

BIBLIOGRAFIE

1. H. Löwner, Über monotone Matrixfunctionen Mat. Zeit. 38. 1934. p. 177—216
2. D. V. Ionescu, Integrarea ecuației funcționale

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(x+h) & f(x+2h) \\ f(x+h) & f(x+2h) & f(x+3h) \\ f(x+2h) & f(x+3h) & f(x+4h) \end{vmatrix} = 0$$

Sesiunea științifică a Academiei R.P.R. Filiala Cluj

Reçu le 15 mars 1958.

SUR UN PROBLÈME AUX LIMITES QUI INTERVIENT DANS UN PROJET D'UNE CHAUDIÈRE À VAPEUR

par

C. KALIK

à Cluj

1. Dans son travail [1] L. NÉMETI s'occupe d'un problème qui se pose lorsqu'on veut établir le projet d'une chaudière tubulaire à vapeur ayant un passage forcé. L'auteur propose une méthode de calcul de la tension thermique dans les murs du tube. Cependant, pour calculer la tension thermique il est nécessaire de connaître la température, ce qui exige la résolution d'un problème aux limites. Le but du présent travail est de donner la résolution de ce problème aux limites.

D'abord, nous introduisons les signes ci-dessous utilisés et formulons le problème aux limites. Soit r , φ , z des coordonnées cylindriques dans l'espace à trois dimensions. Le tube de la chaudière est déterminé par les inégalités suivantes :

$$r_0 \leq r \leq r_0 + s; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad -L \leq z \leq +L$$

où r_0 est le rayon intérieur, s l'épaisseur et $2L$ la longueur du tube. Le champ thermique peut être considéré comme étant le même dans chaque section du tube avec le plan $\varphi = \text{constante}$. Le phénomène devient statique à un moment donné, donc la fonction u qui nous donne les valeurs de la température doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(1.1) \quad A(u) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

à chaque point du mur du tube.

Les conditions aux limites sont déterminées par les données suivantes : à l'extérieur du tube on maintient un régime constant de telle manière que le flux de chaleur soit la constante Q . Supposons que la chaleur ne passe pas par les extrémités $z = \pm L$ du tube, ce qui signifie qu'ici le

flux est égal à zéro. L'eau dans le tube parvient jusqu'au niveau $z = 0$, tandis qu'au-dessus de ce niveau il y a de la vapeur. Supposons aussi qu'à la surface intérieure du tube le flux de chaleur est proportionnel à la température. En vertu de ces données on obtient les conditions aux limites suivantes : $\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{Q}{k}$ à la surface extérieure du tube, $\frac{\partial u}{\partial v} = 0$ aux extré-

mités du tube, et $\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{h}{k}u$ à la surface intérieure du tube. Ici v est la normale extérieure de la surface du tube, k est le coefficient de conductibilité thermique et h est le coefficient de transfert thermique. Il est à noter que h est égal à la constante h_1 pour l'eau et à la constante h_2 pour la vapeur. Nous allons écrire les conditions aux limites que nous venons de formuler plus haut en une seule formule :

$$(1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial v} - \gamma u = \psi$$

où $\gamma \geq 0$, tandis que la mesure des points pour lesquels γ est strictement positive est plus grande que zéro. Par suite de la symétrie du champ thermique par rapport à φ , le problème aux limites (1.1)–(1.2) n'est en fait qu'un problème du plan. Ci-dessous nous désignons par Ω le domaine plan donné par les inégalités :

$$r_0 < r < r_0 + s; \quad -L < z < +L$$

et par Γ la frontière du domaine Ω .

Il faut remarquer que le problème aux limites (1.1)–(1.2) a été étudié dans plusieurs articles [2], [3], [4]. On y cherche la solution du problème aux limites en poursuivant deux voies, à savoir : en appliquant la méthode de Fourier et en utilisant la théorie des fonctions à variable complexe. Les résultats obtenus n'ont pas toutefois satisfait les exigences de la technique. C'est qu'à l'aide de la première méthode on est parvenu à un système infini d'équations linéaires qui est encore à étudier. Quant à la seconde méthode, elle ne donne la solution que dans le cas où l'épaisseur du tube est très petite, ce qui ne correspond point aux conditions techniques.

