

SUR QUELQUES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES AVEC PLUSIEURES FONCTIONS À DEUX VARIABLES*)

par
F. RADÓ
à Cluj

Les fonctions représentables par des nomogrammes à points alignés de genre 0 ont la forme

$$(1) \quad z = H^{-1}[F(x) + G(y)],$$

où F, G, H sont des fonctions continues et monotones au sens restreint. Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x, y)$, continue et strictement monotone (par rapport à chaque variable), soit de la forme (1):

$$\text{Condition } T: f(x_1, y_2) = f(x_2, y_1), f(x_1, y_3) = f(x_3, y_1) \\ \rightarrow f(x_2, y_3) = f(x_3, y_2)$$

$$\text{Condition } B: f(x_1, y_2) = f(x_2, y_1), f(x_1, y_3) = f(x_2, y_2) = \\ = f(x_3, y_1) \rightarrow f(x_2, y_3) = f(x_3, y_2)$$

$$\text{Condition } R: f(x_1, y_3) = f(x_2, y_1), f(x_1, y_4) = f(x_2, y_2), f(x_3, y_3) = \\ = f(x_4, y_1) \rightarrow f(x_3, y_4) = f(x_4, y_2).$$

En utilisant ces conditions j'ai résolu dans [12] l'équation fonctionnelle de l'associativité

$$(2) \quad f[f(x, y), z] = f[x, f(y, z)]$$

et de la bisymétrie

$$(3) \quad f[f(u, x), f(y, v)] = f[f(u, y), f(x, v)]$$

pour la classe des fonctions continues et strictement monotones. Pour la même classe des fonctions les équations (2) et (3) ont été résolues pour la première fois par J. ACZÉL [1], [2], [3].

*) La présente note fait partie du travail [11], publié en langue roumaine.

Dans cette note j'utiliserai la condition B pour résoudre la généralisation de l'équation de l'associativité pour 4 fonctions inconnues d'où j'obtiendrai aussi les solutions de la généralisation de l'équation fonctionnelle de la bisymétrie et de la transitivité.

Ces équations sont étroitement liées au problème de la décomposition d'une fonction à trois variables par superposition de fonctions de deux variables. Cette décomposition permet la construction des nomogrammes composés.

1. Conditions pour qu'une fonction à trois variables soit de la forme $F[\varphi(x, y), z]$. Si les fonctions F et φ ne sont pas soumises à aucune restriction, toute fonction $f(x, y, z)$ peut être écrite sous la forme

$$(1) \quad f(x, y, z) = F[\varphi(x, y), z].$$

Par contre, si on demande que F et φ soient différentiables, alors la condition suivante est nécessaire et suffisante pour que f soit de la forme (1)

$$f''_{xz}f'_y - f''_{yz}f'_x = 0$$

(condition de GOURSAT [7]).

On voit aisément :

THÉORÈME 1. La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction continue $f(x, y, z)$ soit de la forme (1), avec F et φ continues et strictement monotones, est l'implication

$$(2) \quad f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_1) \rightarrow f(x_1, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_2)$$

2. L'équation de l'associativité généralisée. L'équation fonctionnelle

$$(3) \quad g[\varphi(x, y), z] = h[x, \psi(y, z)]$$

avec 4 fonctions inconnues, généralise l'équation de l'associativité et ses diverses modifications, par exemple:

$$(4) \quad h[x, h(y, z)] = h[z, h(y, x)]$$

(l'associativité de GRASSMANN),

$$(5) \quad g[g(x, y), z] = g[x, g(z, y)]$$

(l'associativité de TARKI),

$$(6) \quad g[g(x, y), z] = g[y, g(z, x)]$$

(l'associativité cyclique), l'équation de la demi-symétrie [12], etc. M. HOSSZÚ a résolu les équations (4), (5), (6) dans l'hypothèse que les solutions sont des fonctions continues et strictement monotones, et l'équation (4) dans les hypothèses plus restrictives que les solutions admettent des dérivées partielles de premier ordre et sont strictement monotones [9].

Nous donnerons la solution de l'équation (3) également dans la condition de la continuité et de la monotonie stricte. Nous supposons de plus que les fonctions $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$ soient définies pour $x \in \langle a, b \rangle$, $y \in \langle a, b \rangle$, elles prennent leurs valeurs dans le même

intervalle (fermé, ouvert ou demi-ouvert), l'équation $\varphi(x, y_0) = z_0$ a une (seule) solution x pour $y_0, z_0 \in \langle a, b \rangle$ et cette condition est satisfaite par les trois autres fonctions (l'intervalle $\langle a, b \rangle$ forme avec chacune des opérations φ, ψ, g, h un quasigroupe).

THÉORÈME 2. Dans ces hypothèses la solution générale de l'équation fonctionnelle (3) est le système suivant des fonctions;

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi(x, y) = H_1^{-1}[F_1(x) + G_1(y)] \\ \psi(x, y) = H_2^{-1}[G_1(x) + G_2(y)] \\ g(x, y) = H_3^{-1}[H_1(x) + G_2(y)] \\ h(x, y) = H_3^{-1}[F_1(x) + H_2(y)], \end{cases}$$

où $F_1, G_1, G_2, H_1, H_2, H_3$ sont des fonctions continues et strictement monotones.

En substituant (7) dans (3), on a

$$H_3^{-1}[F_1(x) + G_1(y) + G_2(z)] = H_3^{-1}[F_1(x) + G_1(y) + G_2(z)],$$

donc les fonctions (7) satisfont à l'équation (3).

