

où les fonctions $P(x)$ et $R(x)$ sont continues sur l'intervalle $[a, b]$. Nous disons qu'une intégrale $y(x)$ de (13) est non-oscillatoire sur $[a, b]$ si elle ne s'annule qu'au plus sur un point de $[a, b]$. Dans le cas contraire l'intégrale $y(x)$ s'appelle oscillatoire. Quand les intégrales de (13) ne sont pas oscillatoires sur $[a, b]$ alors l'équation (13) est du type $I_2\{[a, b]\}$.

Du théorème 1 et de l'inégalité (10) il résulte l'observation :

s'il existe une fonction $u(x)$ deux fois dérivable et $u(x) > 0$ pour $x \in (a, b)$ et $L_2(u) \leq 0$, $x \in [a, b]$, alors l'équation (13) est du type $I_2\{[a, b]\}$.

On trouve cette proposition dans [4]. Dans [1] on démontre aussi la nécessité de la condition donnée dans l'énoncé.

Du théorème 2 il résulte aussi une application pour l'équation linéaire d'ordre n .

On peut voir facilement que la notion de convexité introduite a ses applications même dans le cas des équations différentielles non linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Кондратьев В. А. Элементарный вывод необходимого и достаточного условия колебательности решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. УМН, 12, 159—160 (1957).
- [2] Moldovan E., *Asupra noțiunii de funcție convexă față de o mulțime de funcții interpolare*. Studii și Cercetări de Mat. Cluj, IX, 161—224 (1958).
- [3] Moldovan E., *Sur une généralisation des fonctions convexes*. Mathematica, 1(24), 49—80, (1959).
- [4] Vallée Poussin, Ch. de la, *Sur l'équation différentielle du second ordre*. Journ. de Math. pures et appl. 8, 125—144 (1929).
- [5] Чаплыгин С. А., *Полное собрание сочинений*. III, 75—79 (1935).
- [6] Polya G., *On Mean-Value Theorem corresponding to a Given Linear Homogeneous Differential Equation*, Trans. Am. Math. Soc. 24, 312—324 (1922).
R. cu le 20. XI. 1959

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

И. МУНТЯНУ

Клуж

Математическое исследование различных электротехнических и радиотехнических схем, в частности, рассмотрение лампового генератора, а так же исследование некоторых механических схем, встреченных, например, в вопросах динамики, ведёт к системам двух дифференциальных уравнений, вообще нелинейных, следующего типа:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Ряд результатов в этом направлении, с техническими применениями, даны во втором издании книги АНДРОНОВА, ВИТТА и ХАЙКИНА [1].

В настоящей работе указываются условия осуществления периодического режима для некоторого частного случая упомянутой системы дифференциальных уравнений. Именно, воспользовавшись рабочим методом развитым ЛЕВИНСОНЫМ и СМИТОМ [2], ФИЛИППОВЫМ [3] и ДРАГИЛЕВЫМ [4] и опираясь на идею введения нелинейного члена [5], в этой работе даётся лёгкое обобщение одной теоремы Драгилёва, доказывая, что при выполнении некоторых условий, система дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= h(y) - F(x), \\ \frac{dy}{dt} &= -g(x) \end{aligned}$$

допускает, по крайней мере, одно периодическое решение.
Работа не занимается проблемой единственности найденного периодического решения.

Предположим, что входящие в систему (1) функции $F(u)$, $g(u)$, $h(u)$ заданы и непрерывны на всей действительной оси и удовлетворяют некоторым условиям, обеспечивающим единственность и продолжаемость решения любой задачи Коши для системы (1). При таких обычных предположениях устанавливается следующая теорема:

ТЕОРЕМА. Если

1°. $\operatorname{sgn} g(x) = \operatorname{sgn} x$ и интеграл $\int_0^x g(\xi) d\xi$ расходится при $|x| \rightarrow \infty$;

2°. $\operatorname{sgn} F(x) = -\operatorname{sgn} x$ при достаточно малом $|x|$;

3°. существует положительное число M и положительные постоянные k и k' , $k > k'$, такие, что

$$F(x) \geq k, \text{ для } x > M,$$

$$F(x) \leq -k', \text{ для } x < -M;$$

4°. $\operatorname{sgn} h(y) = \operatorname{sgn} y$ и $|h(y)| \rightarrow \infty$ для $|y| \rightarrow \infty$;

тогда система дифференциальных уравнений (1) имеет не менее одного периодического решения.

