

BIBLIOGRAPHIE

- [1]. Birkhoff G. D. „General Mean Value and Remainder Theorems” Transact. Amer. Math. Soc., 7, 107–130 (1906).
- [2]. Cauchy A. „Sur les fonctions interpolaires”, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 11, 775–789 (1840).
- [3]. Gontscharoff L. V. „Théorie de l'interpolation et de l'approximation des fonctions”, Moscou, 1945 (en russe).
- [4]. Goursat E., „Cours d'analyse mathématique” I, (s. d).
- [5]. Kowalewski G., „Interpolation und genäherte Quadrature” 1932.
- [6]. Markoff A. A., „Differenzenrechnung”, 1896.
- [7]. Mises R. v., „Über allgemeine Quadraturformeln”, J. f. die reine u. angew. Math., 174, 56–67 (1936).
- [8]. Netto E., „Lehrbuch der Combinatorik”, 1901.
- [9]. Obrechhoff N., „Neue Quadraturformeln” Abh. preuss. Akad. Wiss., 1940, no. 4, 1–20.
- [10]. Petr K., „Sur une formule pour le calcul numérique des intégrales définies”, Casopis, 44, 454–455 (1915) (en tchèque).
- [11]. — „Observation sur le calcul numérique des intégrales définies”, Casopis, 56, 67–70 (1927) (en tchèque).
- [12]. Popoviciu T., „Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles” Mathematica, 8, 1–85 (1934).
- [13]. — „Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur” (I), Mathematica, 12, 81–92 (1936).
- [14]. — „Introduction à la théorie des différences divisées” Bulletin Math. Soc. Roum. des Sci., 42, 65–78 (1940).
- [15]. — „Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur” (IX), ibid., 43, 85–141 (1942).
- [16]. — „Asupra formei restului în unele formule de aproximare ale analizei”, Lucrările Ses., Gen., Sti. ale Acad. R.P.R., din 1950, 183–185.
- [17]. — „Asupra restului în unele formule de derivare numerică” Studii și Cerc. Matem., 3, 53–122 (1952).
- [18]. — „Folytonos függvények középértékteleiről” A Magyar Tud. Akad. Közl., 4, 353–356 (1954).
- [19]. — „Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss” Studii și Cerc. St. Iași, 6, 29–57 (1955).
- [20]. — „Asupra unor ecuații funcționale” Studii și Cerc. Sti., Cluj, s. I, VI, 37–49 (1955).
- [21]. Radon J., „Residualdrücke bei Interpolations und Quadraturformeln durch bestimmte Integrale” Monatshefte f. Math. u. Phys., 42, 389–386 (1935).
- [22]. Remez E. Ya., „Sur certaines classes de fonctionnelles linéaires dans les espaces C_p et sur les termes complémentaires des formules d'analyse approximative” I, Rec. trav. Math. Acad. Ukraine, 3, 21–62 (1940). (en ukrainien).
- [23]. Sard A., „Integral Representation of Remainders” Duke Math. J., 15, 333–345 (1948).
- [24]. Steffensen J. F., „Interpolation” 1927.
- [25]. Stieltjes T. J., „Over Lagrange's interpolatie-formulae” Versl. en Med. der kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, (2) 17, 239 (1882).
- [26]. — „Einige bemerkungen omtrent de differential quotienten van eene functie van eene veranderlijke” Nieuw Arch. voor Wiskunde, 9, 106–11 (1882).
- [27]. Watson G. N., „Über eine Formel zur numerischen Berechnung der bestimmten Integrale”, Casopis, 65, 1–7 (1935).
- [28]. Widder D. V., „On the Interpolatory Properties of a Linear Combination of Continuous Functions” Amer. J. of Math., 49, 221–234 (1927).

Reçu le 1 mars 1958

EQUATIONS FONCTIONNELLES CARACTERISANT LES NOMOGRAMMES AVEC TROIS ECHELLES RECTILIGNES¹

par

FRANÇOIS RADÓ

à Cluj

Introduction

Soit

$$\overline{O_1P} = f(x), \overline{O_2Q} = g(y), \overline{O_3R} = h(z)$$

les équations des échelles du nomogramme de la fig. 1. On suppose que les fonctions f , g et h sont continues et monotones au sens restreint. Entre les cotes x , y , z des points P , Q , R , situées sur une même droite, a lieu la relation

$$(1) \quad z = H^{-1} [F(x) + G(y)],$$

$$\text{où } F(x) = \frac{d_1}{d_1 + d_2} f(x), G(y) = \frac{d_2}{d_1 + d_2} g(y),$$

$H(z) = h(z)$. La fonction $z = f(x, y)$ définie par (1) est continue et monotone (par rapport à chacune des variables). Dans les considérations suivantes toutes les fonctions à une et à deux variables seront supposées continues et monotones. Les échelles des nomogrammes ne permettent pas d'hypothèses plus larges.

Il se pose le problème de caractériser les fonctions $z = f(x, y)$, qui peuvent être mises sous la forme (1).

¹ Cet article est compris dans le travail „Ecuații funcționale în legătură cu nomografie” publié en langue roumaine dans la revue „Studii și Cercetări de Matematică, Cluj”, 9, 249–319 (1958).

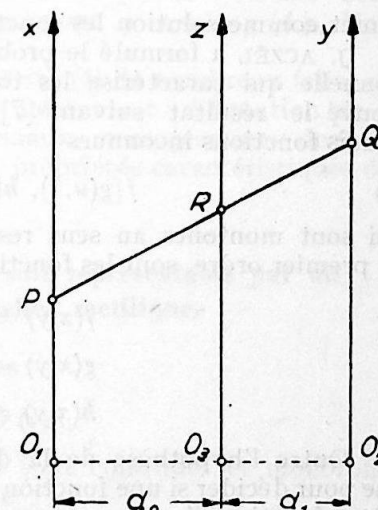


Fig. 1

Si on se borne aux fonctions $z = f(x, y)$ admettant des dérivées partielles jusqu'au troisième ordre, alors la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x, y)$ soit de la forme (1) s'exprime par la condition de SAINT-ROBERT [1]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = 0.$$

J. ACZÉL a caractérisé, dans les conditions précisées plus haut, le cas particulier de la classe des fonctions

$$(2) \quad z = f(x, y) = H^{-1} [aH(x) + bH(y) + c]$$

par l'équation fonctionnelle

$$(3) \quad f[f(u, x), f(y, v)] = f[f(u, y), f(x, v)],$$

dite équation de la bisymétrie [2], [3], [4]. Cet auteur est arrivé à ce résultat en imposant d'abord à la solution de l'équation (3) deux conditions supplémentaires. Indépendamment de celui-ci il a démontré aussi [5] que l'équation dite de l'associativité

$$(4) \quad f[f(x, y), t] = f[x, f(y, t)]$$

admet comme solution les fonctions (2), avec $a = b = 1$, $c = 0$.

J. ACZÉL a formulé le problème de la recherche d'une équation fonctionnelle qui caractérise les fonctions (1) en général [6]. M. HOSSZÚ en a trouvé le résultat suivant [7]: les solutions de l'équation fonctionnelle à trois fonctions inconnues

$$(5) \quad f[g(u, x), h(y, v)] = f[g(u, y), h(x, v)],$$

qui sont monotones au sens restreint et admettent des dérivées partielles de premier ordre, sont les fonctions

$$f(x, y) = H^{-1} [F(x) + G(y)]$$

$$g(x, y) = F^{-1} [L(x) + N(y)]$$

$$h(x, y) = G^{-1} [N(x) + M(y)].$$

Outre l'hypothèse de la dérivabilité, ce résultat a cet inconvénient que pour décider si une fonction donnée est ou non de la forme (1), à côté de cette fonction il y en a encore deux fonctions inconnues, ce qui fait l'application très difficile.

Dans ce travail nous donnerons diverses conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction $z = f(x, y)$ soit de la forme (1). La fonction f étant continue et monotone au sens restreint, l'équation $z = f(x, y)$ peut être résolue par rapport à x et y : $x = \bar{f}(y, z)$, $y = \tilde{f}(z, x)$. Une des conditions données peut être écrite de la façon suivante

$$(6) \quad f[\bar{f}(u, x), \tilde{f}(y, v)] = f[\bar{f}(u, y), \tilde{f}(x, v)],$$

qui est un cas particulier de l'équation (5). L'hypothèse de la dérivabilité n'y interviendrait pas.

Une interprétation géométrique de l'équation (6) est connue dans la théorie des tissus hexagonaux [8]. Une autre conduit au résultat suivant: les nomogrammes avec trois échelles sur une même cubique représentent une équation de la forme (1) et il n'y a pas de nomogrammes à points alignés d'autre nature pour l'équation (1). Les autres conditions qui seront données peuvent être elles aussi interprétées géométriquement de deux façons différentes.

Les équations fonctionnelles (3) et (4) et d'autres équations similaires peuvent être résolues facilement à l'aide de la condition (6). Ainsi est établie une méthode nouvelle pour étudier une certaine classe d'équations fonctionnelles.

L'étude du domaine des valeurs de la fonction $H(x)$ en (2), qui s'impose pour différentes valeurs de a , b , c , est faite également dans ce travail.

Si $z = f(x, y)$ vérifie (6) et peut donc être mis sous la forme (1), il reste le problème de déterminer les fonctions F , G , H , c'est-à-dire de déterminer les échelles, ce qui conduit à étudier l'équation fonctionnelle

$$\chi(x + y) = f[\varphi(x), \psi(y)]$$

à trois fonctions inconnues $\varphi = F^{-1}$, $\psi = G^{-1}$, $\chi = H^{-1}$ d'une seule variable. Elle a été considérée par J. ACZÉL pour $\varphi = \psi = \chi$ [4]. Nous y réduisons le cas général.

