

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R. P. R.

1. E. RUSU Bazele teoriei numerelor.
2. A. I. MARKUȘEVICI Șiruri recurente.
3. N. N. VOROBIEV Numerele lui Fibonacci.
4. P. S. ALEXANDROV Introducere în teoria grupurilor.
5. I. S. SOMINSKI Metoda inducției matematice.
6. GH. MIHOC Elemente de calculul probabilităților.
7. H. IONESCU Calcule numerice.
8. A. I. MARKUȘEVICI Aritmici și logaritmi.
9. A. I. GHELFOND Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi.
10. O. SACTER Despre conice și alte curbe.
11. ION IONESCU Maxime și minime geometrice.
12. F. I. ZIGHEL Comețele.
13. S. SKLOVSKI Radioastronomia.
14. V. ATANASIU Structura materiei.
15. V. V. SARONOV Soarele și observarea lui.
16. O. KREINDLER Elemente de calcul vectorial.
17. B. B. KUDRIAVTSEV Experiențe simple cu ultrasunete.
18. M. V. PENTKOVSKI Nomograme.
19. A. KAHANE Elemente din teoria congruențelor de drepte.
20. GH. ȚIȚICA Culegere de probleme de geometrie, (revăzută și completată de G. D. SIMIONESCU).
21. A. HALANAY Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale.
22. N. STANESCU Electronul.
23. V. SERGIESCU Introducere în fizica solidului.
24. G. N. BERMAN Cicloida.
25. C. BORȘ Noțiuni de geometrie proiectivă.
26. AL. SANIELEVICI Introducere în radioactivitate.
27. M. HEROVANU Introducere în fizica atmosferei.
28. C. G. BEDREAG Bibliografia fizicii române.
29. I. S. DUBNOV Erori în demonstrațiile geometrice.
30. C. POPOVICI Stelele, date fizice, structura internă, originea și evoluția lor.
31. C. DRIMBA Elemente de mecanică cerească.
32. C. IONESCU BUJOR Elemente de transformări geometrice.
33. GH. A. CHIȚEI Metode pentru rezolvarea problemelor de aritmetică.
34. O. SACTER Olimpiade matematice.

C. 957 Litografia și tipografia Învățământului

Lei 3

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R. P. R.

GAZETA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

SERIA A

PUBLICAȚIE PENTRU STUDIUL ȘI RĂSPÂNDIREA
ȘTIINȚELOR MATEMATICE ȘI FIZICE

SERIE NOUA A GAZETEI MATEMATICE FONDATE ÎN ANUL 1895

8

AUGUST 1959



CUPRINDE

- | | |
|----------------|--|
| * * * | : 15 ani de la eliberarea patriei noastre. |
| Tib. Popoviciu | : Asupra unor inegalități. |
| D. V. Ionescu | : Împărțirea polinoamelor. |
| E. Munteanu | : Elemente de programare pentru mașinile electronice de calcul. |
| E. Kiss | : Câteva observațiuni în legătură cu unele greșeli comise în culegerile de probleme de analiză matematică. |
| A. Büchler | : Câteva aparate folosite la studiul căderii libere. |

PROBLEME DIN TEHNICĂ — SPICUIRI — VIAȚA ȘTIINȚIFICĂ — VIAȚA
SOCIETĂȚII — DATE ASTRONOMICE — PROBLEME DE CONCURS
— PROBLEME REZOLVATE — PROBLEME PROPUSE

I

1. Cunoscuta inegalitate a lui Cauchy - Buniakowski

$$(1) \quad \left(\sum a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum a_i^2 \right) \left(\sum b_i^2 \right)$$

este verificată oricare ar fi șirurile de numere reale

$$(2) \quad a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n.$$

I. Aczél a demonstrat [1] inegalitatea

$$(3) \quad \left(a_0 b_0 - \sum a_i b_i \right)^2 \geq \left(a_0^2 - \sum a_i^2 \right) \left(b_0^2 - \sum b_i^2 \right),$$

care este verificată oricare ar fi șirurile de numere reale

$$(4) \quad a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_n,$$

astfel ca să avem

$$(5) \quad a_0^2 > \sum a_i^2 \text{ (sau } b_0^2 > \sum b_i^2).$$

În aceste formule, precum și în cele ce vor urma, notăm, pentru prescurtare, cu $\sum$, însemnarea $\sum_{i=1}^n$, n fiind un număr natural dat.

