

EINE VERALLGEMEINERUNG DER POLAREN THEORIE AUF EILINIE UND EIFLÄCHE

E. GERGELY

Cluj

Die Theorie der ebenen konvexen Figuren, und ebenso die Theorie der konvexen Flächen und Körper ist ein wichtiges und grosses Gebiet der mathematischen Forschung. Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Verallgemeinerung der Polarentheorie auf eine wichtige Klasse der konvexen Figuren und der konvexen Flächen, auf die Eilinen und die Eiflächen.

Wir können diese Verallgemeinerung in mehrfache Weise verwirklichen, verschiedene charakteristische Eigenschaften der Polarverwandtschaft benutzend, natürlich solche Eigenschaften, welche eine Verallgemeinerung auf Eilinen und Eiflächen erlauben.

Im Folgenden beschäftigen wir uns nur mit zwei Möglichkeiten dieser Verallgemeinerung.

Im Ersten definieren wir die Polarkurve im Falle der Eilinie, und die Polarfläche im Falle der Eifläche mit Hilfe der harmonischen Punktepaare, und zweiten nur im Falle der Eilinie — werden wir den Punkten des Planes die sogenannte „konjugierte Kurven“ entsprechen lassen. Diese Kurven sind die geometrische Orte der gemeinsamen Punkte der Tangenten in jenen Punkten einer Eilinie, in welche die Geraden durch den Pol die Eilinie treffen; diese Kurven sind auch Verallgemeinerungen der Polaren im Falle der Kegelschnitte. Diese Verallgemeinerung im Falle der Eifläche ist nicht möglich.

§. 1 Polarkurven und konjugierte Kurven der Eilinen

Im Folgenden verstehen wir unter einer Eilinie eine solche konvexe, geschlossene Kurve, welche in allen Punkten eine bestimmte Tangente besitzt. Wir können bemerken, dass aus der Konvexität der Kurve die monotone Änderung der Tangentenrichtung folgt und auch die Eigenschaft, dass die Kurve keine Ecken hat.

Die Eilinie ist eine Jordankurve und als solche, sie teilt die Punkte seines Planes in innere und äussere Punkte. Für die äussere Punkte können wir den Begriff auf verschiedenen Weisen verallgemeinern.

I. Durch einen äusseren Punkt gehen zwei völlig bestimmte Tangenten an die Eilinie; die Gerade durch die Berührungspunkte dieser Tangenten nennen wir die Polargeraden des betreffenden Punktes.

II. Betrachten wir eine solche Gerade a durch den äusseren Punkt P_1 welche die Eilinie trifft. Die Polarkurve des Punktes P ist der geometrische Ort des Punktes, welcher P von den Schnittpunkten der Geraden a mit der Eilinie harmonisch trennt. Diese Bestimmung hat einen Sinn auch im Falle eines inneren Punktes in Bezug auf die Eilinie und auf solche Weise haben auch alle innere Punkte eine Polarkurve.

Der Begriff I hat einen Sinn nur für die äusseren Punkte der Eilinie.

III. Wir bestimmen die konjugierte Kurve eines Punktes P (inneren oder äusseren) als den geometrischen Ort der Schnittpunkte der Tangenten in den gemeinsamen Punkten der Eilinie und der Geraden durch den Punkt P . Auch diese Kurven sind Verallgemeinerungen des Polaren-Begriffs für die Kegelschnitte.

Im folgenden beschäftigen wir uns mit den Fällen II und III.

1. Polarkurven.

a) Polarkurven eines äusseren Punktes.

Es ist die Einführung einiger neue Begriffe nötig.

Das Dreieck mit Seiten a , und b Tangenten der Eilinie durch den äusseren Punkt K und der Sehne durch die Berührungspunkte A und B dieser Tangenten, nennen wir *Tangentendreieck* des Punktes K (Figur 1).

Die Punkte A und B teilen die Eilinie in zwei Bogen; der eine ist im Inneren des Tangendentriangles, der andere im Äusseren. Wir nennen diesen Bogen der inneren, und den äusseren Bogen für den Punkt K .

Nehmen wir alle solche Geraden durch den Punkt K , welche die Eilinie schneiden. Diese Geraden schneiden auch die Sehne AB . Der Schnittpunkt einer solchen Geraden mit dem inneren Bogen sei C und der harmonisch korrespondierende Punkt zum Punktepaar KD sei E . Die Menge der Punkte E nennen wir *die harmonische Kurve* des inneren Bogens.

Die harmonische Kurve zusammen mit dem inneren Bogen gibt eine Eilinie in der projektiven Ebene; die Polarkurve des Punktes K in Bezug auf der Eilinie ist die Sehne AB .

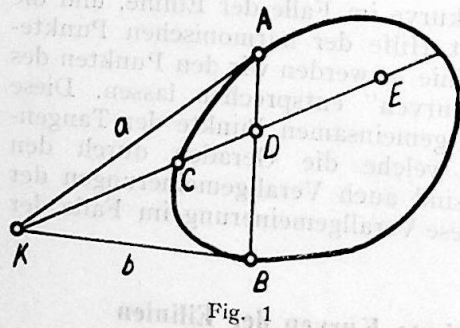


Fig. 1

Beweis: Wir zeigen dass eine Gerade g diese harmonische Kurve höchstens in zwei Punkten schneidet. Wahrlich: einer Schnittpunkt durch unsere Konstruktion entspricht ein einziger Punkt des inneren Bogens und der Geraden g entspricht eine Gerade g' ; diese g' kann den konvexen inneren Bogen höchstens in zwei Punkten schneiden und deshalb ist es wahr auch für *die harmonische Kurve*.

Zum Studieren der Polarkurve es ist nötig die relative Lage zweier Eilinen zu studieren, besonders den Fall eines Kreises und einer Eilinie.

Eine Eilinie und ein Kreis haben Schnittpunkte in gerader Zahl, aber sie können auch einige gemeinsame Bogen besitzen. Diesen letzten Fall werden wir ausschliessen. Beobachten wir alle Kreise in der Ebene der Eilinie. Die maximale Zahl der Schnittpunkte eines Kreises mit der Eilinie nennen wir die *Ordnung der Eilinie in Bezug auf den Kreis*.

Für eine gerade Zahl $2n$ es existiert immer eine Eilinie mit der Ordnung $\geq 2n$ in Bezug auf den Kreis. Nehmen wir auf einem Kreis $2n$ Punkte. Man sieht, dass es möglich ist eine Eilinie zu konstruieren, welche den Kreis in diesen Punkten schneidet und ihre Bogen zwischen den Schnittpunkten wechselseitig im Inneren und im Äusseren des Kreises liegen. Die Ordnung dieser Eilinie, in Bezug auf den Kreis, ist grösser oder gleich mit $2n$.

Die Ordnung in Bezug auf den Kreis können wir für eine Klassifizierung der Eilinen benutzen, entsprechend dem Begriff der Ordnung einer allgemeinen Kurven in Bezug auf die Geraden der Ebene, wo die Ordnung die maximale Zahl der Schnittpunkte der Kurve und der Gerade ist.

Eine Eilinie und eine Gerade haben höchstens 2 Schnittpunkte und so ist die Ordnung — in diesem Sinne — einer Eilinie 2 und die weitere Klassifizierung auf diese Weise ist nicht möglich. Die Ordnung einer Ellipse in Bezug auf den Kreis ist 4, diese Zahl ist die minimale Ordnung der Eilinie in Bezug auf den Kreis.