2. Maintenant nous passons à l'étude du problème aux limites (1.1)–(1.2) en utilisant la méthode variationnelle.

Introduisons l'espace de Hilbert $W_2^{(1)}(\Omega)$, défini de la manière suivante : une fonction quelconque $v(r, z)$ appartient à l'espace $W_2^{(1)}(\Omega)$ si elle a toutes les dérivées partielles du premier ordre généralisées et sommables en carré (voir [5] ou [6]). Définissons la norme dans cet espace à l'aide de l'égalité

$$(2.1) \quad \|v\|_{W_2^{(1)}}^2 = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] r d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma v^2 r d\sigma$$

où $d\Omega$ est l'élément de la surface et $d\sigma$ est l'élément de l'arc. L'espace $W_2^{(1)}(\Omega)$ est complet et séparable [5]. Nous allons étudier la fonctionnelle

$$(2.2) \quad F(v) = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] r d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma v^2 r d\sigma - 2 \int_{\Gamma} \psi \cdot v \cdot r d\sigma$$

définie sur les éléments de l'espace $W_2^{(1)}(\Omega)$. L'existence des intégrales curvilignes est garantie par les théorèmes d'immersion de S. L. Sobolev

Lemme (2.1). La fonctionnelle (2.2) est bornée à l'intérieur sur l'ensemble $W_2^{(1)}(\Omega)$.

En effet, d'après les inégalités de Cauchy-Buniakovski et les théorèmes d'immersion de S. L. Sobolev on peut écrire

$$\int_{\Gamma} \psi \cdot v \cdot r d\sigma \leq \|\psi\|_{L_2(\Gamma)} \cdot \|v\|_{L_2(\Gamma)} \leq \|\psi\|_{L_2(\Gamma)} \cdot \|v\|_{W_2^{(1)}} K_1 = K \cdot \|v\|_{W_2^{(1)}}$$

pour chaque $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$. La constante $K > 0$ ne dépend pas de la fonction $v(r, z)$ et les normes de l'espace $L_2(\Gamma)$ sont calculées à l'aide de la fonction pondérante r . En utilisant cette inégalité on obtient

$$\begin{aligned} F(v) &= \|v\|_{W_2^{(1)}}^2 - 2 \int_{\Gamma} \psi \cdot v \cdot r d\sigma \geq \|v\|_{W_2^{(1)}}^2 - 2K \|v\|_{W_2^{(1)}} = \\ &= (\|v\|_{W_2^{(1)}} - K)^2 - K^2 \geq -K^2 \end{aligned}$$

ce qui signifie que le lemme (2.1) est démontré.

Désignons $\inf_{v \in W_2^{(1)}(\Omega)} F(v) = -d$. En appliquant les idées qu'utilise S. L. SOBOLEV

pour la solution du problème de Neumann [5], je vais démontrer le lemme suivant :

Lemme (2.2). Dans l'espace de Hilbert $W_2^{(1)}(\Omega)$ il existe une fonction $u(r, z)$ pour laquelle

$$\inf_{v \in W_2^{(1)}(\Omega)} F(v) = F(u) = -d$$

et pour laquelle nous avons

$$(2.3) \quad \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] r d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma u v r d\sigma - \int_{\Gamma} \psi v r d\sigma = 0$$

quel que soit $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$.

