящим образом —, совпадала бы с $y(x)$ в n точках $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ и существовала бы точка x_{n+1} , такая, что $x_n < x_{n+1} \leq b$ и $cV(x_{n+1}) - y(x_{n+1}) < 0$, что противоречит свойству интегралов уравнения (3) быть невогнутыми относительно множества G_n .

Литература

1. В. А. Кондратьев, Элементарный вывод необходимого и достаточного условия неколеблемости решения линейного дифференциального уравнения, Успехи мат. наук. т. 12, 3(75), 159—160, 1957.
2. E. Moldovan, Asupra unor teoreme de medie. Com. Acad. R. P. R. T. 6, 7—12, 1956.
3. E. Moldovan, Sur une généralisation des fonctions convexes Mathematica, 1(24), 1959.
4. H. Poincaré, L'intermédiaire des Mathématiciens. T. 1, 141—144, 1894.
5. G. Polya, On the mean-value theorem corresponding to a given homogeneous differential equation. Trans. Am. Math. Soc. T. 24, 312—324, 1922.
6. De La Vallée Poussin, Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Journ. de Math. pure et appl. (9), 8, 125—144, 1929.

Поступило в редакцию 1.XII.1958.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DES FONCTIONS CONVEXES

par

ELENA MOLDOVAN

à Cluj

Ce travail est divisé en 4 §§. Dans le § 1 nous donnons quelques propriétés des ensembles de fonctions interpolatoires. Les §§ 2 et 3 contiennent la définition et une introduction dans l'étude des fonctions convexes par rapport à un ensemble de fonctions interpolatoires. Dans le § 4, comme application, nous donnons un théorème de la moyenne pour les fonctionnelles continues, définies sur l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle (fini et fermé) donné. La démonstration de ce théorème est basée sur les propriétés des fonctions convexes au sens de la définition du § 2.

Ce travail est lié à l'idée de l'étude de la relation d'un ensemble de fonctions avec un de ses sous-ensembles. Telle par ex. la relation des fonctions définies sur un intervalle donné, par rapport à l'ensemble des polynômes d'un degré donné, ou bien la relation des fonctions continues et dérivables un nombre suffisant de fois, par rapport aux intégrales d'une équation différentielle donnée.

Dans ce travail nous cherchons à éviter la restriction de la linéarité des ensembles des fonctions qui interviennent. Nous soulignons ce fait, puisque les possibilités actuelles de calculs à l'aide des machines électroniques rapides, font que l'aspect non linéaire de certaines théories mathématiques commence à ne plus être un obstacle devant leurs applications pratiques.

Dans ce travail nous avons laissé de côté l'étude des propriétés différentielles des fonctions convexes par rapport à un ensemble interpolatoire. Sur ces questions nous reviendrons dans un autre travail.