Ähnlicher Weise können wir für eine Eilinie andere Eilinen konstruieren, welche die Gegebene in gegebener gerader Zahl der Punkte schneiden.

Nach diesem können wir auch die Form der Polarkurve mit Hilfe der harmonischen Kurve studieren.

Es gibt drei mögliche Fälle:

a) die harmonische Kurve liegt im Ganzen im Inneren der Eilinie.

b) die harmonische Kurve liegt im Ganzen im Äusseren der Eilinie.

c) die harmonische Kurve schneidet die Eilinie oder die beiden haben gemeinsame Bogen.

Im Falle a) liegt die Polarkurve ganz im Innern des von der Sehne AB und den äusseren Bogen der Eilinie begrenzten Gebiets und schneidet nicht die Sehne AB (ausser den Punkten A und B). (Figur 2).

Im Falle b) liegt die Po-

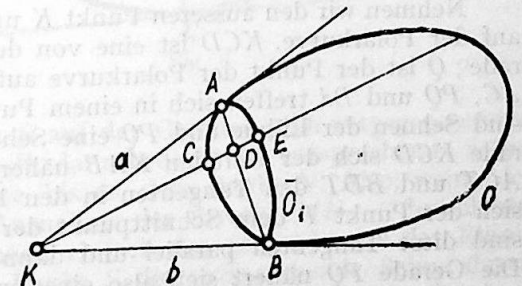


Fig. 2

larkurve im Inneren (ausser den Punkten A und B) des Tangendendreiecks.

Im Falle c) müssen wir 3 Möglichkeiten unterscheiden in Bezug auf die relative Lage der Eilinie und des Bogens O_1 (Figur 3):

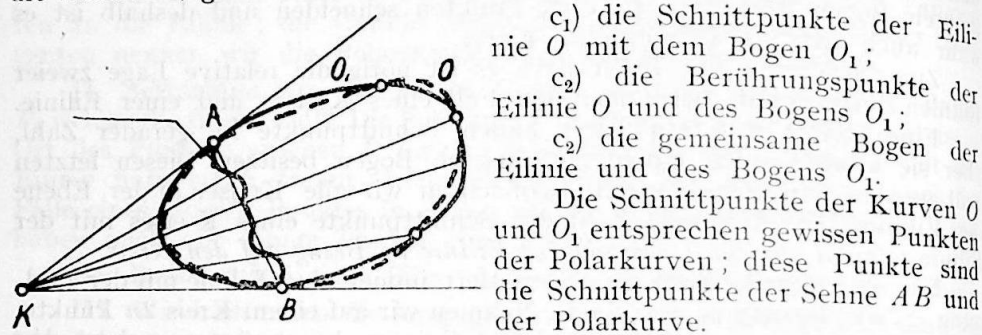


Fig. 3

c_1) die Schnittpunkte der Eilinie O mit dem Bogen O_1 ;
 c_2) die Berührungspunkte der Eilinie O und des Bogens O_1 ;
 c_3) die gemeinsame Bogen der Eilinie und des Bogens O_1 .
 Die Schnittpunkte der Kurven O und O_1 entsprechen gewissen Punkten der Polarkurven; diese Punkte sind die Schnittpunkte der Sehne AB und der Polarkurve.

Die Polarkurve berührt in Punkten, welche den Punkten dem Fall

c_2 entsprechen, die Sehne AB (eventuell in Inflexionspunkten). Im Falle c_3 , ein Theil der Sehne AB ist gemeinsam mit der Polarkurve. Im diesen Falle bildet die Polarkurve zusammen mit dem inneren oder dem äusseren Bogen keine Eilinie.

Diese ist wahr im Allgemeinen auch im Falle a) und b).

Bezeichnen wir mit α (Figur 4) den Winkel zwischen l_1 und c und mit x die orientierte Strecke der Geraden c zwischen dem äusseren Bogen und dem Bogen O_1 (die positive Richtung vom Punkte K nach dem äusseren Bogen). Die Funktion $x(\alpha)$ ist stetig und partialmonoton, oder konstant. Die monotonen Teile der Funktion $x(\alpha)$ entsprechende Bögen sind konkav, respektiv konvex im bezug auf den äusseren Bogen.

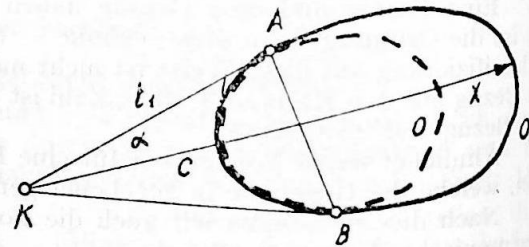


Fig. 4

Eine Polarkurve besitzt in allen Punkten eine Tangente. Wir können diese Tangente sehr leicht konstruieren. (Fig. 5).

Nehmen wir den äusseren Punkt K und seine Polarkurve; P ein Punkt auf der Polarkurve. KCD ist eine von der Geraden KP verschiedene Gerade; Q ist der Punkt der Polarkurve auf der Geraden KCD . Die Geraden AC , PQ und Bd treffen sich in einem Punkt T ; die Strecken AC und BD sind Sehnen der Eilinie und PQ eine Sehne der Polarkurve. Wenn die Gerade KCD sich der Geraden KAB nähert, dann nähern sich die Geraden ACT und BDT den Tangenten in den Punkten A und B und so nähert sich der Punkt T dem Schnittpunkt der Tangenten (im besonderen Falle sind diese Tangenten parallel und dann geht Punkt T ins Unendliche). Die Gerade PQ nähert sich also einer wohl bestimmten Geraden und so hat die Polarkurve in allen seinen Punkten eine wohl bestimmte Tangente.

Die Konstruktion der Tangente ist folglich sehr leicht; wir konstruieren die Tangenten in den Schnittpunkten der Geraden KP und der Eilinie; die Tangente der Polarkurve ist die durch den Punkt P und durch den Schnittpunkte der Tangenten bestimmte Gerade.

Es ist jetzt klar, dass die Änderung der Richtung der Tangente an die Polarkurve stetig ist.

SATZ. Durch alle inneren Punkte der Eilinie geht in jeder Richtung eine einzige Polarkurve.

Mit anderen Worten: wir können für alle zum einem inneren Punkte gehörigen Linienelemente einen einzigen äusseren Punkt so entsprechen lassen, dass für die Polarkurve dieses Punktes der gegebene Linienelement ein Tangentenelement sei.