При доказательстве теоремы различаем несколько этапов.

а). Из условий 1°, 2° и 4° следует, что $g(0) = F(0) = h(0) = 0$, следовательно, начало координат является особой точкой системы. Эта особая точка единственна.

В фазовой плоскости (x, y) мы построим кольцевую область $\mathcal{J}$, не содержащую начала и обладающую тем свойством, что любая положительная полутраектория системы (1), исходящая из некоторой точки области $\mathcal{J}$, остаётся в этой области для всех последующих значений независимой переменной.

б). Мы будем реализовать указанное построение с помощью кривых уровня энергии системы (1) $\lambda(x, y) = c$, где

$$\lambda(x, y) = G(x) + H(y)$$

$$G(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi, \quad H(y) = \int_0^y h(\eta) d\eta.$$

Из условий 1° и 4° теоремы следует, что функция $\lambda(x, y)$ положительно определённая, поэтому кривая, неявно заданная уравнением $\lambda(x, y) = c$, где $c > 0$, замкнута и, ограниченная этой кривой внутренняя область, содержит начало координат. Кроме того, если $0 < c' < c''$, тогда кривая $\lambda(x, y) = c''$ находится внутри области, ограниченной кривой $\lambda(x, y) = c'$.

в). Выбираем теперь $|x|$ и $|y|$ достаточно малыми, именно $|x|$ выбираем так, чтобы условие 2° было выполнено. Тогда производная функция $\lambda(x, y)$ в силу системы (1) является положительно определённой. В самом деле,

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = g(x)[h(y) - F(x)] + h(y)[-g(x)] = -g(x)F(x),$$

отсюда, на основе условия 1°, следует, что

$$\frac{d\lambda}{dt} > 0$$

для указанных значений $|x|$. Следовательно, все положительные полутраектории, имеющие общие точки с кривой $\lambda(x, y) = c$, где c — достаточно малая положительная постоянная, пересекают эту кривую изнутри во вне области, ограниченной этой кривой. Поэтому начало координат является особой точкой отталкивания положительных полутраекторий. Построенная таким образом кривая $\lambda(x, y) = c$ служит внутренней границей кольцевой области $\mathcal{F}$.

г). Пусть теперь a некоторое число, удовлетворяющее условию

$$a > \max [k, \sup_{-M \leq x \leq M} |F(x)|].$$

Построим потом прямоугольник с вершинами в точках $V_1(M, a)$, $V_2(M, -a)$, $V_3(-M, -a)$, $V_4(-M, a)$ (черт. 1). На прямой $x = M$ берём точку $Q(M, y_Q)$ такую, что $y_Q > a$ и

$$h(y) > a \text{ при } y > y_Q.$$

Такой выбор возможен в силу условия 4°. Тогда, обозначая через $f(Q, t)$ траекторию, исходящую из точки Q , имеем при $0 < x \leq M$

$$\frac{dx}{dt} = h(y) - F(x) > a - F(x) > 0,$$

(2)

$$\frac{dy}{dt} = -g(x) < 0.$$

Из этих неравенств следует, что отрицательная полутраектория $f(Q, t)$ идёт вверх налево и перпендикулярно пересечёт оси Oy в некоторой точке $P(0, y_P)$, ибо $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 0$. Те же неравенства показывают, что положительная полутраектория $f(Q, t)$ направлена, в точке Q , вниз направо; при этом $y(t)$ убывает при возрастающем t и $x > M$.