Supposons maintenant que les fonctions continues et strictement monotones φ, ψ, g, h satisfont (3) et notons les deux membres de l'équation (3) par $f(x, y, z)$

$$(8) \quad f(x, y, z) = g[\varphi(x, y), z] = h[x, \psi(y, z)].$$

En appliquant le théorème 1

$$(9) \quad \begin{cases} f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) = f(x_1, y_1, z_2) \rightarrow \\ f(x_1, y_2, z_2) = f(x_2, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_1). \end{cases}$$

Démontrons que la fonction à deux variables $f(x, y, z_1)$ vérifie la condition B . Soit

$$(10) \quad \begin{cases} f(x_1, y_2, z_1) = f(x_2, y_1, z_1) \\ f(x_1, y_3, z_1) = f(x_2, y_2, z_1) = f(x_2, y_1, z_1) \end{cases}$$

et notons par z_2 la valeur z pour laquelle

$$f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_1, z_2);$$

nous avons

$$f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) = f(x_1, y_1, z_2)$$

et en utilisant (9)

$$(11) \quad f(x_1, y_2, z_2) = f(x_2, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_1).$$

On déduit de (10) et (11)

$$f(x_2, y_2, z_1) = f(x_1, y_3, z_1) = f(x_1, y_2, z_2)$$

et en appliquant (9)

$$(12) \quad f(x_1, y_3, z_2) = f(x_2, y_2, z_2) = f(x_2, y_3, z_1).$$

En tenant compte de nouveau de (10) et (11)

$$f(x_3, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_1) = f(x_2, y_1, z_2),$$

et en appliquant (9) on a

$$(13) \quad f(x_2, y_2, z_2) = f(x_3, y_1, z_2) = f(x_3, y_2, z_1).$$

Les relations (12) et (13) donnent

$$(14) \quad f(x_2, y_3, z_1) = f(x_3, y_2, z_1),$$

donc (10) $\rightarrow$ (14), ce qui montre que la fonction $f(x, y, z_1)$ vérifie la condition B. Il s'ensuit que

$$\varphi(x, y) = \Phi[f(x, y, z_1)]$$

vérifie de même la condition B, et par conséquent

$$(15) \quad \varphi(x, y) = H^{-1}[F_1(x) + G_1(y)].$$

Nous substituons cette expression dans (3) et posons $y = y', z = z_0$:

$$h[x, \psi(y', z_0)] = g\{H_1^{-1}[F_1(x) + G_1(y')], z_0\}.$$

En notant $\psi(y', z_0) = y$, on a

$$(16) \quad h(x, y) = H_3^{-1}[F_1(x) + H_2(y)].$$

Par une nouvelle substitution dans (3) on trouve

$$(17) \quad g\{H_1^{-1}[F_1(x) + G_1(y)], z\} = H_3^{-1}\{F_1(x) + H_2[\psi(y, z)]\}.$$

En posant $y = y_0$

$$(18) \quad g(x, y) = H_3^{-1}[\Phi(x) + X(y)],$$

et (17) devient

$$(19) \quad \Phi H_1^{-1}[F_1(x) + G_1(y)] + X(z) = F_1(x) + H_2[\psi(y, z)].$$

En mettant ici $x = x_0$

$$(20) \quad \psi(x, y) = H_2^{-1}[\Psi(x) + X(y)].$$

Nous remplaçons (20) dans l'équation (19):

$$\Phi H_1^{-1}[F_1(x) + G_1(y)] + X(z) = F_1(x) + \Psi(y) + X(z)$$

ou

$$\Phi H_1^{-1}[F_1(x) + G_1(y)] = [F_1(x) + G_1(y)] + [\Psi(y) - G_1(y)].$$

En faisant $y = \text{const}$, on voit que

$$\Phi H_1^{-1}(\xi) = \xi + a,$$

donc

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= H_1(x) + a \\ \Psi(x) &= G_1(x) + a. \end{aligned}$$

En notant $X(x) + a = G_2(x)$, nous avons enfin

$$g(x, y) = H_3^{-1}[H_1(x) + G_2(y)]$$

$$\psi(x, y) = H_2^{-1}[G_1(x) + G_2(y)].$$

En rapprochant les formules (15) et (16) à ces deux dernières, nous avons la solution (7) de l'équation fonctionnelle (3).

3. Cas particuliers. Nous pouvons maintenant obtenir facilement les solutions des différents cas particuliers de l'équation (3).

a) *L'équation de l'associativité.* Nous avons

$$g(x, y) = \varphi(x, y) = h(x, y) = \psi(x, y).$$

Dans ce cas les formules (7) représentent la même fonction. Dans [12] nous avons démontré que des relations

$$f(x, y) = H^{-1}[F(x) + G(y)]$$

$$f(x, y) = H^{*-1}[F^*(x) + G^*(y)]$$

il résulte

$$F^*(x) = aF(x) + b, \quad G^*(x) = aG(x) + c, \quad H^*(x) = aH(x) + b + c,$$

où a, b, c sont des constantes. Donc la première et la quatrième formule (7) entraînent

$$H_2 = G_1 + a, \quad H_3 = H_1 + a,$$

la deuxième et la troisième

$$H_1 = G_1 + b, \quad H_3 = H_2 + b$$

et la troisième et la quatrième

$$H_1 = F_1 + c, \quad H_2 = G_2 + c.$$

Par conséquent

$$G_1 = F_1 + c - b, \quad G_2 = F_1 + a - b$$

$$H_1 = F_1 + c, \quad H_2 = F_1 + a - b + c, \quad H_3 = F_1 + a + c;$$

il résulte

$$F_1[\varphi(x, y)] + c = F_1(x) + F_1(y) + c_1 - b.$$

En notant $H(x) = F_1(x) - b$, nous avons

$$\varphi(x, y) = H^{-1}[H(x) + H(y)].$$

b) *L'équation de Grassmann.* Par la notation $h(x, y) = -h'(y, x)$, l'équation (4) devient

$$h'[h'(x, y), z] = h[x, h(y, z)],$$

donc on obtient (4) en posant dans (3)

$$h = \psi = g' = \varphi'.$$

On arrive comme plus haut aux relations

$$H_1 = H_2 + a, F_1 = G_2 + a, F_1 = bH_1 + c, G_1 = bG_2 + d, \\ H_1 = bH_3 + c_1 + d,$$

d'où

$$G_1 = b^2H_2 + ab^2 + bc - ab + d, G_2 = bH_2 + ab + c - a,$$

donc

$$(21) \quad h(x, y) = \psi(x, y) = H_2^{-1}[b^2H_2(x) + bH_2(y) + \alpha],$$

ce qui coïncide avec le résultat de M. HOSSZÚ

$$\text{Si } b^2 + b - 1 \neq 0, \text{ en notant } H(x) = H_2(x) + \frac{\alpha}{b^2 + b - 1}, \text{ on a}$$

$$(22) \quad h(x, y) = H_2^{-1}[b^2H(x) + bH(y)];$$

si $b^2 + b - 1 = 0$, en notant $H = H_2(x)$

$$(22') \quad h(x, y) = H^{-1}\left[\frac{1 - \varepsilon\sqrt{5}}{2}H(x) + \frac{1 + \varepsilon\sqrt{5}}{2}H(y) + \alpha\right], \varepsilon = \pm 1.$$