Démontrons le lemme (2.2). Soit $\{u_n\}$ une suite de fonctions de l'espace $W_2^{(1)}(\Omega)$ pour laquelle

$$(2.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = -d$$

On peut immédiatement vérifier que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F(u_n) + \frac{1}{2} F(u_m) - F\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) &= \frac{1}{2} \|u_n\|_{W_2^{(1)}}^2 + \frac{1}{2} \|u_m\|_{W_2^{(1)}}^2 - \\ &- \left\| \frac{u_n + u_m}{2} \right\|_{W_2^{(1)}}^2 = \left\| \frac{u_n - u_m}{2} \right\|_{W_2^{(1)}}^2 \end{aligned}$$

Donc, il résulte de (2.4) que $\|u_n - u_m\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \rightarrow 0$. Mais l'espace $W_2^{(1)}(\Omega)$ étant complet, il s'ensuit que la suite $\{u_n\}$ tend vers une fonction de l'espace. Désignons cette fonction par $u(r, z)$. Compte tenu de ce qui précède, il est évident que

$$\inf_{v \in W_2^{(1)}(\Omega)} F(v) = F(u) = -d$$

Revenons sur l'égalité (2.3). On a

$$F(u + \lambda v) = F(u) + 2\lambda \left\{ \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] r d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma u v r d\sigma - \int_{\Gamma} \psi v r d\sigma \right\} + \lambda^2 \|v\|_{W_2^{(1)}}^2$$

pour toute valeur réelle du paramètre λ et pour toute fonction v de l'espace $W_2^{(1)}(\Omega)$. En vertu du fait que cette expression doit atteindre son minimum pour $\lambda = 0$ on obtient la relation nécessaire.

THÉOREME (2.1) *La fonction $u(r, z)$ qui réalise le minimum de la fonctionnelle (2.2) admet les dérivées partielles de tout ordre presque dans chaque point intérieur du domaine Ω . En même temps elle satisfait à l'équation (1.1) presque partout en Ω .*

Démonstration. Soit Ω' un domaine arbitraire, intérieur au domaine Ω , δ la distance entre Ω' et Γ , Q un point quelconque de Ω' . Choisissons une fonction $g(\rho)$ qui satisfait aux conditions suivantes

$$g(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \rho \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pour } \rho \geq 1 \end{cases}$$

et qui est indéfiniment dérivable. ρ désigne la distance entre les points P et Q , P étant un point arbitraire du plan r, z . Nous désignons par $L(P, Q)$ la solution fondamentale (dans le sens de E. E. Levi [8]) de l'équation (1.1).

Introduisons la fonction $\xi(\rho)$, déterminée de la manière suivante

$$(2.5) \quad \xi(\rho) = \left[g\left(\frac{\rho}{h_1}\right) - g\left(\frac{\rho}{h_2}\right) \right] L(P, Q)$$

où h_1 et h_2 sont deux constantes qui satisfont à la condition $0 < h_1 < h_2 < \delta$. Nous allons démontrer que l'ensemble de fonctions $\{\omega_h(\rho)\}$ où

$$(2.6) \quad \omega_h(\rho) = h^2 A \left[g\left(\frac{\rho}{h}\right) L(P, Q) \right]$$

h variant entre δ et 0, forme un ensemble de noyaux réguliers selon S. L. SOBOLEV [7]. C'est à dire qu'il faut démontrer que $\{\omega_h(\rho)\}$ satisfait aux conditions suivantes :

1. $\{\omega_h(\rho)\}$ sont uniformément limitées par rapport à h et à $Q \in \Omega'$,
2. chaque fonction $\omega_h(\rho)$ est sommable par rapport à chaque coordonnée des points P et Q ,

3. il y a des nombres positifs γ et ε tels que pour chaque point $Q \in \Omega'$ nous ayons

$$\iint_{\rho < h} \omega_h(\rho) d\Omega_P > \gamma h^2$$

si $h < \varepsilon$ et

4. à l'extérieur du cercle ayant le centre Q et le rayon h la fonction $\omega_h(\rho)$ est considérée identiquement nulle.