д). Докажем теперь, что существует хотя бы одна точка $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y})$, расположенная на положительной полутраектории такая, что $x > M$ и

$$h(\bar{y}) - F(\bar{x}) = 0$$

В самом деле, в силу выбора точки Q , координаты (x, y) некоторой точки, достаточно близкой к точке Q и находящейся на положительной полутраектории $f(Q, t)$, удовлетворяют неравенству $h(y) - F(x) > 0$. Для доказательства вышеуказанного равенства достаточно, в виду непрерывности функции $h(y(x)) - F(x)$, доказать существование хотя бы одной пары (x_1, y_1) , с $x_1 > M$ и $y_1 < y_Q$, такой что

$$h(y_1) - F(x_1) < 0.$$

Для установления этого, предположим противное, именно, что для любых $x > M$ и $y < y_Q$ имеем

$$h(y) - F(x) > 0.$$

Тогда неравенства (2) сохраняют свою силу и в области $D = \{x > M, y < y_Q\}$. Пусть теперь b некоторое число, удовлетворяющее неравенству

$$b > \max [k, \sup_{y < y_Q} h(y)].$$

Учитывая условие 3°, имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x)}{h(y)-F(x)} < -\frac{g(x)}{b-k}.$$

Интегрируя последнее неравенство от M до x , получим

$$y < y_Q - \frac{1}{b-k} \int_M^x g(\xi) d\xi.$$

Из этого видно, что при достаточно большом x , в силу условия 1°, $y(x)$ остаётся отрицательным. Пусть x_1 и y_1 такие значения x и y . Очевидно $x_1 > M$ и $y_1 < 0$. Но, учитывая 4°, имеем и $h(y_1) < 0$. Поэтому, тем более,

$$h(y_1) - F(x_1) < 0.$$

Полученное противоречие доказывает существование хотя бы одной точки $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y})$ для которой $h(\bar{y}) - F(\bar{x}) = 0$. При этом, касательная к траектории $f(Q, t)$ в точке $\bar{Q}$ направлена вертикально вниз, ибо

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} = 0.$$

Кроме того, из приведённого выше рассуждения, следует, что при $x > x_1$ и $y < y_Q$ имеем

$$h(y) - F(x) < 0.$$

Впрочем, это неравенство очевидно при $x \geq 0$ и $y < 0$.

е). Продолжим теперь положительную полутраекторию $f(Q, t)$ за точкой $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y})$. Тогда для всех следующих значений t имеем

$$h(y) - F(x) < 0$$

следовательно, при $x > 0$,

$$\frac{dx}{dt} = h(y) - F(x) < 0,$$

$$\frac{dy}{dt} = -g(x) < 0.$$

Итак, положительная полутраектория убывает налево и достигает

прямой $x=M$ в некоторой точке $Q'(x', y')$, координаты которой удовлетворяют неравенству $h(y') - F(x') < 0$.

ж). На прямой $x=-M$ берём точку $U(-M, y_U)$, имеющую ординату $y_U > a$ такую, что $h(y) > a$ при $y > y_U$. Рассмотрим, исходящую из этой точки, положительную полутраекторию $f(U, t)$. При $-M \leq x < 0$ и $y > y_U$ имеем

$$\frac{dx}{dt} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt} > 0.$$

Итак, положительная полутраектория $f(U, t)$ пересечёт оси Oy в некоторой точке V . Можно предполагать, что точка V совпадает с выше построенной точкой P .

Таким образом, мы построим дугу траектории $UPQQ'$, где координаты (x', y') точки Q' удовлетворяют неравенству $h(y') - F(x') < 0$.

з). Применяя метод пп. г) — ж), мы построим аналогичную дугу траектории, исходящей из точки W прямой $x=-M$. Выбираем ординату y_W точки W так, чтобы $h(y) < a$ при $y < y_W < a$. Мы получим, таким образом, дугу траектории $TSWW'$, где точка T находится на прямой $x=M$ не выше точки Q' , точка S — на оси Oy , а точки W и W' на прямой $x=-M$. Кроме того, координаты точки $W'(x'', y'')$ удовлетворяют неравенству $h(y'') - F(x'') > 0$.

и). Относительно взаимного расположения точек W' и U на прямой $x=-M$, возможны следующие ситуации:

а) точка W' находится под точкой U ,

б) точка W' совпадает с точкой U ,

γ) точка W' находится над точкой U .