Beweis: (Figur 6). Es sei P ein innerer Punkt der Eilinie und a eine Gerade durch den Punkt P . Die mit a parallelen Tangenten der Eilinie bezeichnen wir mit b und c und ihre Berührungspunkte mit B und C ; die Schnittpunkte der Geraden a mit der Eilinie mit M und N und schliesslich die Tangenten in diesen Punkten mit m und n . Der Punkt S läuft auf der Geraden vom Unendlichen bis zum Punkt M . Ziehen wir die Sehnen der Eilinie durch die Berührungspunkte der Tangenten durch S . Diese Sehnen bedecken einfach das Innere der Eilinie zwischen der Sehne und dem Punkt M . Wenn der Punkt S auf der Geraden a im entgegengesetzten Sinne vom Unendlichen bis N läuft, dann bedeckt die entsprechende Sehne einfach das Innere von der Sehne bis zu dem Punkt N . Also, wenn der Punkt S die Gerade a — mit Ausnahme der Strecke MN — durchläuft, bedecken die entsprechenden Sehnen einfach das ganze Innere der Eilinie und so geht für einen einzigen Punkt S die entsprechende Sehne durch den Punkt S . Wir haben also die Existenz einer durch den Punkt P gehenden

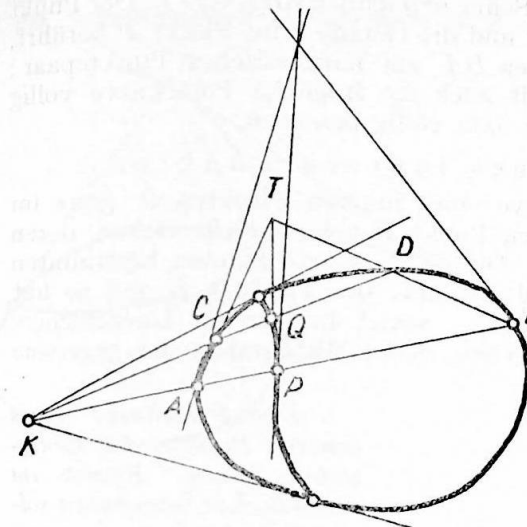


Fig. 5

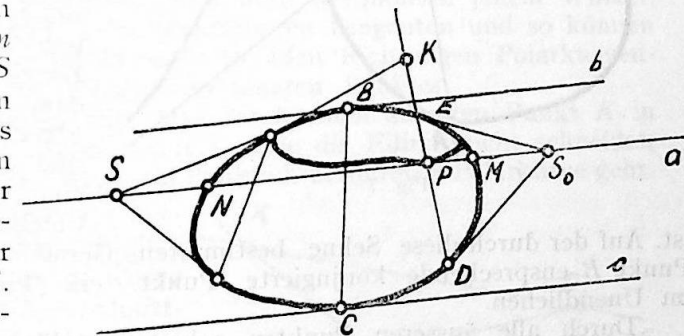


Fig. 6

den und die Gerade a berührenden Polarkurve und weil a eine beliebige durch den Punkt gehende Gerade ist, den ersten Teil unseres Satzes bewiesen. Die Endpunkte der so konstruierten Sehne bezeichnen wir mit D, E . Der Punkt K , dessen Polarkurve durch P geht und die Gerade a im Punkt P berührt, bildet mit P bezüglich den Punkten D, E ein harmonisches Punktepaar; folglich ist der Punkt K und somit auch die fragliche Polarkurve völlig bestimmt und damit ist auch unser Satz völlig bewiesen.

b) Die Polarkurve eines inneren Punktes.

Es ist klar, dass die Polarkurve eines inneren Punktes B ganz im Äusseren der Eilinie liegt. Durch den Punkt B gehen solche Sehnen, deren Mittelpunkt eben der Punkt B ist. Die durch solche Sehnen bestimmten Geraden sind die Asymptoten der Polarkurve des Punktes B und so hat die Polarkurve eines inneren Punktes — soviel Punkte im Unendlichen, wie viele solche Sehnen durch ihn gehen, deren Mittelpunkt der gegebene Punkt ist.

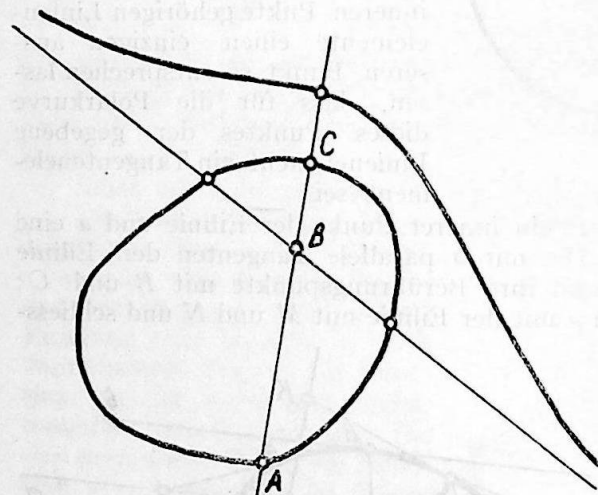


Fig. 7

ist. Auf der durch diese Sehne bestimmten Geraden ist also der dem Punkt B entsprechende konjugierte Punkt. ein Punkt der Polarkurve im Unendlichen.

Durch alle äusseren Punkten gehen unendlich viele Polarkurven. (Figur 8). Es ist klar, dass die Polarkurven der Punkte, welche auf der Polarkurve des Punktes K liegen, durch K gehen. Die Konstruktion der Tangente einer Polarkurve in einem äusseren Punkte ist die folgende; wir nehmen an, dass die Polarkurve zum Punkte B gehört. Die Schnittpunkte der Geraden KP bezeichnen wir mit M und N und den Schnittpunkt der Tangenten der Eilinie in den Punkten M und N mit T . Die gesuchte Tangente ist die durch K und T bestimmte Gerade. Wir können diese Konstruktion auf ähnlicher Weise beweisen, wie im Falle einer Polarkurve durch einen inneren Punkt.

Die Polarkurve eines inneren Punktes hat wenigstens einen Punkt im Unendlichen, also haben solche Polarkurven wenigstens einen ins Unendliche gehenden Zweig. (Figur 7). Eine durch den Punkt B gehende Sehne hat zwei Strecken AB und BC . Es sei $AB > BC$. Durch das Rotieren um B ändern sich die Längen der Strecken stetig. Durch eine Rotation mit dem Winkel π geht die Strecke BC in AB über, und so existiert wenigstens eine Lage der Sehne in welchen B der Mittelpunkt

Hilfssatz. (Fig. 9) Sei K der harmonische Punkt der inneren Punkt B bezüglich den Schnittpunkten AC der Geraden KB — mit der Eilinie, und M der Schnittpunkt der Tangenten in A und C . Die Gerade MK schneidet

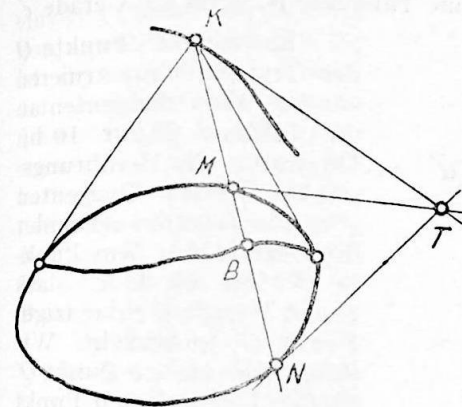


Fig. 8

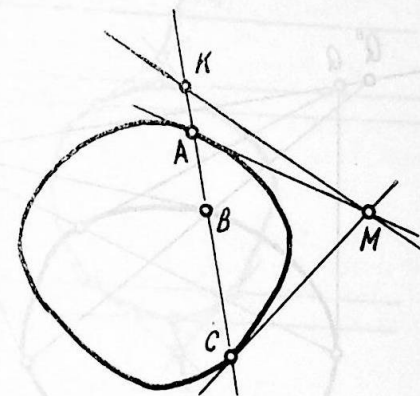


Fig. 9

nicht die Eilinie. Wahrlich, die Eilinie und der Punkt K können nicht in dem von den Geraden MA und MC gebildeten Scheitelwinkel liegen und so MK kann nicht die Eilinie schneiden.

Die Gerade MK ist die Tangente in Punkte K der Polarkurve des Punktes B und auf solche Weise bewiesen wir, dass die Tangenten der Polarkurven durch K die Eilinie nicht schneiden können. Folglich gehen im durch die durch K gehenden Tangenten bestimmten jenem Winkel, in welchen die Eilinie liegt, keine Polarkurven-Tangenten und so können wir durch einen äusseren Punkt nicht in allen Richtungen Polarkurven-tangenten ziehen, wie im Falle eines inneren Punktes.