On constate par vérification directe que les fonctions (22) et (22') satisfont à l'équation (4), donc toutes les solutions continues et strictement monotones de cette équation sont données par les formules (22) et (22'), où $H(x)$ est continue et strictement monotone.

c) *L'équation de Tarki.* L'équation fonctionnelle (3) devient l'équation (5) de TARKI par la particularisation

$$g = \varphi = h = \psi';$$

en utilisant les formules (7) on obtient comme plus haut

$$g(x, y) = H^{-1}[H(x) + H(y)].$$

Par conséquent l'équation (5) est équivalente à l'équation de l'associativité.

d) *L'équation de l'associativité cyclique.* En permutant x et y , l'équation (6) devient

$$g[g(y, x), z] = g[x, g(z, y)];$$

donc en posant dans (3)

$$g = h = \varphi' = \psi',$$

on obtient l'équation (6). On trouve que cette équation est aussi équivalente à l'équation de l'associativité.

e) *L'équation de la demi-symétrie.*

$$f[f(y, x), z] = f[f(y, z), x]$$

est le cas particulier de (3) pour

$$g = \psi = h' = \varphi'.$$

On trouve

$$f(x, y) = H^{-1}[H(x) + G(y)].$$

Considérons encore deux cas particuliers de l'équation (3), dans lesquelles figurent la fonction inconnue $g(x, y)$ et ses inverses. L'équation $z = g(x, y)$ résolue par rapport à x s'écrit $x = g(y, z)$, et résolue par rapport à y s'écrit $y = g(z, x)$.

f) *L'équation fonctionnelle*

$$(23) \quad g[\bar{g}(x, y), z] = g[x, \tilde{g}(y, z)].$$

Le théorème 2 donne

$$\bar{g}(x, y) = H_1^{-1}[-G_2(x) + H_3(y)]$$

$$\tilde{g}(x, y) = G_2^{-1}[H_3(x) - H_1(y)]$$

$$h = g, \quad \varphi = \bar{g}, \quad \psi = \tilde{g}$$

$$H_1 = F_1 + a, \quad H_2 = G_2 + a, \quad -G_2 = F_1 + b, \quad H_3 = G_1 - b,$$

$$H_2 = cG_1 + d, \quad -H_1 = cG_2 + e, \quad G_2 = cH_2 + d + e.$$

Il résulte que $c = 1$, $d = -b$, $e = b - a$ et

$$(24) \quad g(x, y) = H^{-1}[G(x) - G(y)].$$

D'autre part la fonction (24) vérifie l'équation (23).

g) *L'équation fonctionnelle*

$$(25) \quad g[\tilde{g}(x, y), z] = g[x, \bar{g}(y, z)]$$

a la solution générale

$$g(x, y) = H^{-1}[H(x) + H(y)],$$

donc l'équation (25) est équivalente à l'équation de l'associativité.

4. *L'équation de la bisymétrie généralisée.* L'équation fonctionnelle

$$(26) \quad f[g(u, x), h(y, v)] = \varphi[\psi(u, y), \chi(x, v)]$$

avec 6 fonctions inconnues a été résolue par M. HOSSZÚ dans les hypothèses de la dérivabilité et de la monotonie stricte [8]. Reprenons cette équation et cherchons ses solutions continues et strictement monotones.

THÉOREME 3. Les solutions continues, strictement monotones et inversables par rapport à x et y (propriété de quasigroupe) de l'équation (26) sont

$$(27) \quad \begin{cases} f(x, y) = H^{-1}[F_1(x) + G_1(y)] & \varphi(x, y) = H^{-1}[F_4(x) + G_4(y)] \\ g(x, y) = F_1^{-1}[F_2(x) + G_2(y)] & \psi(x, y) = F_4^{-1}[F_2(x) + F_3(y)] \\ h(x, y) = G_1^{-1}[F_3(x) + G_3(y)] & \chi(x, y) = G_4^{-1}[G_2(x) + G_3(y)], \end{cases}$$

où les neuf fonctions à une variable sont continues et strictement monotones.

Pour la démonstration notons

$$g(\xi, \eta) = g'(\eta, \xi) \quad \text{et} \quad \varphi(\xi, \eta) = \varphi'(\eta, \xi)$$

et posons dans (26) $v = v_0$

$$f[g'(x, u), h(y, v_0)] = \varphi'[\chi(x, v_0), \psi(u, y)].$$

Par le changement des notations

$$(28) \quad \begin{aligned} k(\xi, \eta) &= f[\xi, h(\eta, v_0)] \\ l(\xi, \eta) &= \varphi'[\chi(\xi, v_0), \eta] \end{aligned}$$

l'équation (26) devient

$$k[g'(x, u), y] = l[x, \psi(u, y)],$$

qui est de la forme (3). Le théorème 2 donne

$$\begin{aligned} g(x, y) &= g'(y, x) = F_1^{-1}[F_2(x) + G_3(y)] \\ \psi(x, y) &= F_1^{-1}[F_2(x) + F_3(y)] \\ k(x, y) &= H^{-1}[F_1(x) + F_3(y)] \\ l(x, y) &= H^{-1}[G_2(x) + F_4(y)]. \end{aligned}$$