2. Se cunosc mai multe demonstrații ale inegalității (1). Una din aceste demonstrații se bazează pe observația că forma pătratică $\sum (a_i x - b_i y)^2$ este *nenegativă* și, în general, *definită*. Se deduce că în (1) egalitatea are loc dacă și numai dacă șirurile (2) sînt proporționale. Două șiruri, cu același număr de termeni, cum sînt de exemplu, șirurile (2) (respectiv șirurile (4)), se zic *proporționale* (sau *liniar dependente*), dacă există două numere λ, μ , nu ambele nule, astfel ca să avem $\lambda a_i = \mu b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ (respectiv $i = 0, 1, \dots, n$).

I. Aczél dă o demonstrație analoagă pentru inegalitatea (3), observînd că forma pătratică

$$\begin{aligned} & (a_0 x - b_0 y)^2 - \sum (a_i x - b_i y)^2 = \\ & = (a_0^2 - \sum a_i^2) x^2 - 2(a_0 b_0 - \sum a_i b_i) xy + (b_0^2 - \sum b_i^2) y^2, \end{aligned}$$

este *indefinită* și deduce că în (3) egalitatea are loc dacă și numai dacă șirurile (4) sînt proporționale.

Dacă $n > 1$, concluzia relativă la cazul egalității în formula (3) este valabilă numai sub ipoteza (5). Dacă $a_0^2 = \sum a_i^2$ (sau $b_0^2 = \sum b_i^2$), inegalitatea (3) are loc (evident), dar pentru egalitate nu este atunci necesar ca șirurile (4) să fie proporționale. Pentru a vedea acest lucru, este suficient a lua, de exemplu, pentru șirurile (4) șirurile ($n=2$) 5, 3, 4; 8, 4, 7.

3. O a doua demonstrație, foarte simplă, a inegalității (1) se bazează pe egalitatea

$$\sum_{i < j}^{1, 2, \dots, n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \left(\sum a_i^2 \right) \left(\sum b_i^2 \right) - \left(\sum a_i b_i \right)^2.$$

O egalitate analoagă permite să deducem inegalitatea (3) din inegalitatea (1).

Dacă $\sum a_i^2 > 0$, avem

$$\begin{aligned} (a_0 b_0 - \sum a_i b_i)^2 - (a_0^2 - \sum a_i^2)(b_0^2 - \sum b_i^2) = \\ = \frac{1}{\sum a_i^2} \{ (b_0 \sum a_i^2 - a_0 \sum a_i b_i)^2 + \\ + (a_0^2 - \sum a_i^2) [(\sum a_i^2)(\sum b_i^2) - (\sum a_i b_i)^2] \}, \end{aligned}$$

de unde, ținând seamă de condiția (5) și de inegalitatea (1), rezultă că avem (3). Pentru ca în (3) să aibă loc egalitatea, este necesar și suficient ca să avem egalitate în (1) și ca $b_0 \sum a_i^2 = a_0 \sum a_i b_i$. Din proporționalitatea șirurilor (2) se deduce atunci imediat proporționalitatea șirurilor (4).

4. Se știe că inegalitatea (1) se generalizează prin inegalitatea lui Hölder

$$(6) \quad \sum a_i b_i \leq (\sum b_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum b_i^q)^{\frac{1}{q}},$$

unde $a_i, b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, iar p, q sînt două numere pozitive (> 1) și conjugate, adică $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Egalitatea în (6) are loc dacă și numai dacă șirurile

$$(7) \quad a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p; \quad b_1^q, b_2^q, \dots, b_n^q$$

sînt proporționale.

Pentru demonstrarea inegalității (6) se pleacă de la inegalitatea dintre mediile aritmetice și geometrice generalizate,

$$(8) \quad \xi^{\frac{r}{r+s}} \eta^{\frac{s}{r+s}} \leq \frac{r\xi + s\eta}{r+s},$$

care este verificată pentru $\xi, \eta \geq 0, r, s > 0$ și în care egalitatea are loc dacă și numai dacă $\xi = \eta$.

Dacă presupunem că $\sum a_i^p > 0, \sum b_i^q > 0$ și dacă punem

$$r = \frac{1}{p}, s = \frac{1}{q}, \xi = \frac{a_i^p}{\sum a_i^p}, \eta = \frac{b_i^q}{\sum b_i^q},$$

inegalitatea (8) devine

$$(9) \quad \frac{a_i b_i}{(\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum b_i^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{a_i^p}{p \sum a_i^p} + \frac{b_i^q}{q \sum b_i^q}.$$

Făcînd aici $i = 1, 2, \dots, n$ și adunînd membru cu membru inegalitățile astfel obținute, avem, ținînd seamă și de $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\frac{\sum a_i b_i}{(\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum b_i^q)^{\frac{1}{q}}} \leq 1,$$

care este echivalentă cu inegalitatea (6).