Nous avons lié à l'équation de l'associativité (4) de nombreux faits, qui ont paru jusqu'ici sans rapport entre eux, notamment: l'équation de la bisymétrie, les propriétés des tissus hexagonaux, nomogrammes dont les échelles sont situées sur une même cubique, propriétés caractéristiques des cubiques.

§ 1. Conditions pour qu'une fonction soit représentable par un nomogramme avec trois échelles rectilignes

Considérons la fonction de deux variables

$$(1) \quad f(x, y) = H^{-1} [F(x) + G(y)],$$

où les fonctions F , G , H d'une seule variable sont continues et monotones au sens restreint. La fonction (1) satisfait à la

Condition T: $f(x_1, y_2) = f(x_2, y_1)$, $f(x_1, y_3) = f(x_3, y_1) \rightarrow f(x_2, y_3) = f(x_3, y_2)$.

En effet, en vertu de la monotonie de la fonction H les relations

$$H^{-1} [F(x_1) + G(y_2)] = H^{-1} [F(x_2) + G(y_1)],$$

$$H^{-1} [F(x_1) + G(y_3)] = H^{-1} [F(x_3) + G(y_1)]$$

entraînent

$$F(x_1) + G(y_2) = F(x_2) + G(y_1), \quad F(x_1) + G(y_3) = F(x_3) + G(y_1).$$

d'où l'on obtient par soustraction

$$F(x_2) + G(y_3) = F(x_3) + G(y_2)$$

ou

$$H^{-1}[F(x_2) + G(y_3)] = H^{-1}[F(x_3) + G(y_2)].$$

La condition T entraîne évidemment la

$$\begin{aligned} \text{Condition } B: f(x_1, y_2) &= f(x_2, y_1), f(x_1, y_3) = f(x_3, y_1) = \\ &= f(x_2, y_2) \rightarrow f(x_2, y_3) = f(x_3, y_2). \end{aligned}$$

L'interprétation géométrique de cette condition est la suivante: les lignes de niveau de la fonction (1) et les parallèles aux axes forment un tissu. Soit $S(x_2, y_2)$ un point quelconque du plan et $L(x_2, y_3)$ un point appartenant à la droite $x = x_2$ (fig. 2); la droite parallèle à l'axe Ox menée par L rencontre la ligne de niveau par S en M , la parallèle à l'axe Oy par M coupe la droite parallèle à Ox par S en N , la ligne de niveau par N et la droite parallèle à Oy par S se coupent au point P , la parallèle à Ox par P et la ligne de niveau par S se coupent en Q , enfin les droites parallèles aux axes par Q et S respectivement se rencontrent en R ; la condition B exprime la propriété des points L et R d'être situés sur la même ligne de niveau. Autrement dit: l'hexagone curviligne ayant pour côtés et diagonales des lignes de niveau et des droites parallèles aux axes de coordonnées, se ferme.

Cet hexagone curviligne est dit la figure de Brianchon. Par conséquent la condition B exprime le fait que toutes les figures Brianchon se ferment. Inversement, dans la théorie des tissus hexagonaux on démontre que pour toutes les fonctions $f(x, y)$ continues et monotones au sens restreint la fermeture des figures Brianchon a pour conséquence que $f(x, y)$ est de la forme (1) [6]. Nous présentons ici une démonstration plus directe de ce théorème.

Nous admettons que la fonction $z = f(x, y)$, définie dans un domaine D est continue et monotone au sens restreint par rapport à chacune de ses variables et satisfait à la condition B pour tous les points du domaine D . Nous pouvons admettre aussi, que le domaine D contient à son intérieur l'origine des axes et que la fonction $f(x, y)$ est croissante, parce qu'en appli-

quant une transformation linéaire convenable aux variables indépendentes, on peut arriver à ce cas.

Considérons une ligne de niveau qui rencontre les axes de coordonnées dans les points A_1 et B_1 , de façon que le domaine OA_1B_1 soit dans le premier cadran et à l'intérieur de D (fig. 3). La ligne de niveau menée par le point

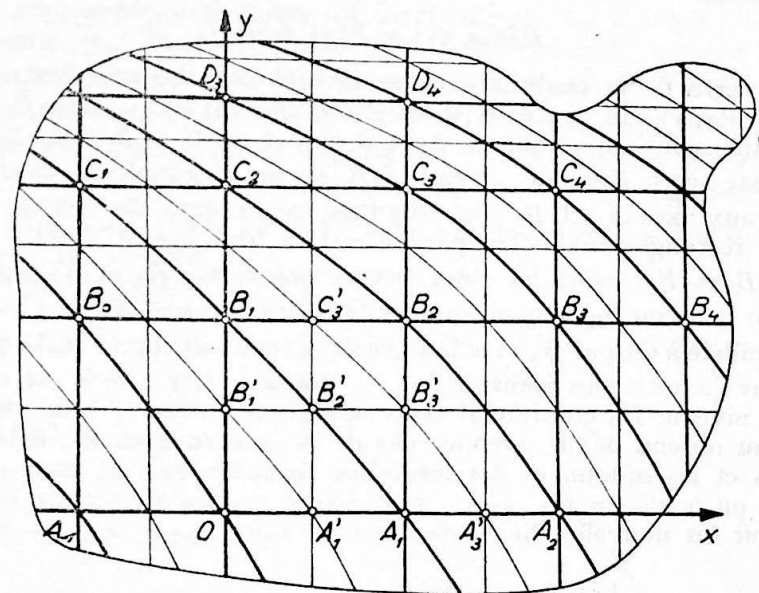


Fig. 3

d'intersection B_2 des parallèles aux axes par A_1 et B_1 coupe les axes en A_2 et C_2 respectivement. En vertu de la condition B , les figures Brianchon se referment, donc les points d'intersection B_3 et C_3 des parallèles aux axes par A_2 et B_1 , A_1 et C_2 respectivement sont situés sur une même ligne de niveau, qui rencontre les axes aux points A_3 et D_3 . Les points B_4 , C_4 et D_4 , obtenus d'une manière analogue sont également sur la même ligne de niveau. On continue cette opération jusqu'à ce que tous les points d'intersection des parallèles déjà considérées se trouvent à l'extérieur de la partie située dans le premier cadran du domaine D . Évidemment on peut faire la même construction pour tous les cadrans; soit C_1 par exemple le point d'intersection de la ligne de niveau par B_1 avec la droite parallèle à l'axe Ox par C_2 ; B_0 et A_{-1} respectivement, l'intersection de la ligne parallèle à l'axe Oy par C_1 avec la parallèle à Ox par B_1 et O respectivement; les points B_0 et O se trouveront sur la même ligne de niveau, etc. Nous désignerons par $x_{i,1}$ l'abscisse commune des points A_i , B_{i+1} , C_{i+2} , ..., par $y_{1,1}$ l'ordonnée commune des points B_k , par $y_{2,1}$ celle des points C_k , etc., et par $z_{i,1}$ les valeurs communes de la fonction $z = f(x, y)$ aux points A_i , B_i , C_i , ...

Définissons les fonctions $F(x)$, $G(y)$ et $H(z)$, pour le moment sur les points discrets $x_{i,1}$, $y_{i,1}$ et $z_{i,1}$, ainsi :

$$F(x_{i,1}) = i, \quad G(y_{i,1}) = i, \quad H(z_{i,1}) = i.$$

Alors la fonction donnée $z = f(x, y)$ satisfait aux sommets du réseau construit à la relation

$$(7) \quad H[f(x, y)] = F(x) + G(y).$$

En vertu de la continuité et de la monotonie au sens restreint de la fonction $f(x, y)$, le système d'équations $f(\alpha, \beta) = z_{1,1}$, $f(\alpha, 0) = f(0, \beta)$ admet une solution unique α, β et $0 < \alpha < x_1$, $0 < \beta < y_1$; c'est-à-dire qu'il existe sur la ligne de niveau A_1B_1 un point unique B_2 dont les projections aux axes A_1 et B_1 sont sur une même ligne de niveau. Construisons un rectangle aux côtés parallèles aux axes ayant comme sommets opposés B_2 et B_2' ; alors les deux autres sommets B_3 et C_3 doivent être situés sur la même ligne de niveau. De la même façon B_4 étant l'intersection de la parallèle à Ox par B_3 avec la ligne de niveau par B_2 , et A_3 la projection de B_4 sur l'axe Ox , les points B_3 et A_3 doivent être situés sur une même ligne de niveau. En continuant cette opération on arrive à un raffinement du réseau obtenu par le premier pas de la construction. En désignant les abscisses et les ordonnées des nouvelles parallèles par $x_{i,2}$ et $y_{i,2}$ respectivement, on a $x_{2k,2} = x_{k,1}$, $y_{2k,2} = y_{k,1}$. Soient $z_{i,2}$ les valeurs de la fonction $f(x, y)$ sur les nouvelles lignes de niveau; alors $z_{2k,2} = z_{k,1}$. En définissant

$$F(x_{i,2}) = \frac{i}{2}, \quad G(y_{i,2}) = \frac{i}{2}, \quad H(z_{i,2}) = \frac{i}{2},$$

nous avons aux sommets du réseau original les valeurs définies ci-dessus, et nous pouvons observer que la relation (7) est vérifiée pour les sommets du réseau raffiné.

Nous continuons cette opération de raffinement du réseau indéfiniment. Au n -ième raffinement nous définissons les ensembles $\{x_{i,n}\}$, $\{y_{i,n}\}$, $\{z_{i,n}\}$ et les valeurs des fonctions F, G et H dans ces points en posant

$$F(x_{i,n}) = \frac{i}{2^n}, \quad G(y_{i,n}) = \frac{i}{2^n}, \quad H(z_{i,n}) = \frac{i}{2^n}.$$

Cela ne change pas les valeurs de ces fonctions aux points du $(n-1)$ -ième réseau et la relation (7) se vérifie de proche en proche.