Remplaçons dans la première formule (28) l'expression trouvée pour $k(\xi, \eta)$ et posons $\xi = x, h(\eta, v_0) = y$; en notant $G_1(y) = F_3[\bar{h}(v_0, y)]$, on obtient

$$f(x, y) = H^{-1}[F_1(x) + G_1(y)].$$

Remplaçons dans la deuxième formule (28) l'expression de $l(\xi, \eta)$, posons $x = \psi(\xi, v_0), y = \eta$ et notons $G_4(x) = G_2[\chi(v_0, x)]$; on obtient

$$\varphi'(x, y) = H^{-1}[G_4(x) + F_4(y)]$$

ou

$$\varphi(x, y) = H^{-1}[F_4(x) + G_4(y)].$$

Substituons dans l'équation (26) les expressions trouvées pour $g(x, y)$, $\psi(x, y)$, $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$:

$$F_2(u) + G_2(x) + G_1[h(y, v)] = F_2(u) + F_3(y) + G_2[\chi(x, v)].$$

En groupant les termes

$$G_1[h(y, v)] - F_3(y) = G_4[\chi(x, v)] - G_2(x);$$

le premier membre ne dépend pas de x , le deuxième ne dépend pas de y , donc les deux membres sont des fonctions de v seulement, soit $G(v)$; alors

$$h(y, v) = G_1^{-1}[F_3(y) + G_3(v)], \quad \chi(x, v) = G_4^{-1}[G_2(x) + G_3(v)]$$

ou

$$(29) \quad \begin{aligned} h(x, y) &= G_1^{-1}[F_3(x) + G_3(y)] \\ \chi(x, y) &= G_4^{-1}[G_2(x) + G_3(y)]. \end{aligned}$$

Nous venons d'obtenir toutes les formules (27).

D'autre part les fonctions (27) forment un système de solutions pour l'équation (26), ce qu'on voit par la vérification directe.

5. Application géométrique. L'équation (26) conduit à la généralisation suivante du théorème de THOMSEN [6]:

THÉOREME 4. Soit $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$ trois familles de courbes dans le plan xy qui jouissent de la propriété suivante: si les points M, S de la figure 1 sont sur la même courbe de la famille $(\mathcal{F}_2)$, et les points N, R sur la même courbe de $(\mathcal{F}_3)$, alors les points P, Q se trouvent sur la même courbe de $(\mathcal{F}_1)$. Dans ces hypothèses les trois familles coïncident et leurs équation est

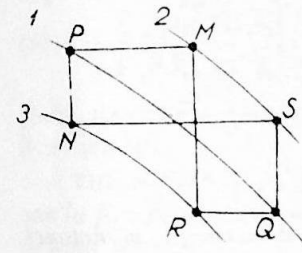


Fig. 1.

$$F(x) + G(y) = \text{const.}$$

Soient les équations des familles de courbes

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_1) \quad f(x, y) &= \text{const} \\ (\mathcal{F}_2) \quad g(x, y) &= \text{const} \\ (\mathcal{F}_3) \quad h(x, y) &= \text{const.} \end{aligned}$$

Nous avons

$$(30) \quad g(x_1, y_2) = g(x_2, y_1), \quad h(x_1, y_3) = h(x_3, y_1) \rightarrow h(x_2, y_3) = f(x_3, y_2).$$

Notons

$$s = g(x_1, y_2) = g(x_2, y_1), \quad t = h(x_1, y_3) = h(x_3, y_1);$$

on peut écrire avec les notations des fonctions inverses déjà employées

$$\begin{aligned} x_2 &= \bar{g}(y_1, s) & y_2 &= \tilde{g}(s, x_1) \\ x_3 &= \bar{h}(y_1, t) & y_3 &= \tilde{h}(t, x_1). \end{aligned}$$

La condition (30) devient l'équation fonctionnelle

$$(31) \quad f[\bar{g}(y_1, s), \tilde{h}(t, x_1)] = f[\bar{h}(y_1, t), \tilde{g}(s, x_1)],$$

ce qui est un cas particulier de l'équation (26). En appliquant le théorème 3 et en tenant compte de $\chi = g, h = \psi$, on obtient par un calcul simple

$$\begin{aligned} f(x, y) &= H_1^{-1}[F(x) + G(y)] \\ g(x, y) &= H_2^{-1}[F(x) + G(y)] \\ h(x, y) &= H_3^{-1}[F(x) + G(y)]. \end{aligned}$$

6. L'équation de la transitivité généralisée. L'équation de la transitivité

$$(32) \quad f[f(x, t), f(y, t)] = f(x, y)$$

a été étudiée par A. R. SCHWEITZER par la transformation en une équation à dérivée partielles [13], [14]. Dans les hypothèses de la continuité et de la monotonie stricte elle était résolue par M. HOSSZÚ [10]. Dans la même note se trouve aussi la résolution de l'équation plus générale

$$(33) \quad f[\varphi(x, t), \psi(y, t)] = g(x, y),$$

mais seulement pour les fonctions monotones, qui admettent des dérivées partielles de premier ordre. Nous donnons sa solution continue et strictement monotone, de nouveau par réduction à l'équation de l'associativité généralisée.

THÉORÈME 5. Les solutions de l'équation (33), qui sont continues, strictement monotones et inversables par rapport à x et y , sont données par les formules

$$(34) \quad \begin{cases} f(x, y) = H^{-1} [F_1(x) - G_1(y)] \\ g(x, y) = H^{-1} [F_2(x) - G_2(y)] \\ \varphi(x, y) = F_1^{-1} [F_2(x) - G_3(y)] \\ \psi(x, y) = G_1^{-1} [G_2(x) - G_3(y)], \end{cases}$$

où $F_1, F_2, G_1, G_2, G_3, H$ sont des fonctions continues et strictement monotones. En posant

$$\psi(y, t) = z,$$

d'où $y = \bar{\psi}(t, z)$, l'équation (33) devient

$$(35) \quad f[\varphi(x, t), z] = g[x, \bar{\psi}(t, z)];$$

il suffit d'appliquer le théorème 2 et faire un calcul simple.

La solution de l'équation (32) s'obtient des formules (34) en posant $f = g = \varphi = \psi$

$$(36) \quad f(x, y) = F^{-1} [F(x) - F(y)].$$

7. Pseudo-sommes à trois termes. Nous avons vu au no. 2, que si la fonction $f(x, y, z)$ admet les deux décompositions de la forme (8)

$$(8) \quad f(x, y, z) = g[\varphi(x, y), z] = h[x, \psi(y, z)],$$

alors les fonctions φ, ψ, g et h s'expriment par les formules (7), donc

$$\text{ou} \quad f(x, y, z) = H_3^{-1} [F_1(x) + G_1(y) + G_2(z)]$$

$$(37) \quad f(x, y, z) = K^{-1} [F(x) + G(y) + H(z)].$$

Réciproquement, étant donnée (37), si nous posons $\varphi(x, y) = F(x) + G(y)$, $g(x, y) = K^{-1} [x + H(y)]$, $\psi(x, y) = G(x) + H(y)$, $h(x, y) = K^{-1} [F(x) + y]$, alors $f(x, y, z)$ admet les décompositions (8). Nous dirons que la fonction

(37) est une pseudo-somme à trois termes, si les fonctions F, G, H, K sont continues et strictement monotones. Il résulte de ce que nous venons de dire:

THÉORÈME 6. La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction continue et strictement monotone $f(x, y, z)$ soit une pseudo-somme à trois termes est l'existence des décompositions (8).