Condiția de egalitate rezultă din condiția de egalitate a relației (8). În demonstrația precedentă am presupus că numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$, pe de o parte și numerele $b_1, b_2, \dots, b_n$, pe de altă parte, nu sînt toate nule. Se vede că rezultatele precedente sînt valabile și dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ sau dacă $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$. Pentru cazul egalității, ne bazăm pe faptul că orice șir este proporțional cu șirul care are toți termenii egali cu 0.

Notă. Inegalitatea (8) se poate demonstra în multe feluri. De exemplu, ea se deduce ușor dacă observăm că, presupunînd η dat, funcția de ξ , $\frac{r\xi + s\eta}{r+s} - \xi^{\frac{r}{r+s}} \eta^{\frac{s}{r+s}}$ a cărei derivată este egală cu $\frac{r}{r+s} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\xi} \right)^{\frac{s}{r+s}} \right]$, își atinge minimul său absolut pentru și numai pentru $\xi = \eta$.

5. Avem inegalitatea

$$(10) \quad a_0 b_0 - \sum a_i b_i \geq (a_0^p - \sum a_i^p)^{\frac{1}{p}} (b_0^q - \sum b_i^q)^{\frac{1}{q}},$$

care este verificată dacă $p, q (> 1)$ sînt două numere conjugate și $a_i, b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, a_0^p > \sum a_i^p, b_0^q > \sum b_i^q$, egalitatea în (10) avînd loc dacă și numai dacă șirurile

$$(11) \quad a_0^p, a_1^p, \dots, a_n^p; \quad b_0^q, b_1^q, \dots, b_n^q$$

sînt proporționale.

Pentru a demonstra inegalitatea (10), vom arăta întîi că este destul să ne ocupăm de cazul $n = 1$. Într-adevăr, fie $n \geq 1$ și să punem $A = (\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}}, B = (\sum b_i^q)^{\frac{1}{q}}$. Atunci $a_0 > A \geq 0, b_0 > B \geq 0$ și pe baza inegalității lui Hölder,

$$(12) \quad \sum a_i b_i \leq AB.$$

Presupunînd că inegalitatea (10) este adevărată pentru $n = 1$, putem scrie

$$(13) \quad a_0 b_0 - AB \geq (a_0^p - A^p)^{\frac{1}{p}} (b_0^q - B^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Din (12), (13) rezultă imediat inegalitatea (10) (pentru n oarecare).

Rămîne să demonstrăm inegalitatea (13) unde a_0, b_0, A, B sînt numere reale astfel ca $a_0 > A \geq 0, b_0 > B \geq 0$.

Pe baza inegalității (6) (unde $n = 2$, $a_1 = A$, $a_2 = (a_0^p - A^p)^{\frac{1}{p}}$, $b_0 = B$, $b_1 = (b_0^q - B^q)^{\frac{1}{q}}$), avem

$$(14) \quad AB + (a_0^p - A^p)^{\frac{1}{p}} (b_0^q - B^q)^{\frac{1}{q}} \leq a_0 b_0,$$

care este echivalentă cu inegalitatea (13).

Pentru ca în (10) să avem egalitate, este necesar și suficient ca să avem egalitatea în (12) și în (13). Se găsește imediat proporționalitatea șirurilor (11) ca o condiție necesară și suficientă pentru această egalitate.

6. Inegalitatea lui Minkowski

$$(15) \quad [\sum (a_i + b_i)^p]^{\frac{1}{p}} \leq (\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum b_i^p)^{\frac{1}{p}},$$

care este verificată pentru $a_i, b_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $p > 1$, rezultă imediat din inegalitatea (6). Este suficient să adunăm membru cu membru inegalitățile

$$(16) \quad \begin{cases} \sum a_i (a_i + b_i)^{p-1} \leq (\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum (a_i + b_i)^{q(p-1)})^{\frac{1}{q}}, \\ \sum b_i (a_i + b_i)^{p-1} \leq (\sum b_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum (a_i + b_i)^{q(p-1)})^{\frac{1}{q}}, \end{cases}$$

unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ și obținem o inegalitate echivalentă cu (15).