Im Folgenden beweisen wir, dass durch einen äusseren Punkt K in allen Richtungen, deren bestimmende Gerade die Eilinie nicht schneidet, eine einzige die betreffende Gerade im Punkte K berührende Polarkurve geht.

Wir führen den Begriff der konjugierte Kurve eines Punktes bezüglich der Eilinie ein. Die konjugierte Kurve ist der geometrische Ort der Schnittpunkte des in den Endpunkten der durch den betreffenden Punkt gehenden Sehne gezogene Tangenten. Wir werden die konjugierte Kurve eines äusseren Punktes K studieren (Figur 10 a). Wir sollen beweisen, dass eine durch K gehende und die Eilinie nicht schneidende Gerade e die konjugierte Kurve des Punktes K in einem einzigen Punkt C schneidet. In diesem

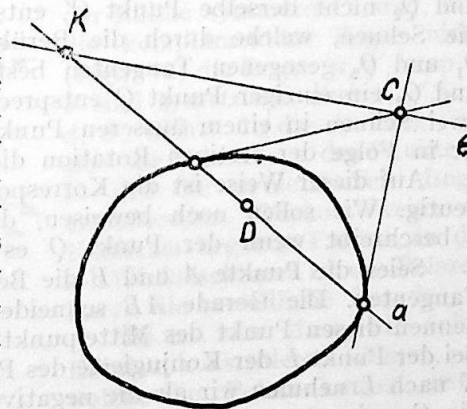


Fig. 10 a

Falle geht — die durch den Berührungspunkten der durch c gehenden Tangenten gehende Gerade α durch K . Sei D der harmonisch — konjugierte Punkt des K auf der Geraden a bezüglich der Eilinie. Die Polarkurve des Punktes D geht durch K und seine Tangente ist eben die Gerade e .

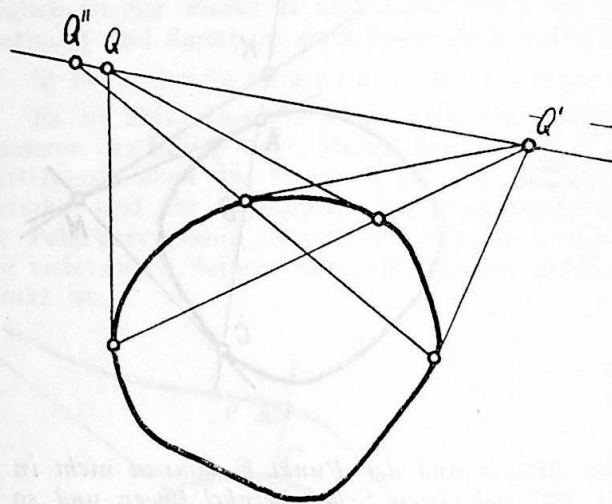


Fig. 10b

Aus einem Punkte Q der Geraden e konstruieren wir die zwei Tangenten an die Eilinie. (Figur 10 b). Die durch die Berührungspunkte dieser Tangenten gehende Gerade schneidet die Gerade e in dem Punkte Q' . Es ist klar, dass einem Punkte Q ein einziger Punkt Q' entspricht. Wir bezeichnen diesen Punkt Q' als den konjugierten Punkt des Punktes Q auf der Geraden e .

Eine Bemerkung. Die zwischen den Punkten Q und Q' bestehende Korrespondenz ist bei der Ellipse

involutorisch, aber bei einer Eilinie ist es im Allgemeinen nicht.

Nach diesem bezeichnen wir den konjugierten Punkt des Punktes Q' mit Q'' , den Konjugierten des Punktes Q'' mit Q''' und so weiter. Es ist eine offene Frage ob diese Korrespondenz nur bei der Ellipse für alle Punkte aller Geraden involutorisch ist oder nicht. Wenn für die Punkte $Q, Q', Q'', \dots, Q^{(n)}, Q^{(n)} = Q$, dann nennen wir die Folge der Punkte eine Kette vom Grad n . Auch in Verbindung mit diesem Begriff gibt es viele Schliessungsprobleme.

Wenn Q die Gerade e beschreibt, dann kann verschiedenen Punkten Q_1 und Q_2 nicht derselbe Punkt Q' entsprechen. Wahrlich, beobachten wir die Sehnen, welche durch die Berührungspunkte der aus den Punkten Q_1 und Q_2 gezogenen Tangenten bestimmt sind. Wenn den Punkten Q_1 und Q_2 ein einziger Punkt Q entsprechen würde, dann würden sich diese zwei Sehnen in einem äusseren Punkt der Eilinie schneiden, aber dieses ist in Folge der stetigen Rotation dieser Sehnen nicht möglich.

Auf dieser Weise ist die Korrespondenz der Punkte Q und Q' ein-eindeutig. Wir sollen noch beweisen, dass der Punkt Q' die ganze Gerade e beschreibt wenn der Punkt Q es tut.

Seien die Punkte A und B die Berührungspunkte der mit e parallelen Tangenten. Die Gerade AB schneidet die Gerade e im Punkte K ; wir nennen diesen Punkt des Mittelpunkt der Geraden bezüglich der Eilinie. Sei der Punkt L der Konjugierte des Punktes K . Die Richtung vom Punkte K nach L nehmen wir als die negative Richtung. Der Punkt Q beschreibe die Gerade e vom Punkt $+\infty$ bis zum Punkt $-\infty$. Dem unendlichen

Punkt der Geraden entspricht der Punkt K . Wenn O im Intervall $[+\infty, K]$ liegt, dann ist es klar, dass Q' im Intervall $[K, -\infty]$ liegt.

Konstruieren wir die konjugierte Kurve des unendlichen Punktes der Geraden e (Figur 11). Diese Kurve schneidet die Gerade e in einem einzigen Punkte K_1 und der konjugierte Punkt des K_1 ist der unendliche Punkt der Geraden e . Wir nennen diesen Punkt K_1 das Quasizentrum der Geraden bezüglich der Eilinie (bei der Ellipse sind die Punkte K und K_1 identisch, der Punkt L ist der unendliche Punkt der Geraden e).

Die Lage des Punktes Q' , infolge seiner Konstruktion, ist eine stetige Funktion der Lage des Punktes Q (ausser dem Punkte K_1).

Wenn Q das Intervall $[+\infty, K]$ beschreibt, dann beschreibt der Punkt Q' die Strecke von K bis L ; und wenn Q sich im Intervall KK_1 bewegt, so beschreibt Q' das Intervall $[L, -\infty]$, und endlich, wenn Q das Intervall $[K_1, -\infty]$ beschreibt, dann geht Q' von $+\infty$ bis zum Punkt K . Unser Resultat ist, dass Q' die ganze Gerade e beschreibt und so haben wir den für die Richtungen der durch einen äusseren Punkt gehenden Polarkurven betreffenden Satz bewiesen.