Les abscisses $x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n}, \dots$ des points $A_1, A_{1,1}, \dots, A_{1,n-1}, \dots$ sont positives et forment une suite décroissante, qui a donc une limite $x^* \geq 0$. On a

$$f(x_{1,n}, y_{1,n}) = f(x_{1,n-1}, 0)$$

$$f(x_{1,n}, 0) = f(0, y_{1,n}).$$

Il résulte de la seconde égalité, en vertu de la continuité et monotonie au

sens restreint de $f(x, y)$ que $y_{1,n}$ a aussi une limite, soit y^* . Si dans la première égalité $n \rightarrow \infty$, on obtient $f(x^*, y^*) = f(x^*, 0)$, c'est-à-dire $y^* = 0$. La seconde égalité entraîne $f(x^*, 0) = f(0, 0)$, donc $x^* = 0$.

Considérons un domaine OAB , intérieur à D , limité par les axes de coordonnées et par la ligne de niveau AB , A étant un sommet de réseau. Alors l'ensemble $\{x_{i,n}\}$ est dense sur le segment OA , quand i et n varient. En effet, supposons qu'il existe un intervalle $(\gamma, \delta) \in OA$ qui ne contient pas de points $x_{i,n}$. Pour chaque n , nous déterminons le nombre $k = k(n)$ de sorte que l'intervalle (γ, δ) soit compris entre $A_k^{(n)}$ et $A_{k+1}^{(n)}$. La ligne de niveau par $A_k^{(n)}$ coupe l'axe Oy en $Q_k^{(n)}$, la parallèle à Ox par ce point rencontre la ligne de niveau par $A_{k+1}^{(n)}$ en $Q_{k+1}^{(n)}$ (fig. 4). La projection du point $Q_{k+1}^{(n)}$ sur Ox est justement le point $A_1^{(n)}$. En tenant compte du fait que pour $n \rightarrow \infty$, $Q_k^{(n)} Q_{k+1}^{(n)} = OA_1^{(n)} = x_{1,n} \rightarrow 0$, on a $A_k^{(n)} A_{k+1}^{(n)} \rightarrow 0$, en contradiction avec notre hypothèse. Il s'ensuit que les points de réseau forment un ensemble dense sur le domaine OAB .

Considérons un domaine OMM^* , limité par les axes et par la ligne de niveau MM^* , qu'on suppose qu'elle ne passe plus maintenant par des points de réseau (fig. 5). Nous allons démontrer que les points de réseau forment un ensemble dense sur OMM^* . Il suffit de démontrer que M est un point d'accumulation de l'ensemble $\mathcal{L}$, formé par les points $x_{i,n}$ situés sur le segment OM . Supposons le contraire, c'est-à-dire que $Q = \sup \mathcal{L}$ soit situé à gauche de M . Nous savons que $\mathcal{L}$ est dense sur OQ , donc on peut choisir les points Q' et Q'' appartenant à $\mathcal{L}$ de telle manière que le rectangle $Q'Q''RS$ ait les sommets S et Q'' sur la même ligne de niveau et que le sommet R soit dans le domaine QMM^*Q^* . Il s'ensuit que R et R' sont des points de réseau, c'est-à-dire que $R' \in S$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $Q = \sup \mathcal{L}$.

Couvrons le domaine D par des domaines D_j , dont chacun est limité par des parallèles aux axes et par une ligne de niveau. Il résulte de ce que nous venons de démontrer que, si D_j contient un point de réseau, alors il en contient un ensemble dense sur D_j . Il s'ensuit immédiatement que les points de réseau forment un ensemble dense sur D .

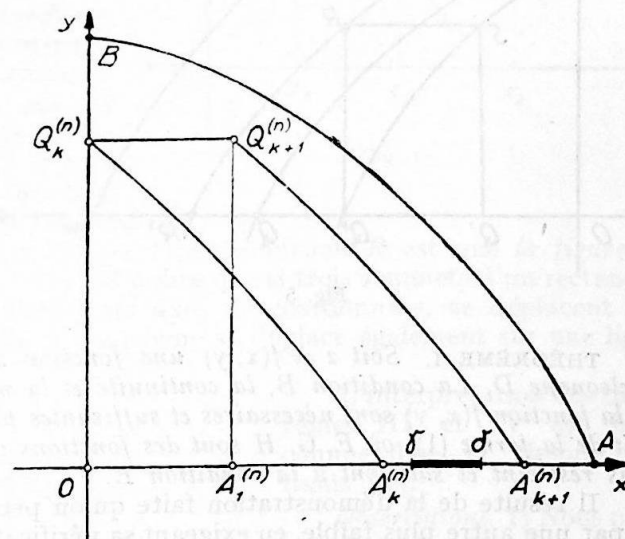


Fig. 4

Les fonctions F, G, H définies sur les ensembles denses $\{x_{i,n}\}, \{y_{i,n}\}, \{z_{i,n}\}$ respectivement, sont des fonctions continues et monotones au sens restreint sur ces ensembles, ainsi leur définitions peuvent être étendues par continuité pour toutes les valeurs x, y, z , qui se trouvent dans les intervalles déterminés par le rectangle circonscrit au domaine D , ayant les

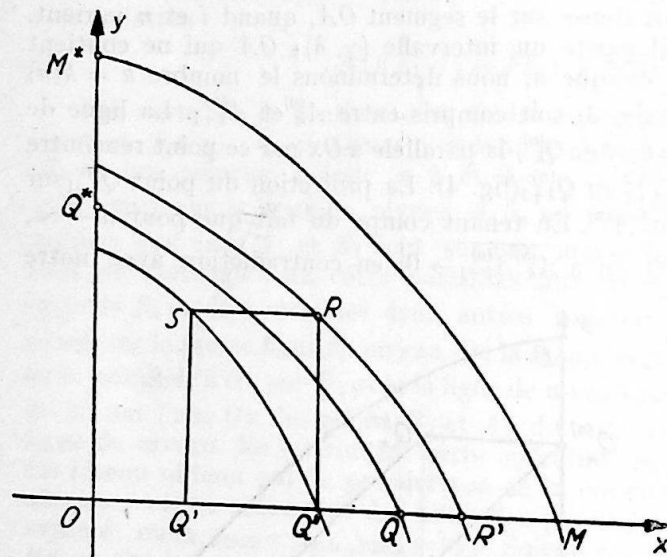


Fig. 5

THÉOREME I. Soit $z = f(x, y)$ une fonction définie dans un domaine quelconque D . La condition B , la continuité et la monotonie au sens restreint de la fonction $f(x, y)$ sont nécessaires et suffisantes pour que la fonction $f(x, y)$ soit de la forme (1), où F, G, H sont des fonctions continues et monotones au sens restreint et satisfont à la condition E .

Il résulte de la démonstration faite qu'on peut remplacer la condition B par une autre plus faible, en exigeant sa vérification seulement dans tous les domaines intérieurs à D , ayant des diamètres plus petits qu'un nombre positif. On voit par suite d'un raisonnement aisé, qu'il suffit aussi que tout point du D ait un voisinage où la condition B soit satisfaite. Donc on a le

THÉOREME II. Soit $z = f(x, y)$ défini dans le domaine D . Si tout point de D a un voisinage dans lequel la fonction $f(x, y)$ est de la forme (1) avec F, G, H continues et monotones au sens restreint, alors $f(x, y)$ est de la forme (1) dans le domaine D même (la propriété locale (1) entraîne la propriété globale (1)).

Dans les conditions de continuité et de monotonie énoncées: (1) $\rightarrow$ condition $T \rightarrow$ condition $B \rightarrow$ (1). On a donc le

THÉOREME III. La condition T , la continuité et la monotonie au sens restreint de la fonction $f(x, y)$ sont nécessaires et suffisantes pour que $f(x, y)$ soit de la forme (1), où F, G et H sont des fonctions continues, monotones au sens restreint (et satisfont à la condition E).

cotés parallèles aux axes, et par les lignes de niveau tangentes à ce domaine respectivement. Les fonctions F, G, H ainsi définies sont continues, monotones au sens restreint et satisfont en plus à la

Condition E: L'intervalle des valeurs de la fonction H contient tous les nombres de la forme $F(x) + G(y)$, $(x, y) \in D$.

On peut voir que la relation (7) est vérifiée pour tous les $(x, y) \in D$, si l'on passe à la limite par des points du réseau. Ainsi nous avons démontré le

L'interprétation géométrique de la condition T est représentée sur la figure 6. La figure dite figure de Thomsen, doit se fermer.

On peut remplacer la condition B et la condition T respectivement par une troisième:

$$\begin{aligned} \text{Condition } R: f(x_1, y_3) &= \\ &= f(x_2, y_1); f(x_1, y_4) = f(x_2, y_2); \\ f(x_3, y_3) &= f(x_4, y_1) \rightarrow \\ &\rightarrow f(x_3, y_4) = f(x_4, y_2) \end{aligned}$$

En effet, on peut constater par une vérification directe, que la condition R résulte de (1) et que celle-ci entraîne, en posant $x_2 = x_3$ et $y_2 = y_3$, la condition B , et donc (1). On a le

THÉOREME IV. La condition R , la continuité et la monotonie au sens restreint sont nécessaires et suffisantes pour que la fonction $f(x, y)$ soit de la forme (1), où les fonctions F, G, H sont continues et monotones au sens restreint (et satisfont à la condition E).