Vérifions la condition 1. Pour $\rho \leq \frac{h}{2}$ nous avons $\omega_h(\rho) = 0$ en vertu de la définition de la solution fondamentale $L(P, Q)$. Donc il faut vérifier la condition 1 pour $\rho > \frac{h}{2}$. Il est facile de remarquer que pour

$\rho > \frac{h}{2}$ les valeurs absolues des dérivées partielles du premier ordre de la fonction $g\left(\frac{\rho}{h}\right)$ sont bornées au-dessus par $\frac{C_1}{h}$, tandis que les valeurs

absolues des dérivées partielles du deuxième ordre sont bornées par $\frac{C_2}{h}$.

C_1 et C_2 étant des constantes positives. La fonction $L(P, Q)$ peut être écrite sous la forme $L(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho} + W(P, Q)$ où $W(P, Q)$ et toutes ses dérivées partielles possèdent une singularité plus petite que la fonction $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho}$ et ses dérivées, quand $\rho \rightarrow 0$. Il en résulte que les valeurs absolues des dérivées partielles du premier ordre aussi bien que celles du deuxième ordre sont limitées au-dessus par $\frac{C_3}{h}$ respectivement par $\frac{C_4}{h}$, lorsque

$\rho > \frac{h}{2}$. C_3 et C_4 sont aussi des constantes positives. Ayant en vue la forme de l'équation (1.1) il résulte de ce qui précède

$$|\omega_h(\rho)| < C$$

quels que soient h et Q . C est une constante positive. Les conditions 2 et 4 sont faciles à vérifier étant donné que la fonction $L(P, Q)$ est indéfiniment dérivable par rapport aux coordonnées des points P et Q ; et la fonction $g\left(\frac{\rho}{h}\right) = 0$ quand $\rho \geq h$. Calculons l'intégrale de la condition 3.

$$\iint_{\rho < h} \omega_h(\rho) d\Omega_P = h^2 \iint_{\rho < h} A \left[g\left(\frac{\rho}{h}\right) L(P, Q) \right] d\Omega_P$$

Mais

$$\begin{aligned} \iint_{\rho < h} A \left[g\left(\frac{\rho}{h}\right) L(P, Q) \right] d\Omega_P &= \iint_{\frac{h}{2} < \rho < h} A \left[g\left(\frac{\rho}{h}\right) L(P, Q) \right] d\Omega_P = \int_{\frac{C_h}{2}} \left[\frac{\partial L}{\partial \rho} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{L}{r} \cos(\nu, r) \right] d\sigma_P = - \int_{\frac{C_h}{2}} \left(\frac{\partial L}{\partial \rho} + \frac{L}{r} \right) d\sigma_P \rightarrow 1 \end{aligned}$$

quand le rayon du cercle C_h ayant le centre en Q tend vers zéro uniformément pour chaque $Q \in \Omega'$. Soit γ un nombre arbitraire dans l'intervalle $(0, 1)$. On déduit de ce qui précède plus haut qu'on peut déterminer un nombre $\varepsilon > 0$ de sorte qu'on ait

$$\int_{0 < \rho < h} \omega_h(\rho) d\Omega_P > \gamma h^2$$

si $h < \varepsilon$.

L'ensemble $\{\omega_h(\rho)\}$ étant un ensemble régulier de noyaux, ce qui a été prouvé ci-dessus, il s'ensuit que les fonctions

$$(2.7) \quad u_h(Q) = \frac{\int_{0 < \rho < h} \omega_h(\rho) u(P) d\Omega_P}{\int_{0 < \rho < h} \omega_h(\rho) d\Omega_P}$$

presque en chaque $Q \in \Omega'$ tendent vers $u(Q)$ quand $h \rightarrow 0$.