Pentru ca să avem egalitatea în (15) este necesar și suficient ca să avem egalitatea în ambele formule (16). Pentru prima egalitate, este necesar și suficient ca șirurile

$a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p$; $(a_1 + b_1)^p, (a_2 + b_2)^p, \dots, (a_n + b_n)^p$ și prin urmare șirurile

$a_1, a_2, \dots, a_n$; $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n$

să fie proporționale, iar pentru a doua egalitate ca șirurile

$b_1, b_2, \dots, b_n$; $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n$

să fie proporționale.

Se deduce că o condiție necesară și suficientă ca în (15) să avem egalitatea este ca șirurile (2) (cu termenii nenegativi) să fie proporționale.

Ne-am bazat aici pe următoarele fapte: 1° coeficienții de proporționalitate (vezi nr. 2) se pot alege nenegativi dacă $a_i, b_i \geq 0$, 2° șirul cu termenii toți nuli este proporțional cu orice șir (observație deja făcută), 3° proporționalitatea este tranzitivă pentru șirurile care nu au toți termenii nuli.

7. Inegalitatea lui R. Bellmann [2]

$$(17) \quad [(a_0 + b_0)^p - \sum (a_i + b_i)^p]^{\frac{1}{p}} \geq (a_0^p - \sum a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (b_0^p - \sum b_i^p)^{\frac{1}{p}},$$

care este verificată pentru $a_i, b_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, $p > 1$, $a_0^p > \sum a_i^p$, $b_0^p > \sum b_i^p$, se deduce din (15) exact cum se deduce inegalitatea (10) din (6).

Punem $A = (\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}}$, $B = (\sum b_i^p)^{\frac{1}{p}}$. Atunci $a_0^p > A^p$, $b_0^p > B^p$ și pe baza inegalității lui Minkowski, avem

$$(18) \quad [\sum (a_i + b_i)^p]^{\frac{1}{p}} \leq A + B.$$

Presupunind că inegalitatea (17) este adevărată pentru $n = 1$, avem

$$(19) \quad [(a_0 + b_0)^p - (A + B)^p]^{\frac{1}{p}} \geq (a_0^p - A^p)^{\frac{1}{p}} + (b_0^p - B^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Din (18), (19) rezultă (17), pentru n oarecare. În ce privește inegalitatea (19) pentru $a_0 > A \geq 0$, $b_0 > B \geq 0$, ea este echivalentă cu inegalitatea lui Minkowski

$$\{(A + B)^p + [(a_0^p - A^p)^{\frac{1}{p}} + (b_0^p - B^p)^{\frac{1}{p}}]^p\}^{\frac{1}{p}} \leq a_0 + b_0.$$

Lăsăm pe seama cititorului să demonstreze că egalitatea în (17) are loc dacă și numai dacă șirurile (4) (cu termeni nenegativi), sînt proporționale.

Notă. În toate formulele de mai sus x^σ este valoarea nenegativă a puterii a x^σ , $\sigma > 0$ a lui $x \geq 0$.

II.

8. Cunoscuta inegalitate a lui P. L. Cebîșev,

$$(20) \quad \frac{\sum a_i b_i}{n} \geq \frac{\sum a_i}{n} \cdot \frac{\sum b_i}{n},$$

care este verificată dacă șirurile (2) sînt monotone de același sens, a fost generalizată în multe feluri. Astfel M. Biernacki [3] pune în loc de sumele $\sum a_i$, $\sum b_i$, $\sum a_i b_i$ respectiv sumele $\sum \varepsilon_i a_i$, $\sum \varepsilon_i b_i$, $\sum \varepsilon_i a_i b_i$, unde termenii șirului

$$(21) \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$$

sînt alternativ egali cu 1 și -1. Prin această înlocuire, inegalitatea (20) rămîne verificată dacă șirurile (2) sînt necrescătoare cu termeni nenegativi. Inegalitatea (20) rămîne adevărată, în aceleași condițiuni și dacă ε_i sînt egali cu 1 sau -1, astfel ca în șirul (21) fiecare grup (complet) de termeni consecutivi egali cu -1 să fie precedat de un grup (complet) de termeni consecutivi mai numeroși egali cu 1.

Avem deci inegalitatea

$$(22) \quad \sum \varepsilon_i a_i b_i \geq \frac{1}{n} (\sum \varepsilon_i a_i) (\sum \varepsilon_i b_i)$$

dacă șirul (21) verifică proprietatea de mai sus și, în particular, inegalitatea

$$(23) \quad \sum (-1)^{i-1} a_i b_i \geq \frac{1}{n} (\sum (-1)^{i-1} a_i) (\sum (-1)^{i-1} b_i),$$

care sînt adevărate dacă șirurile (2) sînt necrescătoare și cu termeni nenegativi.