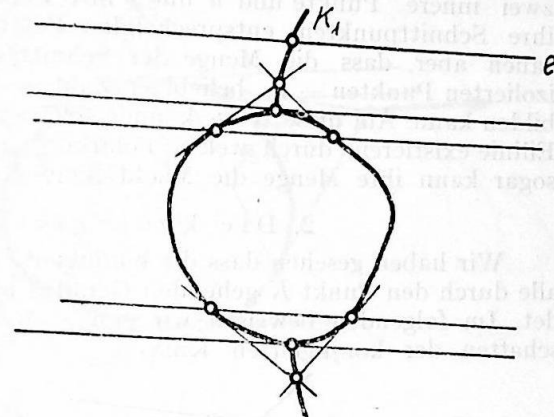


Fig. 11

Einige spezielle Eilinen

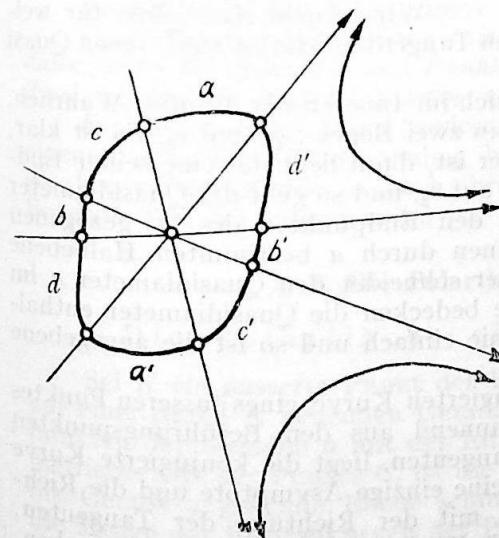


Fig. 12

Interessante spezielle Eilinen sind jene, welche ein sogenanntes Partialzentrum O haben, also bei welchen ein Punkt in ihrer Ebene existiert, für welchen einige Bogen der Eilinie symmetrisch sind, aber die komplementäre Bogen nicht, (Figur 12) die Bogen a, a' , resp. b, b' sind symmetrisch, aber c, c' , und d, d' nicht). In diesem Falle besitzt die Polarkurve des Punktes O in den die symmetrischen Bogen enthaltenden Winkeln keine im Endlichen liegende Punkte, in diesen Winkelsektoren ist die Polarkurve die unendliche Gerade.

Es ist klar dass wir solche Eilinen konstruieren können, für welche die Polarkurven zweier

verschiedenen Punkte Schnittpunkte im vorher gegebenen Zahl besitzen, es existieren sogar auch solche Eilinen für welche einige Polarkurven identische Bogen haben. Folglich gibt es für die Zahl der Polarkurven durch zwei Punkte keinen allgemeinen Satz. Wahrlich wenn A und B zwei innere Punkte und a und b ihre Polarkurven sind, dann gehen alle ihre Schnittpunkte entsprechenden Polarkurven durch A und B . Wir sahen aber, dass die Menge der Schnittpunkte zweier Polarkurven aus isolierten Punkten — in beliebiger Zahl — bestehen, sogar stetige Bogen bilden kann. Auf diese Weise können solche Punktepaare in der Ebene einer Eilinie existieren, durch welche Polarkurven in gegebener Zahl gehen und sogar kann ihre Menge die Mächtigkeit des Kontinuums haben.

2. Die konjugierten Kurven

Wir haben gesehen dass die konjugierte Kurve eines äusseren Punktes alle durch den Punkt K gehenden Geraden in einem einzigen Punkt schneidet. Im folgenden beweisen wir einige einfachen, aber wichtigen Eigenschaften der konjugierten Kurven.

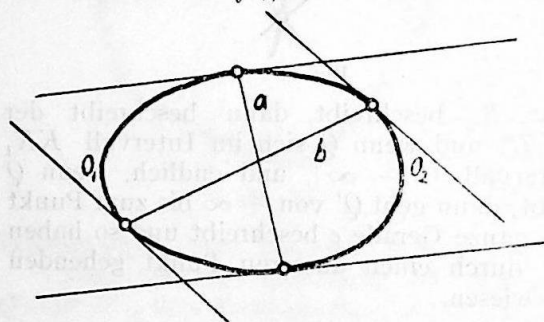


Fig. 13

che die in ihrem Endpunkten gezogenen Tangenten parallel sind, einen Quasidiameter der Eilinie.

Zwei Quasidiameter schneiden sich im Inneren der Eilinie. Wahrlich, eine Quasidiameter a teilt die Eilinie in zwei Bogen: o_1 und o_2 . Es ist klar, dass wenn b ein anderer Quasidiameter ist, dann liegt der eine seiner Endpunkte auf dem Bogen o_1 , der andere auf o_2 , und so geht der Quasidiameter b im Streifen, welcher durch die in den Endpunkten des a gezogenen Tangenten bestimmt ist, von der einen durch a bestimmten Halbebene in die andere Halbebene, das heisst er schneidet den Quasidiameter a im Inneren der Eilinie. In solcher Weise bedecken die Quasidiameter enthaltenen Geraden das Äussere der Eilinie einfach und so ist die angegebene Eigenschaft bewiesen.

Die Form und die Lage der konjugierten Kurve, eines äusseren Punktes K ist in Figur 14 angedeutet. Beginnend aus den Berührungspunkten A, B der vom Punkte K gezogene Tangenten, liegt die konjugierte Kurve ganz im Äusseren der Eilinie, sie hat eine einzige Asymptote und die Richtung dieser Asymptote ist identisch mit der Richtung der Tangenten, welche durch die Endpunkte des durch K gehenden Quasidiameters gehen.

Die konjugierte Kurve eines äusseren Punktes K hat einen einzigen Zweig und dieser hat einen Punkt im Unendlichen. (Figur 13).

Es ist nur nötig zu beweisen, dass durch den Punkt K nur eine solche, die Eilinie schneidende Gerade geht für welche die in seinen mit der Eilinie gebildeten Schnittpunkten gezogenen Tangenten parallel sind.

Wir nennen eine Sehne für wel-

Die konjugierte Kurve eines inneren Punktes B hat soviel ins unendliche gehende Zweige, wie viele Quasidiameter durch den Punkt B gehen. Diese Eigenschaft ist evident.

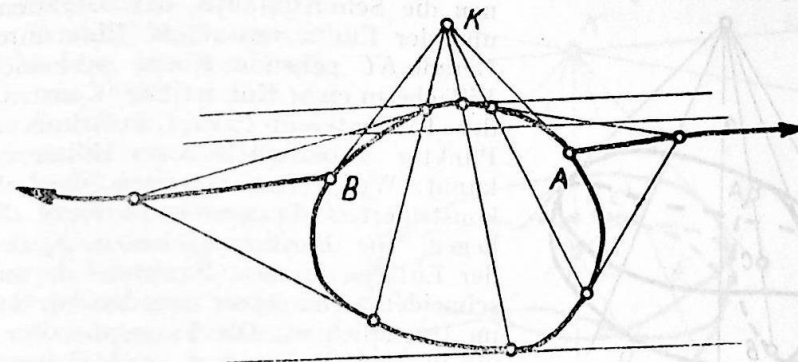


Fig. 14

Für eine zentral-symmetrische Ovale (mit dem Zentrum O), ist die konjugierte Kurve des Punktes O die unendliche Gerade.

Die konjugierten Kurven zweier inneren Punkten schneiden sich in einem einzigen Punkte.

Sei der Punkt M der Schnittpunkt der konjugierten Kurve G_P des Punktes P und der konjugierten Kurve G_Q des Punktes Q . Dann, nach der Definition der konjugierten Kurve soll die durch die Berührungspunkte der durch M gehenden Tangenten bestimmte Sehne durch die Punkte P und Q gehen und so ist der Punkt M eindeutig bestimmt (M ist eventuell im Unendlichen).