Maintenant on peut passer à la démonstration du théorème (2.1). Il est évident que la fonction $\xi(P)$ appartient à l'espace $W_2^{(1)}(\Omega)$. Il est aussi facile de voir que la même fonction $\xi(P)$ est nulle dans une bande voisine avec la frontière Γ . Donc, de (2.3) on déduit

$$(2.8) \quad \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right] r d\Omega = 0$$

où par r et z sont désignées les coordonnées du point P . En appliquant la formule de Green à (2.8), on obtient

$$(2.9) \quad \int_{\Omega} u A[\xi(P)] r d\Omega = 0$$

d'où d'après (2.6) il résulte

$$(2.10) \quad \frac{1}{h_1^2} \int \int \omega_{h_1}(\rho) u(P) r d\Omega_P = \frac{1}{h_2^2} \int \int \omega_{h_2}(\rho) u(P) r d\Omega_P$$

On voit immédiatement que les deux membres de la dernière égalité convergent dans chaque point $Q \in \Omega'$ où converge aussi la fonction (2.7). Mais d'après l'égalité (2.10) on écrit

$$u(Q) = \frac{1}{h^2} \int \int \omega_h(\rho) u(P) r d\Omega_P$$

ce qui montre que la fonction $u(Q)$ est indéfiniment dérivable, le second membre de la dernière égalité étant lui aussi indéfiniment dérivable.

Nous allons démontrer que la fonction u satisfait l'équation (1.1) presque partout en Ω . Soit $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ une fonction arbitraire égale à zéro dans une bande voisine de la frontière Γ . On déduit de (2.3)

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] r d\Omega = 0$$

En appliquant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} v A(u) r d\Omega = 0$$

Il s'ensuit que $A(u) = 0$ est satisfaite presque partout en Ω . Donc le théorème (2.1) est démontré.

Nous avons à considérer maintenant dans quel sens est satisfaite la condition aux limites (1.2) et à examiner si la solution du problème aux limites (1.1) — (1.2) est unique.

Comme il fallait le prévoir, la condition (1.2) est satisfaite dans un sens faible. Nous allons désigner par $\{\Omega_m\}$ une suite de domaines qui tend vers Ω , quand $m \rightarrow \infty$. Supposons que la suite $\{\Omega_m\}$ est monotone, c'est à dire $\Omega_m \subseteq \Omega_{m+1} \subset \Omega$. Soit Γ_m la frontière de Ω_m , que nous supposons continue sur le segment. Pour un $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ arbitraire nous avons évidemment

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] r d\Omega = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m} \left[\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] r d\Omega = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_m} v \frac{\partial u}{\partial \nu} r d\sigma$$

D'après (2.3) on obtient la formule suivante qui fait voir dans quel sens la condition (1.2) est satisfaite. A savoir :

$$(2.11) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_m} v \frac{\partial u}{\partial \nu} r d\sigma = - \int_{\Gamma} \gamma u v r d\sigma + \int_{\Gamma} \psi v r d\sigma$$

Quant à l'unicité de la solution du problème aux limites on peut la prouver de la manière suivante. Supposons qu'il y ait deux solutions u_1 et u_2 du problème aux limites qui font partie de l'espace $W_2^{(1)}(\Omega)$. La fonction $u = u_1 - u_2$ satisfait la condition

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_m} v \frac{\partial u}{\partial \nu} r d\sigma = - \int_{\Gamma} \gamma u v r d\sigma$$

En remplaçant v par u on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_m} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] r d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma u^2 r d\sigma = 0$$

Mais ayant en vue la condition imposée à γ dans le p. 1, il résulte de l'égalité précédente que $u \equiv 0$ en Ω .