9. Vom da câteva generalizări ale inegalităților precedente. Înainte însă este util să dăm o notație prescurtată pentru șiruri și câteva noțiuni și definiții în legătură cu ele.

Vom considera numai șiruri cu același număr n de termeni. Pentru prescurtare, vom nota cu o singură literă C șirul $c_1, c_2, \dots, c_n$. Astfel șirurile (2) vor fi notate cu A, B , iar șirurile de variabile $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$ cu X, Y etc.

Egalitatea $A=B$ a două șiruri A, B este definită prin egalitatea termen cu termen a lor. Suma $A+B$ a șirurilor A, B este șirul obținut adunând termen cu termen cele două șiruri, iar produsul λA a șirului A prin numărul λ este șirul obținut înmulțind cu numărul λ fiecare termen al lui A . În particular, $-A (= (-1)A)$ este șirul care se deduce din A , schimbând semnul fiecărui termen. Egalitatea și cele două operații se bucură de proprietăți obișnuite și binecunoscute (de reflexivitate, simetrie, tranzitivitate, asociativitate, comutativitate, distributivitate etc.) asupra cărora este inutil să insistăm aici.

Un șir se mai poate interpreta ca un vector ale cărui coordonate sînt termenii șirului. Cele două operații sînt atunci adunarea vectorilor și produsul unui vector printr-un un scalar.

Șirul $\sum_{j=1}^k \lambda^{(j)} A^{(j)}$ se numește o combinație liniară a șirurilor (în număr finit) $A^{(j)}, j=1, 2, \dots, k$. Numerele $\lambda^{(j)}, j=1, 2, \dots, k$ se numesc coeficienții acestei combinații liniare.

Șirul $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1$ format cu termenii șirului $c_1, c_2, \dots, c_n$ considerați în ordinea inversă, se numește răsturnatul acestui șir. Vom nota cu C^* răsturnatul șirului C . Avem $(C^*)^* = C$.
Fie

$$(24) \quad F(X; Y) = F(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j,$$

o formă biliniară reală (cu coeficienții $a_{i,j}$ reali) în cele două șiruri de variabile X, Y . Inegalitățile (20), (22), (23) sînt atunci echivalente cu inegalitatea

$$(25) \quad F(A; B) \geq 0,$$

unde avem, respectiv,

$$F(X; Y) = n \sum x_i y_i - (\sum x_i) (\sum y_i),$$

$$F(X; Y) = n \sum \varepsilon_i x_i y_i - (\sum \varepsilon_i x_i) (\sum \varepsilon_i y_i),$$

$$F(X; Y) = n \sum (-1)^{i-1} x_i y_i - (\sum (-1)^{i-1} x_i) (\sum (-1)^{i-1} y_i).$$

Dacă voim să generalizăm inegalitățile precedente se pun imediat următoarele două probleme:

Problema 1. — Să se determine forma biliniară reală (24), astfel ca inegalitatea (25) să fie verificată dacă fiecare din șirurile A, B are o proprietate de monotonie de un sens determinat.

Problema 2. — Să se determine forma biliniară reală (24), astfel ca inegalitatea (25) să fie verificată dacă fiecare din șirurile A, B are o proprietate de monotonie de un sens determinat și are toți termenii de un același semn determinat.

Prin faptul că unul din șirurile A, B are o proprietate de monotonie de un sens determinat, înțelegem că șirul rămîne tot timpul nedescrescător sau tot timpul necrescător. De asemenea, prin faptul că șirul are toți termenii de un același semn determinat, înțelegem că termenii săi sînt tot timpul toți nenegativi sau toți nepozitivi. Un șir cu toți termenii nenegativi, resp. toți termenii nepozitivi se mai numește un șir nenegativ, resp. nepozitiv. Zicem că două șiruri sînt monotone de același sens dacă ele sînt ambele nedescrescătoare sau ambele necrescătoare și zicem că ele sînt monotone de sens contrar dacă unul este nedescrescător, iar celălalt necrescător. Denumiri analoage se pot întrebuința pentru șirurile cu toți termenii de același semn determinat.

10. Se vede că, dacă inegalitatea (25) este verificată în condițiile problemei 1 sau în condițiile problemei 2, inegalitatea analoagă (oarecum contrară)

$$(25') \quad F(A; B) \leq 0$$

este verificată, în aceleași condițiuni de către forma biliniară $-F(X; Y)$ și reciproc.