В условиях теоремы мы докажем, что существует хотя бы одна система дуг $UPQQ'$, $TSWW'$, указанного выше типа, для которой ситуация γ) не имеет места.

Для доказательства предположим противное, именно, что ситуация γ) осуществляется для любой системы дуг типа $UPQQ'$, $TSWW'$. Тогда продолжим продолжительную полутраекторию $f(W', t)$ до её пересечения в точке P' с осью Oy . Рассмотрим области $\mathcal{Q}$ ограниченную замкнутой кривой Γ , состоящей из дуг PQQ' , $TSWW'P'$ и отрезков прямой PP' и $Q'T$. В силу единственности решений системы (1), положительные полутраектории могут входить в область $\mathcal{Q}$ только через точки отрезка QT и могут выйти из $\mathcal{Q}$ только через точки отрезка PP' , перпендикулярно пересекая этот отрезок.

к). В качестве начальной точки выбираем теперь точку $A(O, y_0)$, расположенную на оси Oy выше точки P' и построим положительную полутраекторию $f(A, t)$, исходящую из этой точки; она будет иметь поведение аналогичное поведению дуг кривой Γ . Обозначим через B и C точки её пересечения с прямой $x=M$, через $D(O, y_1)$ точку пересечения с Oy , через E и F , точки пересечения с прямой $x=-M$ и через $A(O, y_1)$ точку её вторичного пересечения с положительной полуосью Oy .

Заметим, что, если точка C находится на отрезке $Q'T$, тогда положительная полутраектория $f(A, t)$ входит в область $\mathcal{Q}$, из которой

может выйти только через точки отрезка PP' ; но так как точку A выбрали выше точки P' , то для соответствующей системы дуг ситуация γ не имеет места. В таком случае наше утверждение доказано.

Итак, предположим, что точка C находится над точкой T прямой $x=M$.

Если, при этом, точка $\bar{A}$ окажется под точкой A тогда наше утверждение снова доказано.

Таким образом, предположим, что всегда $\bar{y}_1 > y_0$. Пусть H точка пересечения положительной траектории $f(\bar{A}, t)$ с прямой $x=M$, I — точка вторичного пересечения $f(\bar{A}, t)$ с прямой $x=M$, и, наконец, $J(O, y_2)$ — точка пересечения $f(\bar{A}, t)$ с отрицательной полуосью Oy . Так как $\bar{y}_1 > y_0$, мы имеем $y_2 < y_1 < 0$.

Чтобы прийти к противоречию, мы оценим предварительно вариацию функции $\lambda(x, y)$ на траектории (1).

л). Вычислим производную $\frac{d\lambda}{dy}$ вдоль одной траектории. Имеем

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{dx}{dy} = h(y) + g \frac{h(y) - F(x)}{-g(x)} = F(x)$$

Следовательно, при $x \neq 0$

$$\frac{d\lambda}{dy} = F(x).$$

Введём обозначение $\lambda(R) = \lambda(x_R, y_R)$ и интегрируем последнее равенство вдоль дуги BC и потом вдоль EF . Получим

$$\lambda(C) - \lambda(B) = \int_B^C F(x) dy = - \int_C^B F(x) dy \leq -k(y_B - y_C)$$

и

$$\lambda(F) - \lambda(E) = \int_E^F F(x) dy < k'(y_F - y_E).$$

Вычислим теперь производную $\frac{d\lambda}{dx}$ вдоль одной траектории. Имеем

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\partial \lambda}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} = h(y) \frac{-g(x)}{h(y) - F(x)} + g(x) = - \frac{g(x)F(x)}{h(y) - F(x)}$$

При $-M \leq x \leq M$ и $h(y) > a$ введём числа

$$L_{PQ} = \int_P^Q \left| \frac{g(x)F(x)}{h(y) - F(x)} \right| dx, \quad L_{TS} = \int_T^S \left| \frac{g(x)F(x)}{h(y) - F(x)} \right| dx,$$

$$L_{SW} = \int_S^W \left| \frac{g(x)F(x)}{h(y) - F(x)} \right| dx, \quad L_{UP} = \int_U^P \left| \frac{g(x)F(x)}{h(y) - F(x)} \right| dx,$$