Es gilt auch der Allgemeinere

SATZ: Die konjugierte Kurven zweier Punkte schneiden sich dann und nur dann, wenn die durch die zwei Punkte bestimmte Gerade die Eilinie schneidet. Zwei konjugierte Kurven können nur einen einzigen Schnittpunkt haben.

Eine Bemerkung. Diese bewiesenen Eigenschaften sind mit den Polareigenschaften der Ellipse analog, beobachtend dass im Falle der Ellipse die konjugierte Kurve — nach ihrer Definition — nur der im Äusseren liegende Teil der Polargeraden ist.

§ 2. Die Polarthorie der Eiflächen

1) Die Polarfläche eines äusseren Punktes.

Sei K ein äusserer Punkt der Eifläche O (Figur 15). Wir konstruieren auf einer durch K gehenden Geraden a den mit K bezüglich den Schnittpunkten der Geraden a mit der Eifläche harmonischen Punkt C : der geometrische Ort der Punkte C , ist die Polarfläche des Punktes K . Eine durch die Gerade a gehende Ebene schneidet die Eifläche in einer Eilinie und die Menge der Polarkurven des Punktes K bezüglich dieser Eilinie gibt die Polarfläche.

SATZ: Die Polarfläche eines äusseren Punktes besitzt in allen Punkten eine wohl bestimmte Tangentenebene.

Sei C ein beliebiger Punkt der Polarfläche des Punktes K . Wir bezeichnen die Schnittpunkte der Geraden KC und der Eilinie mit A, B . Eine durch die Gerade KC gehende Ebene schneidet die Eifläche in einer Eilinie. Die Konstruktion der Tangente an C den Polarkurven des Punktes K bezüglich dieser Eilinie ist bekannt. Wir wollen beweisen, dass alle so konstruierten Tangenten in einer Ebene liegen. Die Berührungsebenen ϕ_1 und ϕ_2 der Eifläche in den Punkten A und B schneiden sich in einer Geraden b (eventuell im Unendlichen). Die Tangenten der Eilinie in den Punkten A und B liegen in den Ebenen ϕ_1, ϕ_2 und so liegt ihr Schnittpunkt auf der Geraden b . Auf diese Weise gehen die Tangenten der Polarkurven durch den Schnittpunkt der Eilinen-Ebene mit der Geraden b , folglich liegen alle diese Tangenten in der von b und dem Punkt C determinierten Ebene; diese ist die Tangentenebene der Polarfläche in dem Punkte C .

Bemerken wir, dass mit der stetigen Änderung des Punktes C auf der Polarenflächen, sich auch die Punkte A, B stetig ändern und folglich auch die Ebenen ϕ_1, ϕ_2 und so auch die Gerade b ; aus diesem folgt, dass auch die Änderung der Richtung der Berührungsebene der Polarfläche stetig ist.

SATZ: In einem inneren Punkt sind alle Flächenelemente die Tangentialelemente der Polarflächen und zu einem Flächenelement gehört eine einzige Polarfläche.

Im Zusammenhang mit diesen Problem, definieren wir die zum Punkt P (innerer oder äusserer) bezüglich der Eifläche adjungierte Kongruenz der Geraden. Durch den Punkt P geht eine Menge der die Eifläche schneidenden Geraden; die Menge der Schnittgeraden der durch die Schnittpunkte der Eifläche mit der fraglichen Geraden gehenden Berührungsebenen bildet die zum Punkt adjungierten Geradenkongruenz. Zwischen der durch den Punkt P gehenden Geraden und der Geraden der Kongruenz besteht eine ein-eindeutige Beziehung.

Studieren wir die durch einen äusseren Punkt K gehenden Geraden der Kongruenz. (Fig. 16) Sei P ein innerer Punkt. Die auf den Punkt K bezügliche Tangentenkurve (der geometrische Ort der Berührungspunkte des vom Punkte K zur Eifläche gezogenen Tangente), nennen wir E . Die Schnittpunkte der Eifläche und den von den Punkten der Kurve E und von dem Punkt P bestimmten Sehnen beschreiben auf der Eifläche auch eine andere Kurve E_1 und wir nennen diese die bezüglich dem Punkte P projizierte Kurve der E Kurve. Die projizierte Kurve ist der Komplementäre

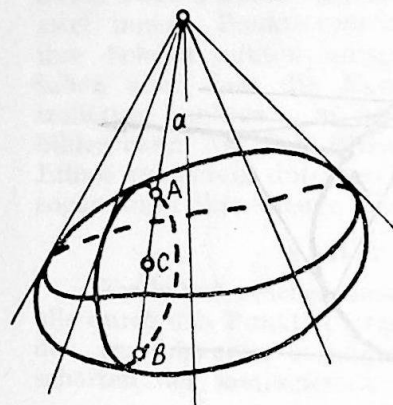


Fig. 15

Teil der Kurve E und von der Spitze P bestimmten Kegel. Sei C ein Schnittpunkt der Kurven E und E_1 (wenn solche Schnittpunkte existieren). C ist ein Punkt der Kurve E und so schneidet die Gerade CP die Eifläche in einem Punkte C' der Kurve E_1 . Der Punkt C liegt aber auch auf E_1 und so ist der Punkt C' auch ein Schnittpunkt der Kurven E und E_1 . Auf dieser Weise können sich die Schnittpunkte der Kurven E und E_1 in solche Punktepaare einordnen lassen dass die von einem Paare bestimmten Sehnen durch den Punkt P gehen. Die durch ein solches Punktepaar bestimmten Berührungsebenen schneiden sich in einer — durch K gehende — Geraden der zum P adjungierten Geradenkongruenz. In solcher Weise gehen so viele Kongruenzgeraden durch den Punkt K , wie die Hälfte der Zahl der Schnittpunkte der Kurven E und E_1 .

Für einen äusseren Punkt K und für ihre Tangentenkurve E existieren solche inneren Punkte P der Eifläche, für welche die projizierte Kurve die Kurve E schneidet und solche, für welche diese die E nicht schneidet. Die Mengen dieser Punkte — wir nennen sie D und D' — bilden im Inneren der Eifläche Gebiete infolge der Stetigkeitseigenschaften der Eifläche. Die Grenzfläche dieser Gebiete ist der geometrische Ort jener Punkte, für welche die Kurve E und ihre projizierte Kurve sich wenigstens in einem Punkte berühren, weil sie auf demselben von der Kurve E bestimmten Teil der Eifläche liegen. Für die Punkte des Gebiets D und für ihre Grenzpunkte hat die adjungierte Kongruenz durch den Punkt K gehende Geraden, aber für die Punkte des Gebiets D' besitzt die konjugierte Kongruenz keine solche Geraden.

Auf dieser Weise bewirkt ein äusserer Punkt eine Einteilung der inneren Punkte der Eilinie in Gebiete.

Wir besitzen also ein Bild von den Geraden der adjungierten Kongruenz.

Eine Bemerkung. Mit einer analogen Konstruktion können wir für einen beliebige Kurve E auf der Eilinie — nicht für die Tangentenkurven der äusseren Punkte — die projizierte Kurve E_1 bezüglich der inneren Punkte bestimmen. Die Menge solcher inneren Punkte, für welche E und E_1 0, 2, 4, ..., $2n$... Schnittpunkte besitzen, nennen wir $D_0, D_2, D_4, \dots, D_{2n}, \dots$. Auf dieser Weise bewirken alle Kurven eine Einteilung der inneren Punkte der Eifläche in Gebiete und durch eine analoge Konstruktion bekommen wir eine Einteilung der äusseren Punkte.