La problema 1 sînt patru cazuri care se pot distinge, după sensul monotoniei șirurilor (2). Aceste cazuri, numerotate 1, 2, 3, 4 sînt cuprinse în tabloul

A \ B		
	nedescr.	necresc.
nedescr.	1	2
necresc.	3	4

De exemplu, cazul 2 este cazul cînd șirul A este necrescător iar șirul B este nedescrescător.

Studiul celor patru cazuri se poate reduce la studiul cazului 1 observînd, pe de o parte, că dacă șirul C este monoton, șirul $-C$ este de asemenea monoton însă de sens contrar și, pe de altă parte, că avem $-F(-X; Y) = -F(X; -Y) = F(-X; -Y) = F(X; Y)$.

Rezultă că pentru ca inegalitatea (25) să aibă loc în cazul 4 și pentru ca inegalitatea (25') să aibă loc în cazurile 2 și 3, este necesar și suficient ca inegalitatea (25) să aibă loc în cazul 1.

Va fi deci destul să ne ocupăm numai de rezolvarea următoarei

Problema 1'. — Să se determine forma biliniară reală (24) astfel ca inegalitatea (25) să fie verificată oricare ar fi șirurile nedescrescătoare A, B .

11. Considerațiuni analoage se pot face asupra problemei 2. Avem acum 16 cazuri numerotate de la 1 la 16 și care sînt cuprinse în tabloul

B \ A		nenegativ		nepozitiv	
		nedescr.	necresc.	nedescr.	necresc.
neneg.	nedescr.	1	2	3	4
	necresc.	5	6	7	8
nepoz.	nedescr.	9	10	11	12
	necresc.	13	14	15	16

De exemplu, cazul 7 este atunci cînd șirul A este nepozitiv și nedescrescător iar șirul B este negativ și necrescător.

La problema 1, schimbarea semnelor uneia sau celor două grupe de cîte n variabile ale formei biliniare $F(X; Y)$ a permis să reducem cazurile 2, 3, 4 corespunzătoare la cazul 1 corespunzător. În cazul problemei 2, aceste transformări nu permit să reducem, ca mai sus, toate cazurile 2-16 la cazul 1, însă permit să reducem cazurile 4, 13, 16 la cazul 1, cazurile 3, 14, 15 la cazul 2, cazurile 8, 9, 12 la cazul 5 și cazurile 7, 10, 11 la cazul 6. Acest lucru se justifică prin faptul că dacă șirul C este nenegativ, resp. nepozitiv, șirul $-C$ este nepozitiv resp. negativ și reciproc. Pentru a reduce cazurile 2, 3, 6 la cazul 1, observăm că, dacă șirul C este monoton, răsturnatul său C^* este de asemenea monoton însă de sens contrar cu C . Dacă C este nenegativ resp. nepozitiv, C^* rămîne negativ resp. nepozitiv. Rezultă că, pentru ca inegalitatea (25) să fie verificată în cazurile 2, 5, 6, este necesar și suficient ca aceeași inegalitate să fie verificată pentru forma biliniară, respectiv egală cu $F(X^*; Y)$, $F(X; Y^*)$, $F(X^*; Y^*)$ în cazul 1.

Va fi deci destul să ne ocupăm numai de rezolvarea problemei Problema 2'. — Să se determine forma biliniară reală (24), astfel ca inegalitatea (25) să fie verificată oricare ar fi șirurile A, B nenegative și nedescrescătoare.

Bineînțeles că putem reduce, în mod analog, în cazul problemei 1, cele 4 cazuri la una oarecare dintre ele și, în cazul problemei 2, cele 16 cazuri la una oarecare dintre ele.

12. Se demonstrează ușor că orice combinație liniară cu coeficienți nenegativi de șiruri nenegative este un șir nenegativ și că orice combinație liniară cu coeficienți nenegativi de șiruri nedescrescătoare este un șir nedescrescător.

Să notăm cu $U^{(-1)}$ șirul cu toți termenii egali cu -1 și cu $U^{(j)}$ ($j=1, 2, \dots, n$) șirul care are ultimii j termeni egali cu 1, ceilalți fiind egali cu 0. $U^{(j)}$ este deci șirul $\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-j}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_j$. Șirurile

$U^{(-1)}, U^{(j)}, j=1, 2, \dots, n$ sînt niște șiruri nedescrescătoare particulare, ultimele n fiind în același timp șiruri nenegative particulare.