L'interprétation géométrique de la condition R est que la figure de Reidemeister se ferme (fig. 7), c'est-à-dire que si trois sommets d'un rectangle, dont les cotés sont parallèles aux axes de coordonnées, se déplacent sur des lignes de niveau, alors le quatrième se déplace également sur une ligne de niveau.

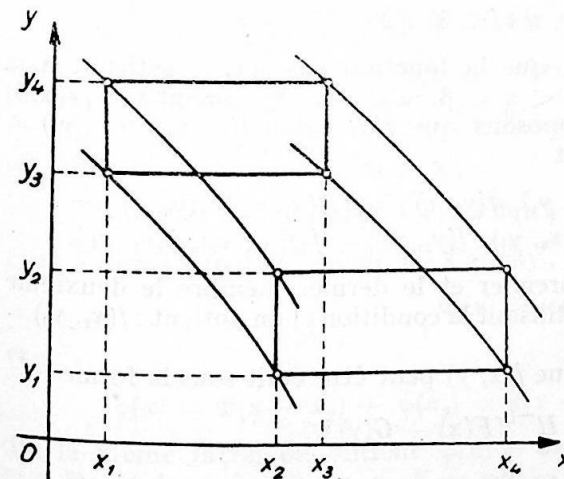


Fig. 7

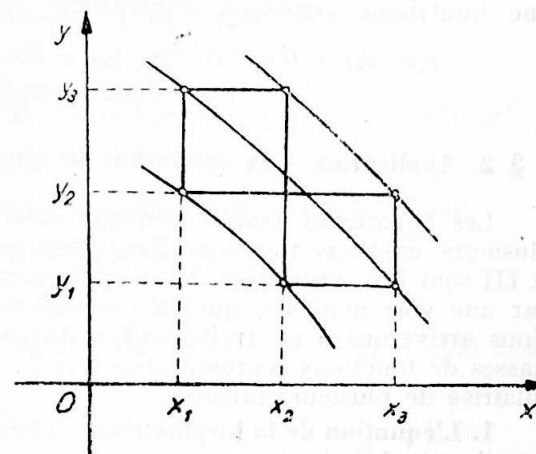


Fig. 6

L'interprétation des théorèmes III et IV est bien connue dans la théorie des tissus [8].

Observations. 1) Nous pouvons démontrer directement l'implication $T \rightarrow R$. Soit

$$\begin{aligned} f(x_1, y_3) &= f(x_2, y_1), f(x_1, y_4) = \\ &= f(x_2, y_2), f(x_3, y_3) = f(x_4, y_1) \end{aligned}$$

et définissons les nombres ξ et η par

$$\begin{aligned} f(x_1, y_4) &= f(\xi, y_3), f(x_1, \eta) = \\ &= f(x_3, y_3). \end{aligned}$$

En tenant compte de T $f(\xi, \eta) = f(x_3, y_4)$. D'autre part

$$f(x_2, y_1) = f(x_1, y_3), f(x_2, y_2) = f(\xi, y_3) \rightarrow f(\xi, y_1) = f(x_1, y_2),$$

$$f(x_1, \eta) = f(x_4, y_1), f(x_1, y_2) = f(\xi, y_1) \rightarrow f(x_4, y_2) = f(\xi, \eta);$$

donc $f(x_4, y_2) = f(x_3, y_4)$.

2) Les conditions T et R peuvent être combinées et nous obtenons une quatrième condition équivalente

$$f(x_1, y_3) = f(x_3, y_1), f(x_1, y_4) = f(x_4, y_1), f(x_2, y_3) = f(x_3, y_2) \\ \rightarrow f(x_2, y_4) = f(x_4, y_2).$$

§ 2. Application à la résolution de quelques équations fonctionnelles

Les théorèmes établis peuvent être utilisés pour la résolution de plusieurs équations fonctionnelles. Plus particulièrement les théorèmes I et III sont bien utilisables. Nous appliquerons ces théorèmes pour résoudre, par une voie nouvelle, quelques équations résolues par d'autres auteurs. Nous arriverons à un traitement unitaire des équations caractérisant des classes de fonctions représentables par le nomogramme de la fig. 1, particulièrement de plusieurs façons.

1. L'équation de la bisymétrie. — Cherchons quelles sont les fonctions $z = f(x, y)$, définies pour $\alpha < x < \beta$, $\alpha < y < \beta$, satisfaisant aux conditions suivantes :

- $\alpha < f(x, y) < \beta$ (nous disons que f est une opération)
- $f(x, y)$ est continue
- $f(x, y)$ est monotone au sens restreint
- elle satisfait à l'équation de la bisymétrie :

$$(3) \quad f[f(u, x), f(y, v)] = f[f(u, y), f(x, v)] \\ \text{pour } x, y, v, u \in (\alpha, \beta) [2].$$

Nous démontrerons d'abord que la fonction $z = f(x, y)$ satisfait à la condition T dans le rectangle $R[\alpha < x < \beta, \alpha < y < \beta]$. Soient $x_i, y_i \in (\alpha, \beta)$ ($i = 1, 2, 3$) et $v \in (\alpha, \beta)$, et supposons que $f(x_1, y_2) = f(x_2, y_1)$, $f(x_1, y_3) = f(x_3, y_1)$. On a successivement

$$f[f(x_2, y_3), f(y_1, v)] = f[f(x_2, y_1), f(y_3, v)] = f[f(x_1, y_2), f(y_3, v)] = \\ = f[f(x_1, y_3), f(y_2, v)] = f[f(x_3, y_1), f(y_2, v)] = f[f(x_3, y_2), f(y_1, v)].$$

On peut observer que dans le premier et le dernier membre le deuxième argument est identique, donc en utilisant la condition c) on obtient : $f(x_2, y_3) = f(x_3, y_2)$.

Il résulte du théorème III que $f(x, y)$ peut être écrit sous la forme

$$f(x, y) = H^{-1}[F(x) + G(y)].$$

Substituant en (3), on obtient

$$H^{-1}\{FH^{-1}[F(u) + G(x)] + GH^{-1}[F(y) + G(v)]\} = H^{-1}\{FH^{-1}[F(u) + G(y)] + \\ + GH^{-1}[F(x) + G(v)]\}.$$

En égalant les arguments de la fonction H^{-1} des deux côtés de l'égalité et en changeant les notations

$$(8) \quad FH^{-1} = \varphi, \quad GH^{-1} = \psi \\ H(u) = s, H(v) = t, H(x) = \xi, H(y) = \eta,$$

on obtient

$$\varphi[\varphi(s) + \psi(\xi)] + \psi[\varphi(\eta) + \psi(t)] = \varphi[\varphi(s) + \psi(\eta)] + \psi[\varphi(\xi) + \psi(t)]$$

ou

$$\varphi[\varphi(s) + \psi(\xi)] - \varphi[\varphi(s) + \psi(\eta)] = \psi[\varphi(\xi) + \psi(t)] - \psi[\varphi(\eta) + \psi(t)].$$

Le second membre ne contient pas s , donc

$$\varphi(s_2) - \varphi(s_1) = K_{\xi, \eta} \quad \text{si} \quad s_2 - s_1 = \psi(\xi) - \psi(\eta).$$

La valeur de d étant fixée, choisissons ξ et η tels que $\psi(\xi) - \psi(\eta) = d$; alors $K_{\xi, \eta} = \lambda(d)$, et

$$\varphi(s_2) - \varphi(s_1) = \lambda(s_2 - s_1),$$

pour toutes les valeurs de s_1 et s_2 contenues dans le domaine de définition de la fonction φ . Par un changement de notation nous obtenons une équation fonctionnelle semblable à l'équation de Cauchy, mais contenant deux fonctions inconnues

$$(9) \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \lambda(y)$$

En posant $x = x_0$, $\lambda(y) = \varphi(y + x_0) - \varphi(x_0)$, l'équation (9) devient

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y + x_0) - \varphi(x_0).$$

Pour $\varphi(x + x_0) - \varphi(x_0) = \Phi(x)$ on obtient

$$\Phi(x + y - x_0) = \Phi(x - x_0) + \Phi(y)$$

ou, avec la notation $x - x_0 = x'$,

$$\Phi(x' + y) = \Phi(x') + \Phi(y),$$

c'est-à-dire l'équation même de Cauchy; par conséquent

$$\Phi(x) = ax.$$

et

$$\varphi(x) = \Phi(x - x_0) + \varphi(x_0) = a(x - x_0) + \varphi(x_0) = ax + c_1.$$

De la même façon on obtient $\psi(x) = bx + c_2$.

De la formule (8) on a $F = \varphi H = aH + c_1$ et $G = \psi H = bH + c_2$.

Par conséquent

$$(10) \quad f(x, y) = H^{-1}[aH(x) + bH(y) + c]$$

($c = c_1 + c_2$). Quant à la fonction $H(x)$ on sait qu'elle est continue, monotone au sens restreint et vérifie la condition E. La condition E dans ce cas peut être énoncée ainsi : l'intervalle (γ, δ) des valeurs de la fonction $H(x)$ satisfait à la

Condition E' : $h_1, h_2 \in (\gamma, \delta) \rightarrow ah_1 + bh_2 + c \in (\gamma, \delta)$.

On peut voir aisément que les formes suivantes de l'intervalle (γ, δ) sont équivalentes à la condition E', pour les valeurs différentes de a, b, c .

Si $a + b \neq 1$, on peut supposer $c = 0$ (parce qu'en écrivant $H(x) = H_1(x) + c/(a + b - 1)$ le terme constant disparaîtra). Dans les cas I. - V. nous avons supposé $c = 0$.