3. Pour le calcul approximatif de la solution du problème aux limites (1.1)–(1.2) nous allons jouer de la méthode généralisée de Ritz. Nous allons chercher l'approximation de l'ordre n de la solution $u(r, z)$ sous la forme suivante :

$$(3.1) \quad u_n(r, z) = \sum_{p, q=0}^n a_{pq} r^p z^q$$

Déterminons les coefficients a_{pq} de sorte que la fonction $F(u_n) = F(a_{pq})$ ($p, q = 0, \dots, n$) prenne le minimum. On obtient donc les approximations $u_n(r, z)$ en résolvant le système linéaire d'équations

$$(3.2) \quad \frac{\partial F}{\partial a_{pq}} = 0 \quad (p, q = 0, \dots, n)$$

Ils est évident que les solutions approximatives u_n tendent vers la solution exacte du problème aux limites dans le métrique de l'espace $W_2^{(1)}(\Omega)$ et d'après les théorèmes d'immersion de S. L. Sobolev on peut affirmer que les fonctions u_n tendent vers u aussi dans le moyen carré.

BIBLIOGRAFIE

1. N é m e t i L., *Tensiuni termice în tuburi cu pereți subțiri în cazul unui câmp termic simetric față de axă*. Studii și Cercetări științifice, Cluj. t. IV (1953) 64–72.
2. C ă l u g ă r e a n u G., *Asupra unei probleme de propagarea căldurii*. Studii și cercetări științifice, Cluj t. IV (1953) 10–17.
3. I o n e s c u D. V. și N é m e t i L., *Integrarea unei ecuații cu derivate parțiale care intervine în problema calculului tensiunilor termice în tuburile fierbătoare ale cazanelor cu trecere forțată și ale cazanelor cu radiație*. Studii și Cercetări Științifice Cluj, t. IV (1953) 73–78.
4. C ă l u g ă r e a n u G. și R a d o F., *Asupra unei probleme de propagare a căldurii*. Buletin Științific Secțiunea de Științe Matematice și Fizice t. VI (1954), 17–30.
5. С о б о л е в С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. Ленинград 1950.
6. С о б о л е в С. Л., *Общая теория дифракции волн на римановых пространствах*, Труды Мат. Инст. им. Стеклова, т. IX. (1935) 39–105.
7. S c h w a r t z L., *Theorie des distributions* I. Paris 1950.
8. L e v i E. E., *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*. Rend. del Circolo Matematico di Palermo. t. 24 (1907) 275–317.

Reçu le 5 mars 1958

SUR LA SIMPLIFICATION DES PROGRAMMES EXACTS POUR LES MECANISMES AUTOMATIQUES DISCRETS

par

Gr. C. MOISIL,

à Bucarest

I

Un programme exact est un ensemble formé par trois tableaux :

$$\begin{array}{ll}
 F(K_0, Z_0) = Z_0 & \Phi(K_0, Z_0) = W_0 \\
 F(K_1, Z_0) = Z_1 & \Phi(K_1, Z_0) = W_1 \\
 F(K_2, Z_1) = Z_2 & \Phi(K_2, Z_1) = W_2 \\
 \dots & \dots \\
 (I) \quad F(K_i, Z_{i-1}) = Z_i & (II) \quad \Phi(K_i, Z_{i-1}) = W_i \\
 \dots & \dots \\
 F(K_n, Z_{n-1}) = Z_n & \Phi(K_n, Z_{n-1}) = W_n \\
 F(K_0, Z_n) = Z_0 & \Phi(K_0, Z_n) = W_{n+1} \\
 & Z_i = Z_j \\
 (III) \quad & \dots \\
 & Z_h = Z_k
 \end{array}$$

$K_0, \dots, K_n, W_0, \dots, W_{n+1}$ sont des éléments donnés ; $Z_0, \dots, Z_n$ sont des variables dans un domaine inconnu $\mathcal{D}$; $F(K, Z)$ et $\Phi(K, Z)$ sont des fonctions inconnues ayant les arguments $K \in (K_0, \dots, K_n), Z \in \mathcal{D}, F(K, Z) \in \mathcal{D}, \Phi(K, Z) \in (W_0, \dots, W_{n+1})$.

Comme exemple nous considérerons le programme exact suivant $\mathcal{P}_1$, qu'on rencontre lorsqu'on veut construire un dispositif de signalment à un passage à niveau