Conséquence. Il résulte des deux décompositions (8) une troisième

$$f(x, y, z) = l[k(x, z), y].$$

Les décompositions (8) sont équivalentes aux deux implications

$$(38) \quad \begin{cases} f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) \rightarrow f(x_2, y_1, z_2) = f(x_1, y_2, z_2) \\ f(x_1, y_1, z_2) = f(x_1, y_2, z_1) \rightarrow f(x_2, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_1). \end{cases}$$

Les implications (38) entraînent

$$(39) \quad \begin{cases} f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) = f(x_1, y_1, z_2) \rightarrow \\ f(x_1, y_2, z_2) = f(x_2, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_1). \end{cases}$$

Nous démontrons que, réciproquement, (39) entraîne (38), c'est à dire il a lieu le

THÉORÈME 7. L'implication (39) est nécessaire et suffisante pour que la fonction continue et strictement monotone $f(x, y, z)$ soit une pseudo-somme à trois termes.

L'implication (39) est identique à (9), rencontré à l'occasion de la résolution de l'équation fonctionnelle de l'associativité généralisée. Nous avons vu que (39) entraîne que $f(x, y, z_0)$ est de la forme (1). En tenant compte de la forme symétrique de (39) par rapport à x, y, z , on a que $l(x, y_0, z)$ et $f(x_0, y, z)$ ont des expressions analogues.

Pour y_1 et z_1 fixes, on peut noter

$$(40) \quad \begin{aligned} f(x, y, z_1) &= K^{-1} [F(x) + G(y)] \\ f(x, y_1, z) &= \Psi^{-1} [\Phi(x) + H(z)]. \end{aligned}$$

Nous substituons les expressions (40) en (39)

$$(41) \quad F(x_2) + G(y_1) = F(x_1) + G(y_2), \quad \Phi(x_2) + H(z_1) = \Phi(x_1) + H(z_2) \rightarrow$$

$$\Psi^{-1} [\Phi(x_2) + H(z_2)] = K^{-1} [F(x_2) + G(y_2)].$$

Nous regardons x_1 et x_2 comme des variables indépendantes, les hypothèses de l'implication (41) permettent d'exprimer $G(y_2)$ et $H(z_2)$ en fonction de x_1 et x_2 (y_1 et z_1 sont fixes); nous les substituons dans la conclusion de la même implication et obtenons l'équation fonctionnelle

$$\Psi^{-1} [2\Phi(x_2) - \Phi(x_1) + H(z_1)] = K^{-1} [2F(x_2) - F(x_1) + G(y_1)].$$

Notons

$$\Phi(x_2) = x, \quad \Phi(x_1) = y.$$

et

$$(42) \quad K\Psi^{-1}[x + H(z_1)] - G(y_1) = \varphi(x), \quad F\Phi^{-1}(x) = \psi(x);$$

on a

$$\varphi(2x - y) = 2\psi(x) - \psi(y),$$

ce qui devient, par le changement de fonction

$$(43) \quad 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) = \chi(x),$$

l'équation fonctionnelle

$$\chi(x + y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Cette équation a la solution [12]

$$\varphi(x) = ax + b, \quad \psi(x) = ax + c, \quad \chi(x) = ax + b + c;$$

en tenant compte de (43), $2c = b + c$, donc $c = b$. Revenons à (42)

$$(44) \quad \begin{aligned} F(\xi) &= a\Phi(\xi) + b \\ K(\xi) &= a\Psi(\xi) + b', \end{aligned}$$

où $b' = b + G(y_1) - aH(z_1)$.

La deuxième formule (40) devient

$$a\Psi[f(x, y_1, z)] + b' = a\Phi(x) + b + aH(z) + b' - b,$$

ou en tenant compte de (44)

$$K[f(x, y_1, z)] = F(x) + aH(z) + b' - b,$$

en écrivant $H_1(z)$ pour $aH(z) + b' - b$

$$f(x, y_1, z) = K^{-1}[F(x) + H_1(z)].$$

Nous faisons maintenant varier y_1 , en tenant z_1 fixe. Dans la dernière formule seulement la fonction H_1 varie avec y_1 , donc

$$f(x, y, z) = K^{-1}[F(x) + \psi(y, z)] = h[x, \psi(y, z)].$$

D'une façon analogue, $f(x, y, z)$ admet deux décompositions similaires : une fois avec x, y groupés et deuxième fois avec x, z groupés. Le théorème 7 résulte du théorème 6.

Observations. 1) Si $f(x, y, z)$ est une pseudo-somme à deux termes pour des valeurs fixes arbitraires d'un variable quelconque, il ne résulte pas que $f(x, y, z)$ est une pseudo-somme à trois termes, comme nous montre l'exemple

$$f(x, y, z) = F(x)G(y) + H(z).$$

2) Si la fonction $f(x, y, z)$ est pseudo-somme par rapport à x, z pour y fixé arbitrairement et en même temps par rapport à y, z pour x fixé arbitrairement, il ne résulte point qu'elle est pseudo-somme par rapport à x, y pour z fixe, comme on voit de l'exemple

$$f(x, y, z) = [F(x) + G(y)]M(x)H(z).$$

8. L'interprétation géométrique du théorème 7. Nous considérons les points $A(x_2, y_1, z_1)$, $B(x_1, y_2, z_1)$, $C(x_1, y_1, z_2)$, $A'(x_1, y_2, z_2)$, $B'(x_2, y_1, z_2)$, $C'(x_2, y_2, z_1)$ (fig. 2). L'implication (39) exprime que si les points A, B, C sont sur la même surface de niveau de la fonction $f(x, y, z)$, alors les points A', B', C' sont aussi sur une même surface de niveau. En autre termes : si nous essayons de construire des octaèdres avec deux faces parallèles au plan de coordonnée xy , deux faces parallèles au plan yz , deux parallèles à zx et avec deux faces courbes formées par des surfaces de niveau de la fonction $f(x, y, z)$, alors ces octaèdres peuvent être construits, il se ferment. Les plans parallèles aux plans de coordonnées et les surfaces de niveau de la fonction $f(x, y, z)$ forment un *tissu spatial*, les octaèdres considérés plus haut sont les *octaèdres de tissu*. La condition (39) exprime que les octaèdres de tissu se ferment.