где интегралы берутся вдоль указанных дуг траекторий. Обозначим

$$L = \max(L_{PQ}, L_{TS}, L_{SW}, L_{UP}).$$

Рассмотрим интеграл

$$|\lambda(B) - \lambda(A)| = \left| \int_A^B \frac{-g(x)F(x)}{h(y) - F(x)} dx \right|.$$

В силу условия 4°, мы можем выбрать точку B так, чтобы $y_B > y_P$ и

$$\inf_{y_B \leq y \leq y_A} h(y) > \sup_{y_Q \leq y \leq y_P} h(y).$$

Тогда, каково бы ни было $x \in [O, M]$, координаты (x, y_{PQ}) , (x, y_{AB}) точек, взятых соответственно на дуги траектории PQ , AB , удовлетворяют неравенствам

$$h(y_{PQ}) - F(x) < h(y_{AB}) - F(x).$$

Из-за этого

$$|\lambda(A) - \lambda(B)| < \left| \int_P^Q \frac{-g(x)F(x)}{h(y) - F(x)} dx \right| \leq L_{PQ} \leq L.$$

Следовательно,

$$|\lambda(B) - \lambda(A)| < L.$$

Аналогично показывается, что

$$|\lambda(D) - \lambda(C)| < L, \quad |\lambda(E) - \lambda(D)| < L, \quad |\lambda(\bar{A}) - \lambda(F)| < L.$$

Отсюда следует, что число $2L$ ограничивает вариацию абсолютного значения функции $\lambda(x, y)$ вдоль любой траектории, находящейся в областях

$$B_1 = \{-M \leq x \leq M, h(y) > a\}, \quad B_2 = \{-M \leq x \leq M, h(y) < -a\}.$$

м). Сейчас мы докажем, что вариация y также ограничена в областях B_1 и B_2 . В самом деле, из соотношения $\lambda(x, y) = H(y) + G(x)$ следует, что при $\bar{y} \bar{y} > 0$ и $|h(\bar{y})| > a$, $|h(\bar{y})| > a$, имеем

$$H(\bar{y}) - H(\bar{y}) = \bar{\lambda} - \bar{\lambda} + \int_{\bar{y}}^{\bar{y}} g(\xi) d\xi.$$

Но в силу теоремы о среднем значении, получим и

$$H(\bar{y}) - H(\bar{y}) = \int_{\bar{y}}^{\bar{y}} h(\eta) d\eta = (\bar{y} - \bar{y})h(\eta),$$

где $\eta \in [\bar{y}, \bar{y}]$. Поэтому, учитывая тот факт, что в областях B_1 и B_2 имеет место неравенство $|\lambda - \bar{\lambda}| < L$ получим

$$|\bar{y} - \bar{y}| \leq \frac{|\bar{\lambda} - \bar{\lambda}| + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} |g(\xi)| d\xi}{|h(\eta)|} < \frac{2L + 2M \cdot \max_{-M \leq x \leq M} |g(x)|}{a}$$

Этим мы доказали ограниченность вариации y вдоль одной траектории, расположенной в областях B_1 или B_2 , именно

$$|\bar{y} - \bar{y}| < N,$$

где число N равно

$$\frac{1}{a} \left[2L + 2M \cdot \max_{-M \leq x \leq M} |g(x)| \right].$$

н). Оценим теперь разность $\lambda(J) - \lambda(D)$. Так как мы предполагали, что $\bar{y}_1 > y_0$, мы имеем и $y_2 < y_1 < 0$. Но тогда, с одной стороны

$$(3) \quad \lambda(J) - \lambda(D) > 0,$$

ибо

$$\begin{aligned} \lambda(J) - \lambda(D) &= \lambda(0, y_2) - \lambda(0, y_1) = H(y_2) - H(y_1) = \int_{y_1}^{y_2} h(y) dy = \\ &= \int_{y_2}^{y_1} [-h(y)] dy > 0; \end{aligned}$$

и, с другой стороны, мы докажем, что имеет место и обратное неравенство: $\lambda(J) - \lambda(D) < 0$. Но тогда мы придём к противоречию и тем самым доказано, что $y_2 > y_1$, т. е. $\bar{y}_1 \leq y_0$. Следовательно, для дуги $ABCDEF\bar{A}$, аналогичной системе дуг $UPQQ'$, $TSWW'$, ситуация γ) относительно точек $\bar{A}$ и A не может иметь места и, поэтому утверждение пункта и) полностью доказано.