Den durch einen inneren Punkt B gehenden Sehnen h entspricht eine Menge k der Kongruenzgeraden und die Menge s der Ebenen ist von den

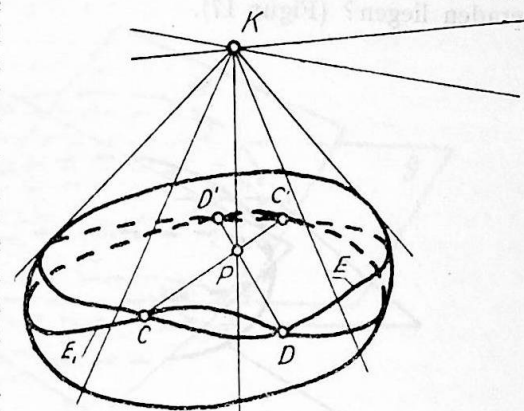


Fig. 16

k und dem Punkt B bestimmt. Es ist eine offene Frage, ob s alle durch den Punkt B gehenden Ebenen enthält, oder mit anderen Worten, ob in jeder durch den Punkt B gehenden Ebene eine oder mehrere Kongruenzgeraden liegen? (Figur 17).

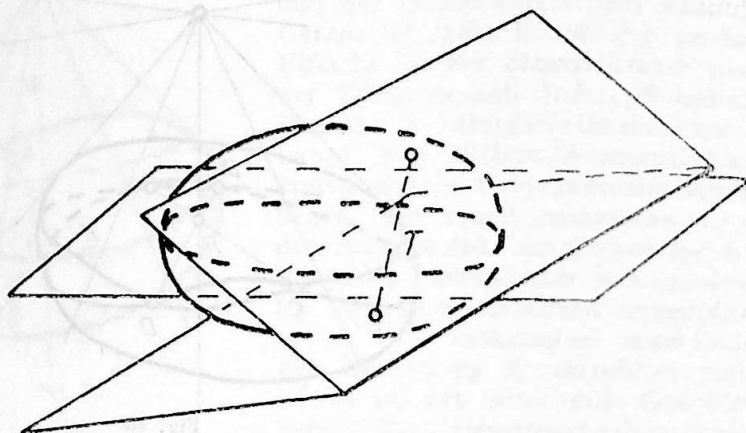


Fig. 17

Sei S eine durch den Punkt B gehende Ebene. Bestimmen wir die durch eine, die Eifläche nicht schneidende Gerade gehenden Berührungsebenen, und die Berührungspunkte dieser Ebenen, sowie die diese Punkte enthaltenden Sehne, welche die Ebene S in einem Punkte T der Schnittlinie der Eifläche mit S schneidet. Die Menge der Punkte T ist infolge Stetigkeitseigenschaften der Eifläche ein einfach zusammenhängendes, geschlossenes Gebiet, dessen Grenzlinie eben die Eilinie ist, also das Innere der Eilinie.

Wir haben also bewiesen, dass in der Ebene S wenigstens eine Gerade e der zum Punkte B adjungierten Geradenkongruenz existiert, also wenigstens eine Gerade mit der folgenden Eigenschaft: die von den Berührungspunkten der durch e gehenden Berührungsebenen bestimmte Sehne enthaltende Gerade geht durch den Punkt P . Auf dem diese Sehne enthaltenden Geraden bestimmen wir den zum Punkt B harmonischen Punkt bezüglich der Eifläche. Die Tangentenebene der Polarfläche dieses Punktes ist eben die gegebene Ebene S .

Im folgenden beweisen wir, dass in einem inneren Punkt jedes Flächenelement nur für eine einzige Polarfläche Tangentenelement ist. (Figur 18). Die Ebene s des gegebenen Flächenelementes schneidet die Eifläche in einer Eilinie O . Nehmen wir alle äusseren in der Ebene s liegenden Parallelkurven $O(d)$ der Eilinie O , wo die d Entfernung der zwei Kurven ist. Die Ebene s teilt die Eifläche in die Teile O_1 und O_2 . Durch die Tangenten der Kurve $O(d)$ bestimmen wir die Tangentenebenen zur Eifläche. Es ist klar, dass der Berührungspunkt der einen dieser Ebenen in O_1 , der der anderen in O_2 liegt. Der geometrische Ort der so konstruierten Berührungspunkte für ein gegebenes $O(d)$ besteht aus zwei geschlossenen stetigen Kurven,

$g_1(d)$ in O_1 und $g_2(d)$ in O_2 . Wenn d von 0 bis $+\infty$ wächst, bedecken $g_1(d)$ und $g_2(d)$, O_1 , respektive O_2 von der Eilinie O bis zum Punkte C und D , welche die Berührungspunkte der mit s parallelen Berührungsebenen

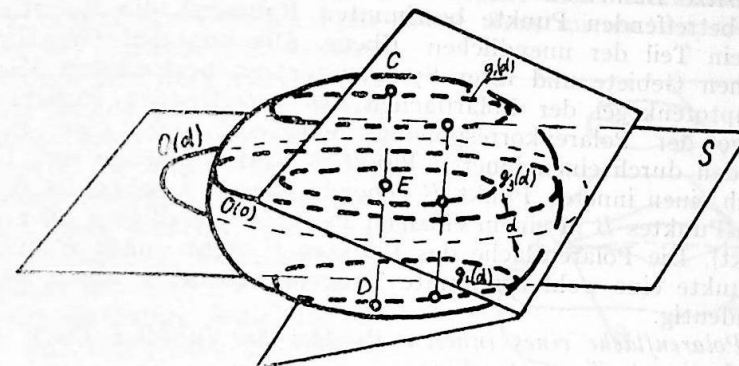


Fig. 18

sind. Die Kurven $g_1(d)$ und $g_2(d)$ bedecken einfach die Flächen O_1 respektive O_2 . Wahrlich, zwei Kurven $g_i(d_1)$ und $g_i(d_2)$ ($i = 1, 2$) können einander nicht schneiden oder berühren, weil in einem Schnittpunkte oder Berührungspunkte — wenn dieses existierte — die Eifläche eine wohl bestimmte Tangentenebene hat und diese die Ebene s in einer ähnlich wohl bestimmten Geraden schneidet. Die Konstruktionsweise der Kurve $g_1(d)$ und $g_2(d)$ bestimmt eine ein-eindeutige Beziehung zwischen ihren Punkten. Die von entsprechenden Punkten bestimmten Sehnen gehen durch innere Punkte der Eilinie O infolge der Konvexität der Eifläche. Für eine bestimmte d beschreiben die so bestimmten Punkte eine Kurve $g_3(d)$. Wenn d von 0 bis ∞ wächst bedecken die Kurven $g_3(d)$ einfach das Innere der Eilinie O und konvergieren nach dem Schnittpunkt E der Gerade CD mit der Ebene s . Durch alle inneren Punkte der Eilinie geht eine einzige Kurve $g_3(d)$. Wenn durch einen Punkt zwei solche Kurven $g_3(d_1)$ und $g_3(d_2)$ gehen würden, dann würden die entsprechenden $g_1(d_1)$, $g_2(d_1)$ und $g_1(d_2)$, $g_2(d_2)$ Kurven solche Lage besitzen, welche mit ihren Konstruktion im Gegensatz wäre.