I. $a > 0, b > 0, a + b < 1$:

$\gamma < 0 < \delta$

II. $a > 0, b > 0, a + b > 1$:

$\gamma \geq 0, \delta = \infty$ ou $\gamma = -\infty, \delta \leq 0$
ou $\gamma = -\infty, \delta = +\infty$

III. $a < 0, b < 0, a + b \geq -1$:

$\gamma + \delta = 0$

IV. $a < 0, b < 0, a + b < -1$:

$\gamma = -\infty, \delta = +\infty$

V. $ab < 0$:

$\gamma = -\infty, \delta = +\infty$

VI. $a + b = 1, 0 < a < 1, c = 0$:

(γ, δ) quelconque

VII. $a + b = 1, 0 < a < 1, c > 0$:

γ quelconque, $\delta = +\infty$

VIII. $a + b = 1, 0 < a < 1, c < 0$:

$\gamma = -\infty, \delta$ quelconque

IX. $a + b = 1, a < 0$ ou $a > 1$:

$\gamma = -\infty, \delta = +\infty$

Dans tous les cas, les raisonnements s'appuient sur le fait que $p \geq 0, q \geq 0, p + q = 1 \rightarrow ph_1 + qh_2 \in [h_1, h_2]$.

Nous avons démontré que (10) est la conséquence des conditions a) - d), où $H(x)$ est continue, monotone au sens restreint et où l'intervalle (γ, δ) de ses valeurs satisfait à la condition E' (ou I. - IX). Inversement, les fonctions (10) avec $H(x)$ ainsi précisé satisfont aux conditions a) - d), ce qu'on peut vérifier directement.

Observation. On obtient le même résultat si l'intervalle (α, β) est fermé ou demi-ouvert. Il suffit de considérer l'intervalle ouvert (α, β) ; de la condition c) il résulte que $f(x, y) = \alpha$ ou β seulement si x et y sont les extrémités de l'intervalle (α, β) , donc la condition a) reste valable pour l'intervalle ouvert ; les conditions b) - d) restent évidemment valables. On applique le théorème IV. pour l'intervalle ouvert (α, β) , on définit la fonction $H(x)$ pour α ou β par continuité, ce qui est possible si $\gamma, \delta \neq \infty$ respectivement. La condition E' devient plus restrictive. Pour un intervalle fermé $[\alpha, \beta]$ ce ne sont que les cas I, III et VI qui restent possibles ; pour l'intervalle demi-ouvert $[\alpha, \beta)$ on peut ajouter les cas II et VII et pour $(\alpha, \beta]$ les cas II et VIII.

2. L'équation de la bisymétrie avec conditions supplémentaires. J. ACZÉL a résolu l'équation de la bisymétrie d'abord en imposant à la solution les conditions supplémentaires suivantes :

e) *Reflexivité* : $f(x, x) = x,$

f) *Symétrie* : $f(x, y) = f(y, x),$

$x \in (\alpha, \beta)$

$x, y \in (\alpha, \beta).$

Plus tard il a supprimé la condition f) et enfin la condition e), [2]. Après avoir résolu l'équation de la bisymétrie en général au point 1., nous pouvons maintenant retrouver facilement aussi ces résultats intermédiaires. Dans les considérations suivantes l'intervalle (α, β) peut être ouvert, fermé ou demi-ouvert.

Les conditions a) - e) sont nécessaires et suffisantes pour que la fonction $f(x, y)$ soit de la forme

$$(11) \quad f(x, y) = H^{-1} [aH(x) + bH(y)], \quad (a + b = 1).$$

On peut vérifier tout de suite que (11) satisfait aux conditions a) - e).

Supposons maintenant que la fonction $f(x, y)$ satisfait aux conditions a) - e). En utilisant le résultat du point 1 on peut écrire

$$f(x, y) = H^{-1} [aH(x) + bH(y) + c];$$

alors la condition e) devient

$$aH(x) + bH(x) + c = H(x)$$

pour $x \in (\alpha, \beta)$, possible seulement lorsque $c = 0, a + b = 1$.

Il résulte immédiatement :

La fonction $f(x, y)$ satisfait aux conditions a) - f) si et seulement si

$$(12) \quad f(x, y) = H^{-1} \left[\frac{H(x) + H(y)}{2} \right].$$

Observations. 1) Les conditions a) - f) peuvent être remplacées par a), b), c) et

Distributivité en soi : $f[x, f(y, z)] = f[f(x, y), f(z, x)]$;

ceci résulte d'une note de RYLL-NARDZEWSKI par l'intermédiaire de (12) [9], ou directement, comme KNASTER a montré [10].

2) Les conditions d) et f) peuvent être remplacées par l'équation modifiée de la bisymétrie

$$(13) \quad f[f(u, x), f(v, y)] = f[f(u, y), f(v, x)].$$

Car, en posant $u = v, f(u, x) = \xi, f(u, y) = \eta$, il en résulte que

$$f(\xi, \eta) = f(\eta, \xi),$$

ce qui conduit à l'équation (10). D'autre par l'équation (10) et la symétrie entraînent l'équation (13).

3. L'équation de l'associativité. Soit $f(x, y)$ une fonction définie pour $x, y \in (\alpha, \beta)$ (α, β peuvent être infinies) jouissant des propriétés suivantes :

a) $f(x, y) \in (\alpha, \beta)$ (*f opération*)

b) *continue et monotone au sens restreint*

c) $f[f(x, y), t] = f[x, f(y, t)]$ (*f associative*).

J. ACZÉL a démontré [5] que ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que $f(x, y)$ soit de la forme

$$f(x, y) = H^{-1} [H(x) + H(y)],$$

où $H(x)$ est une fonction continue et monotone au sens restreint dans (α, β) .

Nous démontrerons maintenant ce résultat en employant notre méthode, c'est-à-dire en vérifiant d'abord la condition B.

Soit

$$(14) \quad f(x_1, y_2) = f(x_2, y_1), \quad f(x_1, y_3) = f(x_2, y_2) = f(x_3, y_1);$$

nous pouvons choisir les valeurs t_1 et t_2 telles que

$$(15) \quad f(y_1, t_2) = f(y_2, t_1),$$

lorsque $|y_1 - y_2|$ est suffisamment petit, ce qu'on peut supposer en vertu du théorème II. En utilisant c), (14) et (15) on obtient successivement

$$\begin{aligned} f[x_1, f(y_2, t_2)] &= f[f(x_1, y_2), t_2] = f[f(x_2, y_1), t_2] = f[x_2, f(y_1, t_2)] = \\ &= f[x_2, f(y_2, t_1)] = f[f(x_2, y_2), t_1] = f[f(x_3, y_3), t_1] = f[x_3, f(y_3, t_1)]. \end{aligned}$$

Dans le premier et le dernier membre le premier argument est identique, donc il résulte de la monotonie au sens restreint que

$$(16) \quad f(y_3, t_1) = f(y_2, t_2).$$

En utilisant c), (14), (15) et (16), on a

$$\begin{aligned} f[f(x_2, y_3), t_1] &= f[x_2, f(y_3, t_1)] = f[x_2, f(y_2, t_2)] = f[f(x_2, y_2), t_2] = \\ &= f[f(x_3, y_1), t_2] = f[x_3, f(y_1, t_2)] = f[x_3, f(y_2, t_1)] = f[f(x_3, y_2), t_1], \end{aligned}$$

d'où

$$(17) \quad f(x_2, y_3) = f(x_3, y_2).$$

La condition B est satisfaite, donc

$$f(x, y) = H^{-1} [F(x) + G(y)].$$

En la substituant dans c), en égalant les arguments de la fonction H^{-1} dans les deux membres et en groupant les termes, on obtient

$$FH^{-1} [F(x) + G(y)] - F(x) = GH^{-1} [F(y) + G(t)] - G(t).$$

Le deuxième membre ne contient pas x , donc

$$(18) \quad FH^{-1} [F(x) + G(y)] - F(x) = \lambda[G(y)].$$

Notons

$$FH^{-1} = \varphi; \quad F(x) = \xi, \quad G(y) = \eta.$$

L'équation (18) devient

$$\varphi(\xi + \eta) = \xi + \lambda(\eta);$$

en posant $\eta = \text{const.}$ on a

$$\varphi(\xi) = \xi + a,$$

$$\text{donc } FH^{-1}(\xi) = \xi + a \text{ ou}$$

$$F(x) = H(x) + a.$$

D'une manière analogue

$$G(x) = H(x) + b,$$

donc

$$H[f(x, y)] = H(x) + H(y) + a + b,$$

et par un changement de notation

$$(19) \quad f(x, y) = H^{-1} [H(x) + H(y)].$$

D'autre part, ces fonctions vérifient l'équation c). Donc, nous avons retrouvé le résultat de J. Aczél.

Les fonctions (19) étant des cas particuliers des fonctions (10), on peut appliquer ici la discussion des valeurs de la fonction $H(x)$ (page 13). Dans (19) $a = b = 1$, donc c'est le cas II qui est valable.

4. L'équation de la demi-symétrie. Nous avons donné ce nom à l'équation

$$(20) \quad f[f(t, x), y] = f[f(t, y), x],$$

résolue pour la première fois par A. R. SCHWEITZER, qui l'avait réduite à une équation différentielle [11], et récemment par M. HOSSZÚ pour les fonctions $f(x, y)$ continues et monotones au sens restreint dans l'intervalle (α, β) [12].