Avem

Lema 1. — Orice șir nedescrescător este o combinație liniară cu coeficienți nenegativi ai șirurilor $U^{(-1)}, U^{(j)}, j=1, 2, \dots, n$.

Lema 2. — Orice șir nenegativ și nedescrescător este o combinație liniară cu coeficienți nenegativi ai șirurilor $U^{(j)}, j=1, 2, \dots, n$.

Cele două leme rezultă imediat din faptul că dacă C este un șir oarecare, avem

$$C = \frac{|c_1| - c_1}{2} U^{(-1)} + \frac{|c_1| + c_1}{2} U^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1} (c_{j+1} - c_j) U^{(j)},$$

de unde se vede că nenegativitatea coeficienților este echivalentă cu condiția respectivă de monotonie sau de monotonie și de invarianță a semnelor termenilor $c_1, c_2, \dots, c_n$ ale șirului C .

13. Dacă $\sum_{r=1}^k \lambda^{(r)} A^{(r)}, \sum_{s=1}^l \mu^{(s)} B^{(s)}$ sînt niște combinații liniare ale șirurilor $A^{(r)}, r=1, 2, \dots, k$, respectiv ale șirurilor $B^{(s)}, s=1, 2, \dots, l$, avem

$$F\left(\sum_{r=1}^k \lambda^{(r)} A^{(r)}; \sum_{s=1}^l \mu^{(s)} B^{(s)}\right) = \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^l \lambda^{(r)} \mu^{(s)} F(A^{(r)}; B^{(s)})$$

și dacă ținem seama de lemele 1, 2, deducem

Teorema 1. — Condiția necesară și suficientă pentru ca inegalitatea (25) să fie verificată oricare ar fi șirurile nedescrescătoare A, B este ca această inegalitate să fie verificată totdeauna cînd fiecare dintre șirurile A, B se reduce la unul din șirurile $U^{(-1)}, U^{(j)}, j=1, 2, \dots, n$.

Teorema 2. — Condiția necesară și suficientă pentru ca inegalitatea (25) să fie verificată oricare ar fi șirurile nenegative și nedescrescătoare A, B este ca această inegalitate să fie verificată totdeauna cînd fiecare din șirurile A, B se reduce la unul din șirurile $U^{(j)}, j=1, 2, \dots, n$.

Ținînd seama de structura șirurilor $U^{(-1)}, U^{(j)}, j=1, 2, \dots, n$, se pot ușor enunța condițiile relative la coeficienții $a_{i,j}$ ai formei biliniare (24).

Obținem astfel

Teorema 1'. — Condiția necesară și suficientă pentru ca inegalitatea (25), referitoare la forma biliniară (24), să fie verificată, oricare ar fi șirurile nedescrescătoare A, B , este ca să avem

$$\sum_{i=r}^n \sum_{j=s}^n a_{i,j} \geq 0, r=1, 2, \dots, n, s=2, 3, \dots, n; \sum_{i=r}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 0, \\ r=1, 2, \dots, n.$$

Teorema 2'. — Condiția necesară și suficientă pentru ca inegalitatea (25), referitoare la forma biliniară (24), să fie verificată, oricare ar fi șirurile nenegative și nedescrescătoare A, B , este ca să avem

$$\sum_{i=r}^n \sum_{j=s}^n a_{i,j} \geq 0, r=1, 2, \dots, n, s=1, 2, \dots, n,$$

14. Ca o primă aplicație, să determinăm șirul de numere
(26) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_1 \neq 0, \lambda_n \neq 0,$

astfel ca să avem inegalitatea

$$(27) \quad (\sum \lambda_i) (\sum \lambda_i a_i b_i) \geq (\sum \lambda_i a_i) (\sum \lambda_i b_i),$$

oricare ar fi șirurile nedescrescătoare A, B .

Ipoteza $\lambda_i \neq 0, \lambda_n \neq 0$ și nici chiar ipoteze ca toți termenii șirului (26) să fie diferiți de zero, nu restrânge generalitatea problemei (cazul contrar revine la modificarea lui n).

În acest caz

$$F(X; Y) = (\sum \lambda_i) (\sum \lambda_i x_i y_i) - (\sum \lambda_i x_i) (\sum \lambda_i y_i)$$

și dacă unul cel puțin din șirurile X, Y este egal cu $U^{(-1)}$ sau cu $U^{(n)}$, avem $F(X; Y) = 0$. Un calcul simplu permite să scriem

$$F(U^{(r)}; U^{(s)}) = (\sum_{j=1}^{n-s'} \lambda_j) (\sum_{i=n-r'+1}^n \lambda_i),$$

unde $r' = \min(r, s), s' = \max(r, s)$.