D'autre côté, si les surfaces courbes du tissu ont les équations

$$K^{-1}[F(x) + G(y) + H(z)] = \text{const},$$

alors le tissu est topologiquement équivalent à un tissu formé par quatre famille de plans parallèles, qui s'appelle un *tissu régulier*. Voici maintenant l'interprétation du théorème 7 : La condition nécessaire et suffisante pour qu'un tissu spatial soit topologiquement équivalent à un tissu régulier est que tous les octaèdres de tissu se ferment. Nous avons retrouvé un résultat bien connu de la géométrie des tissus [6].

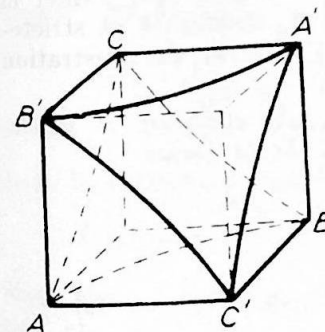


Fig. 2.

9. Séparation des variables. Pour représenter nomographiquement la fonction

$$(45) \quad y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

on cherche la séparation des variables sous la forme

$$(46) \quad f(x_1, \dots, x_n) = F[\varphi_1(x_1, \dots, x_{p_1}), \varphi_2(x_{p_1+1}, \dots, x_{p_2}), \dots, \varphi_r(x_{p_{r-1}+1}, \dots, x_p), x_{p_r+1}, \dots, x_n].$$

Si chacune des équations

$$(47) \quad \begin{cases} \xi_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_{p_1}) \\ \xi_2 = \varphi_2(x_{p_1+1}, \dots, x_{p_2}) \\ \dots \\ \xi_r = \varphi_r(x_{p_{r-1}+1}, \dots, x_{p_r}) \\ y = F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, x_{p_r+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

est représentable nomographiquement, alors on peut construire un nomogramme composé pour l'équation (45).

L. BAL et moi nous avons établi les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la décomposition (46), dans le cas des fonctions F et φ_i différentiables [4], [5], sous la forme

$$(48) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f'_{x_i}}{f'_{x_{i+1}}} \right) = 0 \quad \begin{matrix} (k = 1, 2, \dots, r) \\ (i = p_{k-1} + 1, \dots, p_k - 1) \quad (p_0 = 0) \\ (j = 1, \dots, p_{k-1}, p_k + 1, \dots, n). \end{matrix}$$

Dans la démonstration nous avons fait usage du

L e m m e 1. Si la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ admet les décompositions

$$(49) \quad f(x_1, \dots, x_n) = F_k[x_1, \dots, x_{p_{k-1}}, \varphi_k(x_{p_{k-1}+1}, \dots, x_{p_k}), x_{p_k+1}, \dots, x_n] \\ (k = 1, 2, \dots, r) \quad (p_0 = 0), \text{ alors la décomposition (46) est valable. Ici les fonctions } F_k, \varphi_k \text{ ne sont pas soumises à aucune condition restrictive.}$$

Pour établir les conditions dans lesquelles la fonction (45) admet la décomposition (46) dans le cas des fonctions F et φ_i continues et strictement monotones, nous énonçons le lemme suivant, dont la démonstration ne présente pas de difficulté.

L e m m e 2. Pour que la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$, continue et strictement monotone par rapport à chaque variable, soit de la forme

$$(50) \quad f(x_1, \dots, x_n) = F[\varphi(x_1, \dots, x_p), x_{p+1}, \dots, x_n]$$

il faut et il suffit l'implication

$$(51) \quad \begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n) = f(y_1, y_2, \dots, y_p, x_{p+1}, \dots, x_n) \rightarrow \\ f(x_1, x_2, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_n) = f(y_1, y_2, \dots, y_p, y_{p+1}, \dots, y_n). \end{cases}$$

La lemme 2 généralise le théorème 1.

Des lemmes 1 et 2 il résulte immédiatement :

THÉOREME 8. Pour que la fonction continue et strictement monotone $f(x_1, \dots, x_n)$ soit de la forme (46) avec F et φ_i continues et strictement monotones il faut et il suffit que les relations

$$(52) \quad f(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(i)}) = f(x_1^{(j)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(j)})$$

($i_k = 0, 1$; $j_k = 0, 1$) valables pour

$$\begin{matrix} i_s = 0, j_s = 1, i_\sigma = j_\sigma = 0, & \begin{matrix} (s = p_{k-1} + 1, \dots, p_k) \\ (\sigma = 1, \dots, p_{k-1}, p_k + 1, \dots, n) \\ (k = 1, 2, \dots, r), (p_0 = 0) \end{matrix} \end{matrix}$$

entraînent les mêmes relations (52) pour

$$i_s = 0, j_s = 1, i_\sigma = j_\sigma = 1,$$

s et σ ayant les mêmes significations que plus haut.

10. Généralisation des pseudo-sommes. Dans les décompositions (49) es r fonctions φ_k ne contiennent pas des variables communes. Si nous sup-

posons que la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ admette des décompositions, dans lesquelles une variable figure sous plusieurs fonctions intérieures, alors nous verrons qu'il résultera une forme plus particulière pour f .

Considérons premièrement l'exemple

$$(53) \quad f(x, y, z, u) = g[\varphi(x, y, z), u] = h[x, \psi(y, z, u)],$$

où les fonctions φ, ψ, g, h sont continues et monotones.