Soit $f(x, y)$ une opération continue et monotone au sens restreint dans (α, β) qui satisfait à l'équation (20). Nous démontrons que la condition T est vérifiée. Soit

$$(21) \quad f(x_1, y_2) = f(x_2, y_1), \quad f(x_1, y_3) = f(x_3, y_1);$$

alors

$$\begin{aligned} f[f(x_2, y_3), y_1] &= f[f(x_2, y_1), y_3] = f[f(x_1, y_2), y_3] = \\ &= f[f(x_1, y_3), y_2] = f[f(x_3, y_1), y_2] = f[f(x_3, y_2), y_1]. \end{aligned}$$

En comparant le premier et le dernier terme, on obtient $f(x_2, y_3) = f(x_3, y_2)$, c'est-à-dire que la condition T est vérifiée. Il résulte du théorème III que

$$f(x, y) = H^{-1} [F(x) + G(y)].$$

Substituant dans (20)

$$FH^{-1} [F(t) + G(x)] + G(y) = FH^{-1} [G(t) + G(y)] + G(x),$$

ce qui implique $FH^{-1}(x) = x + a$, c'est-à-dire $F(x) = H(x) + a$. En changeant $G(y) + a$ par $G(y)$, on obtient

$$(22) \quad f(x, y) = H^{-1}[H(x) + G(y)].$$

D'autre part les fonctions (22) satisfont à l'équation (20), donc les fonctions (22) sont les solutions continues et monotones au sens restreint les plus générales de l'équation (20).

Le domaine (γ, δ) des valeurs de la fonction $H(x)$ est soumis à la restriction selon laquelle les nombres $H(x) + G(y)$ doivent appartenir à (γ, δ) . Si $G(y)$ ne prend que des valeurs positives, la restriction est $\delta = \infty$; si $G(y)$ ne prend que des valeurs négatives, alors $\gamma = -\infty$; si $G(y)$ peut être positif aussi bien que négatif, alors la restriction est plus forte: $\gamma = -\infty$, $\delta = +\infty$.

5. Extension pour le cas où $f(x, y)$ n'est pas une opération. Dans ce paragraphe nous avons supposé jusqu'ici que pour $x, y \in (\alpha, \beta)$, $f(x, y) \in (\alpha, \beta)$, c'est-à-dire que $f(x, y)$ est une opération. Les raisonnements employés pour résoudre les équations de la bisymétrie, de l'associativité et de la demi-symétrie peuvent être appliqués avec des modifications évidentes pour le cas où la condition d'opération est remplacée par une autre faible: l'intervalle (α, β) contient un sousintervalle (α', β') tel que pour $x, y \in (\alpha', \beta')$, $f(x, y) \in (\alpha, \beta)$. Alors les solutions (10), (19) et (22) respectivement sont valables dans (α', β') .

L'existence de l'intervalle (α', β') est assurée lorsqu'il y a $e \in (\alpha, \beta)$ pour lequel $f(e, e) = e$.

§ 3. Détermination des échelles

Une fois faite la constatation que la fonction $z = f(x, y)$ peut être écrite sous la forme (1), apparaît le problème de la détermination des fonctions $F(x)$, $G(y)$ et $H(z)$, c'est-à-dire la détermination des équations des échelles respectives. Pour cela il faut résoudre l'équation fonctionnelle (1) où $f(x, y)$ est une fonction donnée et $F(x)$, $G(y)$, $H(z)$ trois fonctions inconnues d'une seule variable. Avec les notations $F(x) = \xi$, $G(y) = \eta$, l'équation (1) s'écrit ainsi

$$(23) \quad H^{-1}(\xi + \eta) = f[F^{-1}(\xi), G^{-1}(\eta)]$$

ou

$$(24) \quad \chi(x + y) = f[\varphi(x), \psi(y)]$$

($\varphi = F^{-1}$, $\psi = G^{-1}$, $\chi = H^{-1}$). L'équation (23) est une généralisation de l'équation fonctionnelle à une fonction inconnue, considérée par J. ACZÉL [4]

(24) qui est une généralisation de l'équation de Cauchy ($\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$).

Une conséquence immédiate des résultats du § 1 est le

THÉOREME V. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (23) admette un système de solutions continues et monotones au sens restreint est que la fonction $f(x, y)$ soit continue, monotone (au sens r.) et qu'elle satisfasse à l'une des conditions B, T, R.

La résolution de l'équation (23) revient à celle de l'équation (24), pour laquelle J. ACZÉL a donné une méthode générale de construire la solution. En effet, en posant $y = 0$, puis $x = 0$ et en notant $g(0) = b$, $h(0) = c$, on a

$$(25) \quad \begin{cases} \chi(x + y) = f[\varphi(x), \psi(y)] \\ \chi(x) = f[\varphi(x), c] \\ \chi(y) = f[b, \psi(y)]. \end{cases}$$

En éliminant de (25) les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ on obtient une équation de la forme (24).

Exemple. Soit à résoudre l'équation à 3 fonctions inconnues:

$$(26) \quad \chi(x + y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

On a

$$\begin{cases} \chi(x) = \varphi(x) + c \\ \chi(y) = b + \psi(y); \end{cases}$$

en substituant dans (26) on obtient

$$\chi(x + y) = \chi(x) + \chi(y) - b - c.$$

En remplaçant la fonction inconnue $\chi(x)$ par $\bar{\chi}(x) + b + c$, on obtient pour $\bar{\chi}(x)$ l'équation de Cauchy

$$\bar{\chi}(x + y) = \bar{\chi}(x) + \bar{\chi}(y),$$

qui admet la solution $\bar{\chi}(x) = ax$. Par conséquent

$$(27) \quad \begin{cases} \varphi(x) = ax + b \\ \psi(x) = ax + c \\ \chi(x) = ax + b + c. \end{cases}$$

D'autre part les fonctions (27) satisfont à l'équation (26). La solution de l'équation (26) est (27), où a, b, c sont des constantes quelconques.

Observation. L'équation (26) est une généralisation de l'équation de Cauchy, dont la résolution par une autre méthode est connue [13].

Étudions le nombre des solutions de l'équation (23). On remarque que si $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ est un système de solutions continues et monotones, alors les fonctions

$$(28) \quad \begin{cases} \varphi^*(x) = \varphi(ax + b) \\ \psi^*(x) = \psi(ax + c) \\ \chi^*(x) = \chi(ax + b + c) \end{cases}$$

forment de même un système de solutions. Démontrons qu'il n'existe pas

d'autres solutions. Soit $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $\bar{\chi}(x)$ une solution quelconque (continue et monotone) de l'équation (23). On a

$$\chi(x+y) = f[\varphi(x), \psi(y)]$$

$$\bar{\chi}(x+y) = f[\bar{\varphi}(x), \bar{\psi}(y)];$$

déterminons u et v tels que

$$\varphi(u) = \bar{\varphi}(x) \quad \text{et} \quad \psi(v) = \bar{\psi}(y);$$

alors $\bar{\chi}(x+y) = \chi(u+v)$ ou

$$\chi^{-1}\bar{\chi}(x+y) = \varphi^{-1}\bar{\varphi}(x) + \psi^{-1}\bar{\psi}(y).$$

Cette équation est justement notre exemple (26) avec les fonctions inconnues $\varphi^{-1}\bar{\varphi}$, $\psi^{-1}\bar{\psi}$, $\chi^{-1}\bar{\chi}$, c'est-à-dire $\varphi^{-1}\bar{\varphi}(x) = ax + b$, $\psi^{-1}\bar{\psi}(x) = ax + c$, $\chi^{-1}\bar{\chi}(x) = ax + b + c$, d'où résulte $\bar{\varphi}(x) = \varphi(ax + b)$, $\bar{\psi}(x) = \psi(ax + c)$, $\bar{\chi}(x) = \chi(ax + b + c)$.

THÉORÈME VI. Les formules (28) représentent toutes les solutions continues et monotones de l'équation (23), $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ étant une de ces solutions et a , b , c des constantes quelconques.

§ 4. La fonction $\psi_{uv}(x, y; f)$

Soit de nouveau

$$(29) \quad z = f(x, y)$$

une fonction monotone au sens restreint et continue dans un domaine D . L'équation (29) peut être résolue par rapport à x et y :

$$x = \bar{f}(y, z), \quad y = \tilde{f}(z, x).$$

Les fonctions $\bar{f}$ et $\tilde{f}$ sont définies dans des domaines $\bar{D}$ et $\tilde{D}$ respectivement, et elles sont continues et monotones au sens restreint. Posons

$$(30) \quad \psi_{uv}(x, y; f) = \psi_{uv}(x, y) = f[\bar{f}(u, x), \tilde{f}(y, v)].$$

Pour u et v nous choisissons toujours des valeurs telles que $(v, u) \in D$. Alors la fonction (30) est définie dans un domaine D_{uv} certainement non-vidé. En effet, soit R un rectangle intérieur à D , contenant le point (v, u) , et A' , A et B' , B respectivement l'intersections des droites $\eta = u$ et $\xi = v$ avec les côtés du rectangle (fig. 8). Choisissons le rectangle R de la manière que les points A , B et A' , B' , respectivement soient chacun sur la même ligne de niveau de la fonction $f(x, y)$, et notons les valeurs du $f(x, y)$ en A' et A par α et β respectivement. Alors D_{uv} contient le domaine $\alpha < x < \beta$, $\alpha < y < \beta$, car si nous y prenons (x, y) et notons l'intersection de la ligne de niveau x avec $A'A$ par P et celle du y avec $B'B$ par Q , alors le point d'intersection

M des parallèles aux axes ξ , η menées par Q et P , se trouve dans l'intérieur du domaine R . $\psi_{uv}(x, y; f)$ est égal à la valeur de la fonction $f(x, y)$ en M .