Итак осталось доказать, что $\lambda(J) - \lambda(D) < 0$. В самом деле, учитывая оценки, установленные в пунктах л) и м), имеем

$$\begin{aligned} (4) \quad & \lambda(E) - \lambda(D) < L, \\ (5) \quad & \lambda(F) - \lambda(E) < k'(y_F - y_E) < k'(\bar{y}_1 + |y_2|), \\ (6) \quad & \lambda(H) - \lambda(F) < 2L, \\ & \lambda(I) - \lambda(H) < -k(y_H - y_I). \end{aligned}$$

Так как $y_H > \bar{y}_1 - N$ и $y_I < y_2 + N$ последнее неравенство становится

$$(7) \quad \lambda(I) - \lambda(H) < -k(\bar{y}_1 - y_2 - 2N) = -k(\bar{y}_1 + |y_2| - 2N)$$

К предыдущим неравенствам прибавим следующее

$$(8) \quad \lambda(J) - \lambda(I) < L.$$

Складывая неравенства (4), (5), (6), (7) и (8), имеем

$$\lambda(J) - \lambda(D) < 4L + 2Nk - (k - k')(\bar{y}_1 + |y_2|)$$

отсюда, так как $\bar{y}_1 > y_0$, получим

$$(9) \quad \lambda(J) - \lambda(D) < 4L + 2Nk - (k - k')y_0.$$

Выбираем теперь число y_0 больше числа

$$\frac{4L + 2Nk}{k - k'}.$$

При этом значение $L(y_0)$ можно считать то же самое как и в пункте л).

Тогда из неравенства (9) следует

$$\lambda(J) - \lambda(D) < 0,$$

что противоречит условию (3).

о). Полученное противоречие доказывает, что, если выбирать число y_0 с самого начала больше, чем

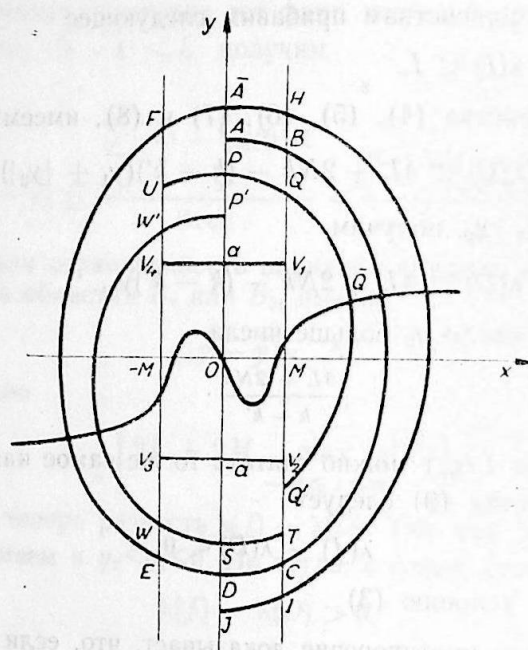
$$\frac{4L + 2Nk}{k - k'}$$

тогда имеет место неравенство $\bar{y}_1 \leq y_0$.

п). Таким образом, положительная полутраектория $f(A, t)$, исходящая из точки $A(O, y_0)$, выходит после вторичного пересечения положительной полуоси в точке $\bar{A}(O, \bar{y}_1)$, в области $\mathcal{D}$ (мешок Бендиксона), ограниченную дугой траектории $A\bar{A}$ и отрезком прямой $A\bar{A}$, расположенным на оси Oy и имеющим концы y_0 и y_1 , причём $y_0 > y_1$. (В случае, когда $y_0 = y_1$, траектория $f(A, t)$ замкнута, т. е. она является периодическим решением и теорема доказана). Из области $\mathcal{D}$ положительные полутраектории выйти не могут, ибо через точки отрезка $A\bar{A}$ они могут только войти в область $\mathcal{D}$.