Le théorème 6 nous montre que les fonctions $f(x, y, z_0, u)$ et $f(x, y_0, z, u)$ sont des pseudo-sommes à trois termes

$$(54) \quad \begin{cases} f(x, y, z_0, u) = K^{-1}[F(x) + G(y) + H(u)] \\ f(x, y_0, z, u) = K_1^{-1}[F_1(x) + G_1(z) + H_1(u)]. \end{cases}$$

En posant dans la première égalité (54) $y = y_0$ et dans la deuxième $z = z_0$, on obtient deux représentations pour la même pseudo-somme à deux termes. On a [12]

$$\begin{aligned} F_1(x) &= a F(x) + b \\ H_1(x) &= a H(x) + a G(y_0) - G_1(z_0) + c \\ K_1(x) &= a K(x) + b + c, \end{aligned}$$

donc la deuxième égalité (54) s'écrit

$$f(x, y_0, z, u) = K^{-1}[F(x) + G_1(z) + G(y_0) - \frac{1}{a} G_1(z_0) + H(u)].$$

Nous faisons varier y_0 , en laissant z_0 fixe; alors F, H, G et K ne se change pas, et

$$G_1(z) + G(y_0) - \frac{1}{a} G_1(z_0) = G(y_0, z),$$

donc

$$(55) \quad f(x, y, z, u) = K^{-1}[F(x) + G(y, z) + H(u)].$$

Par conséquent, (53) entraîne (55) et évidemment (55) entraîne (53). Ce résultat peut être généralisé :

THÉOREME 9. Les décompositions

$$(56) \quad f(x_1, \dots, x_n) = g[\varphi(x_1, \dots, x_q), x_{q+1}, \dots, x_n] = h[x_1, \dots, x_p, \psi(x_{p+1}, \dots, x_n)]$$

($p < q$), où φ, ψ, g, h sont des fonctions continues et strictement monotones, sont nécessaires et suffisantes pour que la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ soit de la forme

$$(57) \quad f(x_1, \dots, x_n) = K^{-1}[F(x_1, \dots, x_p) + G(x_{p+1}, \dots, x_q) + H(x_{q+1}, \dots, x_n)],$$

F, G, H, K étant continues et strictement monotones.

La formule (57) peut être mise sous la forme (56), il reste donc à établir (56) $\rightarrow$ (57). Nous avons vu que cette implication est valable pour $n = 4$.

Nous la supposons valable pour $n-1 \geq 4$ et nous la démontrerons pour n . Par-
ceque $n \geq 5$, il y a deux éléments au moins dans un des groupes de varia-
bles $x_1, \dots, x_p; x_{p+1}, \dots, x_q; x_{q+1}, \dots, x_n$; supposons pour fixer les idées
que c'est la troisième. Il résulte de l'hypothèse d'induction

$$(58) \quad \begin{cases} f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n^0) = K^{-1} [F(x_1, \dots, x_p) + \\ + G(x_{p+1}, \dots, x_q) + H'(x_{q+1}, \dots, x_{n-1}, x_{n-2})] \\ f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^0, x_n) = K_1^{-1} [F_1(x_1, \dots, x_p) + \\ + G_1(x_{p+1}, \dots, x_q) + H_1(x_{q+1}, \dots, x_{n-2}, x_n)] \end{cases}$$

On a

$$(59) \quad \begin{aligned} K^{-1} [F(x_1, \dots, x_p) + G(x_{p+1}, \dots, x_q) + \\ + H'(x_{q+1}, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^0)] &= K_1^{-1} [F_1(x_1, \dots, x_p) + \\ + G_1(x_{p+1}, \dots, x_q) + H_1(x_{q+1}, \dots, x_{n-2}, x_n^0)]. \end{aligned}$$

En fixant toutes les variables sauf x_1 et x_{p+1} , on obtient deux représentations
de la même pseudo-somme à deux termes, donc $K_1 = aK + a'$ [12]. En
substituant cette expression de K_1 dans la deuxième équation (58) et en
écrivant pour $\frac{1}{a}F_1, \frac{1}{a}G_1, \frac{1}{a}H_1 - a'$ simplement F_1, G_1, H_1 , on obtient
a même forme pour la deuxième équation (58) avec la seule modification
qu'au lieu de K_1 on aura K . Dans (59) les arguments de la fonction K^{-1}
doivent être égales, donc

$$F_1(x_1, \dots, x_p) = F(x_1, \dots, x_p), \quad G_1(x_{p+1}, \dots, x_q) = G(x_{p+1}, \dots, x_q).$$

La deuxième équation (58) s'écrit

$$f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^0, x_n) = K^{-1} [F(x_1, \dots, x_p) + G(x_{p+1}, \dots, x_q) + \\ + H_1(x_{q+1}, \dots, x_{n-2}, x_n)].$$

Nous faisons varier x_{n-1}^0 , en laissant x_n^0 fixe; alors les fonctions F, G, K^{-1}
ne changent pas et nous obtenons

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = K^{-1} [F(x_1, \dots, x_p) + G(x_{p+1}, \dots, x_q) + \\ + H(x_{q+1}, \dots, x_{n-1}, x_n)].$$

Le théorème 9 est démontré.

Supposons maintenant que $f(x, y, z, u)$ admette les décompositions
suivantes :

$$(60) \quad f(x, y, z, u) = g[\varphi(x, y, z, u)] = h[\psi(x, y, u), z] = l[k(x, z, u), y].$$

Il résulte de ce que nous venons de montrer

$$\begin{aligned} f(x, y, z, u) &= L^{-1} [F(x, y) + H(z) + K(u)] = \\ &= L_1^{-1} [F_1(x, y) + G_1(y) + K_1(u)]. \end{aligned}$$

En donnant des valeurs constantes à y et z , on voit comme plus haut
qu'on peut supposer $L_1 = L$. Puis nous posons $z = \text{const}$, et nous trouvons
 $F(x, y) = F_1(x, z_0) + G_1(y) = F(x) + G(y)$, donc

$$(61) \quad f(x, y, z, u) = L^{-1} [F(x) + G(y) + H(z) + K(u)].$$

Par conséquent, les trois décompositions (60) sont nécessaires et suffisantes
pour que la fonction $f(x, y, z, u)$ soit une pseudo-somme à quatre termes.

On trouve par induction complète :

THÉORÈME 10. Les décompositions

$$(62) \quad f(x_1, \dots, x_n) = g_i [\varphi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), x_i]$$

($i = 2, \dots, n$), où φ_i et g_i sont des fonctions continues et strictement mono-
tones, sont nécessaire et suffisantes pour que la fonction f soit une pseudo-
somme à n termes

$$(63) \quad f(x_1, \dots, x_n) = F^{-1} [F_1(x_1) + F_2(x_2) + \dots + F_n(x_n)],$$

F_i et F étant des fonctions continues et strictement monotones.