La formule (30) peut être écrite sous la forme

$$(31) \quad \psi_{uv}(x, y; f) = f(x', y'), \quad \text{où } x = f(x', u), \quad y = f(v, y')$$

ou (changeant x' en x et y' en y)

$$(32) \quad f(x, y) = \psi_{uv}[f(x, u), f(v, y); f].$$

Considérons maintenant

$$(1) \quad z = f(x, y) = H^{-1}[F(x) + G(y)];$$

alors

$$(33) \quad \psi_{uv}(x, y; f) = H^{-1}[H(x) + H(y) - G(u) - F(v)],$$

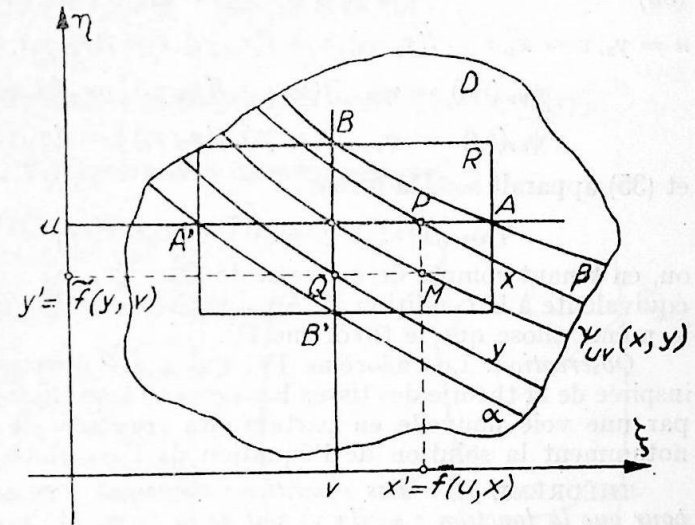


Fig. 8

qui est une fonction symétrique, associative, bisymétrique et demi-symétrique de x et y . Les théorèmes suivantes font voir que n'importe laquelle de ces propriétés caractérise la classe des fonctions (1).

THÉORÈME IV. Les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour que la fonction $f(x, y)$ soit de la forme (1) avec F , G , H continues et monotones au sens restreint :

- la fonction $f(x, y)$ doit être continue et monotone au sens r.,
- la fonction $\psi_{uv}(x, y; f)$ doit être associative.

Il faut démontrer que ces conditions sont suffisantes. Supposons a) et b) et notons $e = f(v, u)$. D'après (32) on a

$$\psi_{uv}(e, e; f) = \psi_{uv}[f(v, u), f(v, u); f] = f(v, u) = e,$$

donc on peut appliquer le point 5 du § 2 :

$$\psi_{uv}(x, y; f) = H_{uv}^{-1}[H_{uv}(x) + H_{uv}(y)],$$

lorsque (x, y) est dans un voisinage du point (e, e) . Se référant de nouveau à (32),

$$f(x, y) = H_{uv}^{-1}\{H_{uv}[f(x, u)] + H_{uv}[f(v, y)]\}$$

pour un voisinage du point (v, u) , c'est-à-dire tout point du D a un voisinage dans lequel $f(x, y)$ est de la forme (1). Il résulte du théorème II que $f(x, y)$ est de la forme (1) en D .

La condition de l'associativité de la fonction ψ_{uv} est la condition R elle-même, écrite sous une autre forme. En effet, supposons

$$(34) \quad f(x_1, y_3) = f(x_2, y_1), f(x_1, y_4) = f(x_2, y_2), f(x_3, y_3) = f(x_4, y_1)$$

et posons dans

$$(35) \quad \psi_{uv} [\psi_{uv}(r, s), t] = \psi_{uv} [r, \psi_{uv}(s, t)]$$

$u = y_3, v = x_2, r = f(x_4, y_3), s = f(x_1, y_3), t = f(x_2, y_4)$. Alors on a de (34) et (32)

$$\psi_{uv}(r, s) = \psi_{y_3 x_2} [f(x_4, y_3), f(x_2, y_1)] = f(x_4, y_1) = f(x_3, y_3)$$

$$\psi_{uv}(s, t) = \psi_{y_3 x_2} [f(x_1, y_3), f(x_2, y_4)] = f(x_1, y_4) = f(x_2, y_2),$$

et (35) apparaît sous la forme

$$\psi_{y_3 x_2} [f(x_3, y_3), f(x_2, y_4)] = \psi_{y_3 x_2} [f(x_4, y_3), f(x_2, y_2)]$$

ou, en tenant compte de nouveau de (32), $f(x_3, y_4) = f(x_4, y_2)$; donc (35) est équivalente à la condition R. Ainsi le théorème IV' exprime essentiellement la même chose que le théorème IV.

Observation. Le théorème IV, qui a été démontré au § 1 par une voie inspirée de la théorie des tissus hexagonaux, se trouve maintenant démontré par une voie nouvelle en partant des résultats de J. ACZÉL, en utilisant notamment la solution de l'équation de l'associativité [5].

THÉORÈME III'. Les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour que la fonction $z = f(x, y)$ soit de la forme (1) avec les fonctions F, G, H continues et monotones au sens restreint :

a) $f(x, y)$ continue et monotone au sens restreint,

b) $\psi_{uv}(x, y; f)$ une fonction symétrique de x et y pour u et v quelconques. En effet, la condition b) est équivalente à la condition T, parce que si

$$\xi = f(x_1, y_2) = f(x_2, y_1), \quad \eta = f(x_1, y_3) = f(x_3, y_1),$$

alors

$$f(x_2, y_3) = f[\tilde{f}(y_1, \xi), \tilde{f}(\eta, x_1)] = \psi_{y_1 x_1}(\xi, \eta)$$

et

$$f(x_3, y_2) = f[\tilde{f}(y_1, \eta), \tilde{f}(\xi, x_1)] = \psi_{y_1 x_1}(\eta, \xi).$$

Donc le théorème III' est une autre forme du théorème III.

Observations. 1) Dans le § 1 nous avons démontré directement le théorème I, d'où résulte immédiatement le théorème III, et nous en avons déduit la solution de l'équation de la bisymétrie et de l'associativité. Maintenant une autre voie se révèle : en partant de la solution de l'équation de l'associativité [5] on déduit le théorème IV', puis le théorème IV, puis à l'aide de l'im- de la bisymétrie. Ainsi le théorème des tissus hexagonaux [8] et la solution de l'équation de la bisymétrie apparaissent comme des conséquences de la solution de l'équation de l'associativité.

2) La condition T ou la condition b) du théorème III' ou

$$f[\tilde{f}(u, x), \tilde{f}(y, v)] = f[\tilde{f}(u, y), \tilde{f}(x, v)]$$

représentent une généralisation de la bisymétrie et en même temps un cas particulier de l'équation (5).

La bisymétrie ou la demi-symétrie de la fonction $\psi_{uv}(x, y; f)$ caractérisent de même la classe des fonctions (1). En effet, en supposant la bisymétrie ou la demi-symétrie de la fonction $\psi_{uv}(x, y; f)$ on a

$$\psi_{uv}(x, y; f) = \Phi^{-1} [\Phi_1(x) + \Phi_2(y)]$$

et, en tenant compte de (32),

$$f(x, y) = \Phi^{-1} \{ \Phi_1[f(x, u)] + \Phi_2[f(v, y)] \} = H^{-1} [F(x) + G(y)].$$

§ 5. Interprétations nomographiques

Supposons que la fonction $\zeta = f(\xi, \eta)$ soit représentable par un nomogramme à points alignés (fig. 9). Fixons sur les échelles ξ et η les points de cotes v et u respectivement et sur l'échelle ζ les points de cotes x et y . Intersectons l'échelle ξ avec la droite ux , l'échelle η avec vy ; la droite, qui unit ces deux points d'intersection, coupe l'échelle ζ en un point de cote

$$z = f[\tilde{f}(u, x), \tilde{f}(y, v)] = \psi_{uv}(x, y; f).$$

A la symétrie de la fonction $\psi_{uv}(x, y; f)$ correspond la propriété suivante pour le lieu géométrique L , formé par les supports des trois échelles: soit $advcu$ un hexagone dont les côtés opposés se coupent aux points x, y, z ; si huit de ces neuf points font partie du lieu géométrique, alors le 9^{ème} point en fait aussi partie (fig. 10). Toutes les cubiques jouissent de cette propriété (théorème de Chasles) et les cubiques seules (dual du théorème de GRAF et SAUER [14], [8]).

Il en résulte que tous les nomogrammes à points alignés avec des échelles situées sur la même cubique (propre ou dégénérée) représentent une équation de la forme (1), et il n'y a pas d'autres nomogrammes à points alignés pour la fonction (1).

A l'associativité de la fonction $\psi_{uv}(x, y; f)$ correspond la propriété suivante pour le lieu géométrique L : si $abcd$ et $a'b'c'd'$ sont deux quadrilatères inscrits en L , tels que l'intersection des paires de droites $(ab, a'b')$,

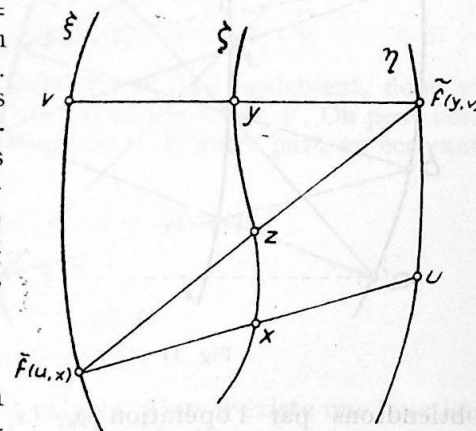


Fig. 9

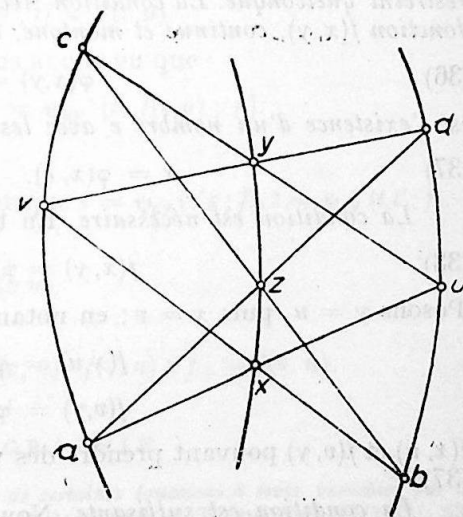


Fig. 10

(cd , $c'd'$) et (ad , $b'c'$) fasse aussi partie de L , alors les droites bc et $a'd'$ se coupent aussi sur L (fig. 11).