Обозначим через $\mathcal{E}$ область, ограниченную замкнутой кривой $\lambda(x, y) = c$, $c > 0$, построенной на п. в). Кольцевая область $\mathcal{A} = \mathcal{D} - \mathcal{E}$ не содержит ни одной особой точки системы (1) и любая положительная полутраектория, исходящая из некоторой точки этой области, остаётся в силу выше доказанных, в кольцевой области $\mathcal{A}$ для всех последующих значений t . Тогда в силу известной теоремы Бендиксона-Пуанкаре, в области $\mathcal{A}$ существует хотя бы одно периодическое решение данной системы дифференциальных уравнений.

Теорема доказана.



Черт. 1.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Андронов А. А. Витт А. А. и Хайкин С. Э., *Теория колебаний*. Москва, 1959 г.
- [2] Levinson N. and Smith O. K., *A general equation of relaxation oscillation*. Duke Math. J., 9 (1942).
- [3] Филиппов А. Ф., *Достаточные условия существования устойчивого предельного цикла для уравнения второго порядка*. Матем. сб., 30 (72), 171—180, (1952).
- [4] Драгилёв А. В., *Периодические решения дифференциального уравнения нелинейных колебаний*. Прикл. мат. и мех. 16, 85—88 (1952).
- [5] Munteanu I., *Soluții marginale și soluții periodice pentru anumite sisteme de ecuații diferențiale*. Stud. și cerc. de mat. (Cluj), VIII, 1—2, 125—131 (1957).

Поступило 26. XI. 1959.

DIFFERENCES DIVISÉES ET DÉRIVÉES

par

TIBERIU POPOVICIU

à Cluj

I.

1. — Soit $A[f] = A[f(x)]$ une fonctionnelle linéaire, donc additive et homogène, définie sur un espace vectoriel S de fonctions $f = f(x)$, réelles, de la variable réelle x , définies et continues sur un intervalle I . Nous désignerons par a l'extrémité gauche et par b l'extrémité droite de l'intervalle I . Dans la suite nous supposons toujours que les éléments de S vérifient toutes les propriétés de dérivabilité nécessaires pour que les fonctionnelles linéaires considérées aient un sens. Nous supposons toujours que S contienne tous les polynômes. On suppose toujours que $a < b$.

Toute fonctionnelle linéaire $A[f]$ a un degré d'exactitude bien déterminé. Ce degré d'exactitude est le nombre entier $n \geq -1$, ou le nombre impropre $n = \infty$, caractérisé par la propriété:

1°. $n = -1$ si $A[1] \neq 0$.

2°. $A[x^i] = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, $A[x^{n+1}] \neq 0$ si $A[1] = 0$ et si l'un au moins des nombres $A[x^i]$, $i = 0, 1, \dots$ est différent de zéro.

3°. $n = \infty$ si $A[x^i] = 0$, $i = 0, 1, \dots$

Dans les cas 1° et 2° le degré d'exactitude est fini. Ce cas a lieu si et seulement si $A[f]$ est différent de zéro sur un polynôme au moins. Dans le cas 3°, le degré d'exactitude est infini et alors $A[f]$ est nul sur tout polynôme.

Pour qu'une fonctionnelle linéaire $A[f]$ soit nulle sur tout polynôme de degré n , il faut et il suffit que son degré d'exactitude soit égal à n au moins (on suppose toujours que $n < \infty$). Un polynôme de degré n est de la forme $\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n$, les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ étant des nombres réelles quelconques. Si le plus haut coefficient α_0 est $\neq 0$, le polynôme est dit de degré effectif n .

2. — Nous allons nous occuper, en particulier, des fonctionnelles linéaires $A[f]$ qui sont égales à une combinaison linéaire des valeurs, sur un nombre fini de points, de la fonction f et d'un nombre fini de ses dérivées de divers ordres. Une telle fonctionnelle linéaire est de la forme