Le théorème 10 généralise le théorème 6. Le théorème 7 se généra-
lise comme il suit :

THÉORÈME 11. La condition nécessaire et suffisante pour que la
fonction continues et strictement monotone $f(x_1, \dots, x_n)$ soit une pseudo-somme
à $n \geq 3$ termes est que les relations

$$(64) \quad f(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, \dots, x_n^{(i_n)}) = f(x_1^{(j_1)}, x_2^{(j_2)}, \dots, x_n^{(j_n)})$$

valables pour les indices $i_k = 0, 1, j_k = 0, 1$ qui vérifient $\sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n j_k = 1$,

entraînent les mêmes relations (64) pour $\sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n j_k = 2$.

Pour $n = 3$ ce théorème coïncide avec le théorème 7. Nous démontré-
rons la suffisance de la condition par induction, en la supposant pour
 $n-1$. Nous admettons que les relations (64) avec $\sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n j_k = 1$ en-
traînent les mêmes relations avec $\sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n j_k = 2$, et démontrons que f
est une pseudo-somme.

Considérons la fonction

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)})$$

et supposons que

$$(65) \quad \varphi(x_1^{(i_1)}, \dots, x_{n-1}^{(i_{n-1})}) = (\varphi(x_1^{(j_1)}, \dots, x_{n-1}^{(j_{n-1})})),$$

si $i_k = 0, 1, j_k = 0, 1, \sum_{k=1}^{n-1} i_k = \sum_{k=1}^{n-1} j_k = 1$. Déterminons $x_n^{(1)}$ de la manière

suivante :

$$\varphi(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}) = f(x_1^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(1)}).$$

Alors la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ vérifie (64) pour $\sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n j_k = 1$, donc

aussi pour $\sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n j_k = 2$. En tenant compte de la définition de la fonction $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ on voit que les conditions (65) sont satisfaites pour $\sum_{k=1}^{n-1} i_k = \sum_{k=1}^{n-1} j_k = 2$. Par conséquent les relations (65) pour $\sum_{k=1}^{n-1} i_k = \sum_{k=1}^{n-1} j_k =$

$=1$ entraînent les relations (65) pour

$$\sum_{k=1}^{n-1} i_k = \sum_{k=1}^{n-1} j_k = 2,$$

donc nous obtenons par l'application de l'hypothèse d'induction

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = F^{-1}[F_1(x_1) + \dots + F_{n-1}(x_{n-1})].$$

Donc

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) = F^{-1}[F_1(x_1) + \dots + F_{n-1}(x_{n-1})]$$

et aussi

$$f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^{(0)}, x_n) = \Phi^{-1}[\Phi_1(x_1) + \dots + \Phi_{n-2}(x_{n-2}) + \Phi_n(x_n)].$$

En posant dans les deux dernières relations $x_3 = x_3^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)}$, nous avons deux formes d'écriture pour $f(x_1, x_2, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ d'où on obtient que Φ peut être choisi égale à F . On a immédiatement

$$F_i = \Phi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-2),$$

donc

$$f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^{(0)}, x_n) = F^{-1}[F_1(x_1) + \dots + F_{n-2}(x_{n-2}) + \Phi_n(x_n)].$$

Nous faisons varier $x_{n-1}^{(0)}$ en laissant $x_n^{(0)}$ fixe

$$f(x_1, \dots, x_n) = F^{-1}[F_1(x_1) + \dots + F_{n-2}(x_{n-2}) + \Phi(x_{n-1}, x_n)].$$

De même

$$f(x_1, \dots, x_n) = G^{-1}[G_1(x) + \dots + G_{n-4}(x_{n-4}) + \psi(x_{n-3}, x_{n-2}) + G_{n-1}(x_{n-1}) + G_n(x_n)].$$

On obtient par comparaison des deux dernières relations que $f(x_1, \dots, x_n)$ est une pseudo-somme à n termes.

Ainsi nous avons démontré la suffisance de la condition énoncée. On voit par une vérification directe qu'elle est aussi nécessaire. Le théorème 11 est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Aczél J., *Sur les opérations définies pour nombres réels*. Bull. Soc. Math. France, **76**, 59-64 (1948).
- [2] — *On Mean Values*. Bull. of the Amer. Math. Soc., **54**, 392-400 (1948).
- [3] — *Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений*. Успехи Мат. Наук, **11**, 3, 3-68, (1956).
- [4] Bal L., Radó F., *Do două teoreme referitoare la separarea variabilelor pentru ecuații cu cinci variabile*. Comunic. Acad. R.P.R., **5**, 285-290 (1955).
- [5] — *Separarea variabilelor în nomografie*. Comunic. Acad. R.P.R., **5**, 303-305 (1955).
- [6] Blaschke W., Bol G., *Geometrie der Gewebe*. Berlin 1938.
- [7] Goursat E., *Sur les équations du second ordre à n variables analogues à l'équation de Monge-Ampère*. Bull. de la Soc. Math. de France, **27**, 1-34 (1899).
- [8] Hosszú M., *A Generalization of the Functional Equation of Bisymmetry*. Studia Math., **14**, 100-106 (1953).
- [9] — *Some Functional Equation related with the Associative Law*. Publ. Math., **3**, 205-214 (1954).
- [10] — *On the Functional Equation of Transitivity*. Acta Sc. Math. Szeged, **15**, 203-208 (1954).
- [11] Radó F., *Ecuații funcționale în legătură cu nomografia*. Studii și Cercetări de Mat. Cluj, **9**, 249-319 (1958).
- [12] — *Equations fonctionnelles caractérisant les nomogrammes avec trois échelles rectilignes*. Mathematica, **1(24)**, 143-166 (1959).
- [13] Schweitzer A. R., *On a Functional Equation*. Bull. Amer. Math. Soc., **18**, 160-161, 299-302 (1912).
- [14] — *On the Iterative Properties of an Abstract Group*. Bull. Amer. Math. Soc., **24**, 371 (1918).

Reçu le 28. XI. 1959.