Il résulte que toutes les cubiques et elles seulement jouissent de cette propriété.

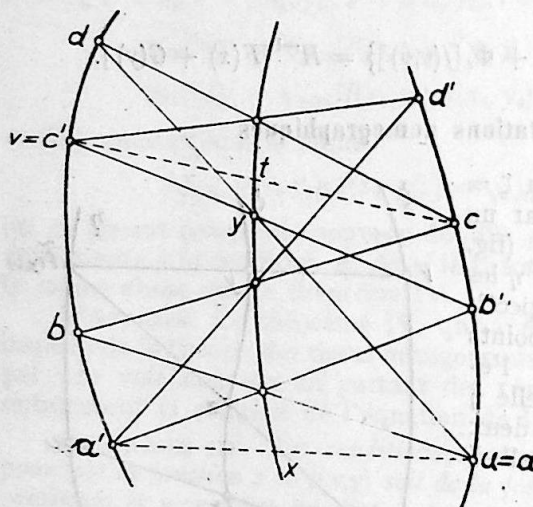


Fig. 11

La bisymétrie de la fonction $\psi_{uv}(x, y; f)$ conduit de même à une propriété caractéristique des cubiques, mais la demi-symétrie ne donne pas une propriété nouvelle (nous retrouvons la figure 10).

§ 6. Caractérisation des fonctions $\psi_{uv}(x, y; f)$

Nous avons vu au § 4 que l'opération $\psi_{uv}(x, y; f)$ appliquée à la fonction (1) conduit à une fonction plus particulière. Il se pose la question de savoir, $f(x, y)$ étant une fonction quelconque, quelles sont les fonctions que nous

obtiendrons par l'opération $\psi_{uv}(x, y; f)$. On a le

THÉOREME VII. Soit $\varphi(x, y)$ une fonction continue et montone au sens restreint quelconque. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction $f(x, y)$, continue et montone, telle que

$$(36) \quad \varphi(x, y) = \psi_{uv}(x, y; f)$$

est l'existence d'un nombre e avec les propriétés suivantes

$$(37) \quad x = \varphi(x, e), \quad y = \varphi(e, y).$$

La condition est nécessaire. En tenant compte de (32)

$$(38) \quad f(x, y) = \varphi[f(x, u), f(v, y)].$$

Posons $y = u$, puis $x = v$; en notant $f(v, u) = e$, nous avons

$$f(x, u) = \varphi[f(x, u), e]$$

$$f(v, y) = \varphi[e, f(v, y)];$$

$f(x, u)$ et $f(v, y)$ pouvant prendre des valeurs quelconques, nous avons vérifié (37).

La condition est suffisante. Nous admettons (37); choisissons u, v tels que $f(u, v) = e$, et soient $\lambda(x)$ et $\mu(y)$ deux fonctions continues et monotones qui satisfont à la seule condition

$$\lambda(v) = \mu(u) = e.$$

La fonction

$$f(x, y) = \varphi[\lambda(x), \mu(y)]$$

vérifie l'équation (38) équivalente à (36). En effet

$$\begin{aligned} \varphi[f(x, u), f(v, y)] &= \varphi\{\varphi[\lambda(x), \mu(u)], \varphi[\lambda(v), \mu(y)]\} = \\ &= \varphi\{\varphi[\lambda(x), e], \varphi[e, \mu(y)]\} = \varphi[\lambda(x), \mu(y)] = f(x, y). \end{aligned}$$

La condition nécessaire et suffisante (37) est équivalente à la condition (37')

$$\psi_{st}(s, t; \varphi) = e \text{ (constante).}$$

En effet, de (37') résulte, en tenant compte de (31),

$$\varphi(x', y') = e, \text{ lorsque } s = \varphi(x', s), \quad t = \varphi(t, y').$$

Supposons s fixé et t variable; alors x' est fixé également, donc y' aussi, c'est-à-dire qu'à un t quelconque correspond le même y' . On peut voir aussi qu'à un s quelconque correspond le même x' . D'autre part, en écrivant $s = t = e$

$$\varphi(x', y') = e, \quad e = \varphi(x', e), \quad e = \varphi(y', e),$$

c'est-à-dire que $x' = y' = e$. Il s'ensuit que

$$s = \varphi(e, s) \text{ et } t = \varphi(t, e)$$

pour s et t quelconques, c'est-à-dire justement (37).

Supposons maintenant que (37) soit valable. Alors il existe une fonction $f(x, y)$ telle que (36) soit valable. (37') résulte de l'identité suivante

$$(39) \quad \psi_{st}[s, t; \psi_{uv}(x, y; f)] = f(v, u).$$

Il nous reste à démontrer (39). Nous avons vu que

$$(40) \quad s = \psi_{uv}[f(v, u), s; f], \quad t = \psi_{uv}[t, f(v, u); f].$$

En utilisant (31) on a

$$\psi_{st}[s, t; \psi_{uv}(x, y; f)] = \psi_{uv}(s', t'; f) \text{ lorsque } s = \psi_{uv}(s', s'; f), \quad t = \psi_{uv}(t, t'; f).$$

En comparant avec (40)

$$s' = t' = f(v, u),$$

et en utilisant (32), on obtient

$$\psi_{st}[s, t; \psi_{uv}(x, y; f)] = \psi_{uv}[f(v, u), f(v, u); f] = f(v, u).$$

BIBLIOGRAPHIE

1. P. de Saint-Robert, *De la résolution de certaines équations à trois variables par le moyen d'une règle glissante*, Mem. della R. Acad. di Sc. di Torino 2^e sér, 25 (1871), 53.
2. J. Aczél, *On Mean Values*, Bull. Amer. Math. Soc., 54 (1948), 392-400.
3. J. Aczél, *Sur une équation fonctionnelle*, Publ. Inst. Math. de l'Acad. Serbe des Sciences, 2(1948), 257-262.

4. J. Aczél, Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной, Успехи Мат. Наук 11,3 (1956) 3—68.
5. J. Aczél, *Sur les opérations définies pour nombres réels*, Bull. Soc. Math. France, 76 (1948), 59—64.
6. J. Aczél, *Többváltozós függvényegyenletek visszavezetése differenciálegyenletek megoldására*, Magy. Tud. Akad. Alk. Mat. Int. Közleményei, 1 (1952), 311—333.
7. M. Hosszú, *A biszimmetria függvényegyenletéhez*, Magy. Tud. Akad. Alk. Mat. Int. Közleményei, 1 (1952), 335—342.
8. Blaschke — Bol, *Geometrie der Gewebe*, Berlin 1938.
9. C. Ryll-Nardzewski, *Sur les moyennes*, Studia Math., 11 (1949), 31—37.
10. B. Knaster, *Sur une équivalence pour les fonctions*, Colloquium Math., 2 (1949), 1—4.
11. A. R. Schweitzer, *Theorems on Functional Equations*, Bull. Amer. Math. Soc., 18 (1912), 192 et 19 (1913), 66—70.
12. M. Hosszú, *Some Functional Equations related with the Associative Law*, Publ. Math., 3 (1954), 205—214.
13. H. W. Pexider, *Notiz über Funktionaltheoreme*, Monatshefte für Math. und Phys. (1903), 293—301.
14. H. Graf et R. Sauer, *Über dreifache Geradensysteme in der Ebene, welche Dreiecksnetze bilden*, Münchn. Ber. (1924), 119—156.

Reçu le 17 mars 1958

SUR QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES DE QUADRATURE DU TYPE GAUSS-CHRISTOFFEL

par

D. D. STANCU

à Cluj

Introduction

On sait qu'une première généralisation de la formule de quadrature de F. C. GAUSS [1] est due à E. B. CHRISTOFFEL [2], lequel considérait s noeuds fixes — qui ne se trouvent pas à l'intérieur de l'intervalle d'intégration — et déterminait d'autres m noeuds, de manière que la formule de quadrature respective ait le degré d'exactitude maximum. Entre temps, certains mathématiciens: F. G. MEHLER [3], C. A. POSSÉ [4], E. HEINE [5], T. J. STIELTJES [6], A. MARKOFF [7], J. DERUYTS [8], etc., ont fait aussi des généralisations moins essentielles de la formule de quadrature de Gauss, en multipliant la fonction à intégrer par une certaine fonction de poids. Cependant, une généralisation importante et effective de la formule de quadrature de Gauss a été faite, dans le dernier temps, par P. TURÁN [9], L. TCHAKALOFF [10] et T. POPOVICIU [11]. Par les travaux de ces mathématiciens — et spécialement de T. Popoviciu — on est arrivé à une formule très générale du type Gauss, laquelle emploie m noeuds multiples, d'ordres de multiplicité impairs donnés, lesquels noeuds se déterminent de telle manière que la formule de quadrature respective ait le degré d'exactitude maximum. Nous généraliserons cette dernière formule dans le sens dans lequel Christoffel a généralisé la formule classique de Gauss; à savoir, nous considérerons s noeuds multiples, fixes — à une certaine restriction près — n'importe où sur l'axe réel, et nous essayerons de déterminer d'autres m noeuds, d'ordres de multiplicité impairs donnés, de façon que la formule de quadrature que l'on obtient ait le degré d'exactitude maximum. Dans les travaux [12,13], nous avons déjà obtenu quelques résultats partiels, mais dans ce travail nous construirons une formule de quadrature très générale et présentant une grande symétrie.