In dieser Weise haben wir bewiesen, dass allen Geraden e der Ebene s ein einziger solcher Punkt der Eilinie oder ein einziger innerer Punkt entspricht, durch welchen eine einzige der Geraden e entsprechende Sehne geht und mit diesem haben wir unseren Satz bewiesen.

2. Die Polarfläche eines inneren Punktes

Die Polarfläche eines inneren Punktes B liegt ganz im äusseren der Eifläche. Auf solchen durch B gehenden Geraden, für welche B der Mittelpunkt der auf der Geraden liegenden Sehne ist, hat die Polarfläche unendliche Punkte. In allen durch B gehenden Ebenen hat die Polarfläche unendliche Punkte, Wahrlich eine solche Ebene schneidet die

Eifläche in einer Eilinie und so ist unsere Behauptung eine Folge einer vorher bewiesenen Eigenschaft der inneren Punkte. Es ist möglich, dass die Eifläche symmetrische Gebiete oder Kurven bezüglich einiger inneren Punkte besitze. Dann ist in dem von den symmetrischen Gebieten — Kurven — und den betreffenden Punkte bestimmten Raumteil die Polarfläche des Punktes ein Teil der unendlichen Ebene. Die von den Grenzlinien der symmetrischen Gebiete und ihrer Symmetriezentren bestimmten Kegel sind die Asymptotenkegel der Polarflächen des betreffenden Punktes.

Infolge der Polarenkorrespondenz existiert auch eine Beziehung zwischen den durch einen inneren Punkt gehenden Ebenen und Geraden. Eine durch einen inneren Punkt B gehende Gerade c schneidet die Polarfläche des Punktes B in einem einzigen Punkt P (endlicher oder unendlicher Punkt). Die Polarenfläche des Punktes P geht durch B und hat in diesem Punkte eine wohl bestimmte Tangentenebene S . Diese Beziehung ist ein-eindeutig.

Die Polarenfläche eines inneren Punktes hat in allen ihren Punkten eine wohl bestimmte Tangentenebene.

Sei der Punkt K ein Punkt der Polarenfläche des inneren Punktes B . Die Gerade KB schneidet die Eifläche in den Punkten A, C ; die durch KB gehenden Ebenen schneiden die Eifläche in Eiliniën, und die Polarenfläche in durch K gehende ebene Kurven. Die Tangente dieser Kurve im Punkte K ist durch diesen Punkt und durch den Schnittpunkt D der Tangenten der Eilinie in den Punkten A, C bestimmt. Der Punkt D liegt in den Berührungsebenen der Punkte A und B , also auf ihrer Schnittlinie c . Auf dieser Weise liegen die Tangenten der auf der Polarenfläche liegenden und durch K gehenden Kurven in der von dem Punkte K und der Geraden c bestimmten Ebene. Diese Ebene ist die Berührungsebene der Polarenfläche.

Eine durch einen äusseren Punkt gehende und die Eifläche nicht schneidende Ebene ist die Berührungsebene einer einzigen zum inneren Punkte gehörenden Polarenfläche.

Eine durch K gehende aber die Eifläche schneidende Ebene kann nicht Tangentenebene einer Polarfläche sein. Die durch den Punkt K gehenden Polarflächen entsprechen den Punkten der Polarfläche des Punktes K .

Sei B einer dieser Punkte. Die durch die Gerade KB gehenden Ebenen schneiden die Eifläche in Eiliniën. Die Tangenten des Polarkurven des Punktes B bezüglich dieser Eiliniën, welche in der durch K gehenden Berührungsebene sind — liegen — nach einer bei den Eiliniën bewiesenen Eigenschaft — im äusseren der Eiliniën und so im äusseren der Eifläche.

Sei B ein Punkt der Polarfläche eines äusseren Punktes K . Die Polarfläche des Punktes B geht durch K und hat dort eine wohl bestimmte Tangentenebene. In dieser Weise entspricht eine durch K gehende Ebene der Geraden KB . Diese Ebene sind durch die zum Punkte K adjungierten Kongruenzgeraden bestimmt und eine solche Ebene enthält gerade die der Geraden KB entsprechenden Kongruenzgeraden.

Einer erzeugenden Geraden des berührenden Kegels entspricht die Berührungsebene.

Wir müssen also beweisen dass in einer durch K gehenden und die Polarfläche nicht schneidenden Ebene eine einzige Gerade der Kongruenz liegt.

Sei s eine durch K gehende die Eifläche nicht schneidende Ebene (Figur 19). Durch die Geraden a der Ebene konstruieren wir die Tangentenebenen der Eifläche und bezeichnen die durch ihre Berührungspunkte bestimmte Gerade mit a_1 . Die Berührungspunkte jener Tangentenebenen, welche durch die durch den Punkt K gehenden Geraden bestimmt sind, liegen auf einer Kurve e , die entsprechenden Geraden a_1 verknüpfen die Punktepaare der Kurve e und geben so eine ein-eindeutige Beziehung der Kurve e mit sich selbst. Sei $k(r)$ ein Kreis der Ebene s mit dem Zentrum K und mit dem Radius r und wir wollen durch alle Tangenten dieses

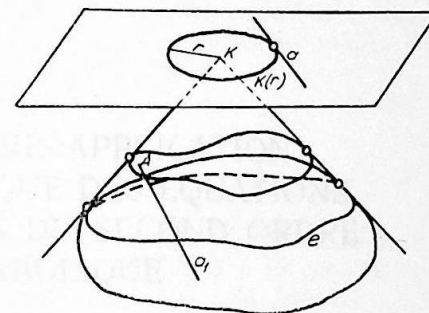


Fig. 19

Kreises die Tangentenebenen der Eifläche konstruieren. Die entsprechenden Geraden a verknüpfen zwei Punkte der Eifläche: der eine Punkt liegt auf der Fläche O_1 , der andere auf O_2 , wo O_1 und O_2 die von der Kurve e bestimmten Teile der Eifläche sind. Diese Tatsache ist eine Folge der stetigen Änderung der Tangentenebenen. Auf dieser Weise schneiden die Geraden a_1 den Kegelmantel K_1 des Berührungskegels auf seinem zwischen Punkte K und der Kurve e liegenden Teile in einem einzigen Punkt A (der Berührungskegel ist eine konvexe Fläche) und so entspricht einer jeden Geraden a der Ebene s ein einziger Punkt A . Die der Tangenten des Kreises $k(r)$ entsprechende Punkte A beschreiben auf K_1 eine stetige geschlossene Kurve $g(r)$. Jene Gerade, welche die Berührungspunkte der mit s parallelen Berührungsebenen verbindet, schneidet K_1 im Punkte P . Die den durch K gehenden Geraden entsprechende Kurve ist die Kurve e . Bei wachsender r beschreiben die Kurven $g(r)$ die ganze Fläche K_1 von der Kurve e bis zum Punkt P , K_1 einfach bedeckend. Auf dieser Weise geht für ein gewisses r_0 die Kurve $g(r_0)$ durch K und dem Punkte K , als einem Punkt der Kurve $g(r_0)$, entspricht eine einzige Tangente b des Kreises $k(r_0)$. Nach der gegebenen Konstruktion geht die Gerade b_1 — welche die Berührungspunkte der durch b gehenden Tangentenebenen enthält — durch K . Diese b_1 schneidet die Polarfläche des Punktes K in einem Punkte B und die Ebene s ist die Tangentenebene der Polarfläche des Punktes K . Die Konstruktion ist eindeutig und so haben wir unseren Satz bewiesen.

Eingegangen am 25 XI. 1959.