Aplicând teorema 1', rezultă imediat că:

Condiția necesară și suficientă ca inegalitatea (27) să fie verificată, oricare ar fi șirurile nedescrescătoare A, B este ca numerele

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j, r = 1, 2, \dots, n-1, \sum_{j=s}^n \lambda_j, s = 2, 3, \dots, n$$

să fie toate de același semn.

Este ușor de văzut că această condiție este echivalentă cu faptul că:

Numerele

$$\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \dots, \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1}$$

sînt cuprinse (în sens larg) între 0 și $\sum \lambda_i$.

Condiția este verificată în particular pentru $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ și regăsim inegalitatea lui P. L. Cebîșev. Condiția este de asemenea verificată dacă n este impar și $\lambda_i = (-1)^{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$.

Rezultă că inegalitatea

$$(28) \quad \sum (-1)^{i-1} a_i b_i \geq (\sum (-1)^{i-1} a_i) (\sum (-1)^{i-1} b_i)$$

este verificată dacă n este impar și dacă șirurile A, B sînt nedescrescătoare. Pe baza celor spuse, inegalitatea este de altfel verificată și dacă șirurile A, B sînt necrescătoare. Această inegalitate este mai precisă (dacă n este impar) decît inegalitatea (23) prin lipsa din membrul al doilea al factorului $\frac{1}{n}$. De altfel, membrul al doilea al inegalității, în condițiile problemei, este nenegativ.

Ca un al doilea exemplu, să determinăm șirul (21) astfel ca să avem

$$(29) \quad \sum \varepsilon_i a_i b_i \geq (\sum \varepsilon_i a_i) (\sum \varepsilon_i b_i)$$

oricare ar fi șirurile A, B nenegative și necrescătoare.

În acest caz vom aplica teorema 2' formei biliniare

$$F(X; Y) = \sum \varepsilon_i x_{n-i+1} y_{n-i+1} - (\sum \varepsilon_i x_{n-i+1}) (\sum \varepsilon_i y_{n-i+1}).$$

Avem $F(U^{(r)}; U^{(s)}) = (\sum_{i=1}^{r'} \varepsilon_i) (1 - \sum_{i=1}^{s'} \varepsilon_i)$, unde $r' = \min(r, s), s' = \max(r, s)$.

Rezultă imediat că:

Condiția necesară și suficientă ca inegalitatea (29) să fie verificată oricare ar fi șirurile A, B nenegative și necrescătoare este ca numerele

$$\sum_{i=1}^r \varepsilon_i, r = 1, 2, \dots, n,$$

să fie cuprinse (în sens larg) între 0 și 1.

Această condiție este îndeplinită, în particular dacă $\varepsilon_i = (-1)^{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$. Inegalitatea (28) este deci verificată oricare ar fi șirurile A, B nenegative și necrescătoare (indiferent dacă n este par sau impar). Această inegalitate este mai precisă decît (23).

BIBLIOGRAFIE

1. J. Aczél „Nokotorie obšcie metodí v teorii funkcionálníh uravnení adnoi peremenoí. Novíe primenénia funkcionálníh uravnení“ Uspehi Mat. Nauk, XI, 3 (69), 3—68 (1956).
2. M. Biernacki „Sur des inégalités remplies par des expressions dont les termes ont des signes alternés“ Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska. A. 7, 89—99 (1954).
3. R. Bellmann „On an inequality concerning an indefinite form“ The Amer. Math. Monthly, 63, 108—109 (1956).

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

В первой части дается новое доказательство неравенства (3) и, ацеля [1] и рассматриваются неравенства, соответствующие неравенствам гольдера и минковского. Во второй части рассматриваются некоторые обобщения неравенства (20) чебышева. В частности, даются необходимые и достаточные условия, чтобы неравенства (27) и (29) были выполнены для неубывающих, соответственно неотрицательных и невозрастающих последовательностей.

SUR QUELQUES INÉGALITÉS

Dans la première partie, on donne une nouvelle démonstration de l'inégalité (3) de J. Aczél [1] et l'on considère les inégalités correspondantes relatives aux inégalités de Hölder et Minkowski. Dans la seconde partie, on examine quelques généralisations de l'inégalité (20) de P. L. Tchebycheff. En particulier, on donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que les inégalités (27) et (29) soient vérifiées et les suites (2) sont non-décroissantes respectivement non-négatives et non-croissantes.