

MATHEMATICA

NOMOGRAMME, GEWEBE UND QUASIGRUPPEN

von

J. ACZÉL, G. PICKERT, F. RADÓ
Debrecen Tübingen Cluj

§ 1.

Die Geometrie der Gewebe kann als theoretischer Hintergrund der Nomographie (insbes. der Netztafeln, und zwar solcher Netztafeln, mit denen auch Fluchtentafeln äquivalent sind) betrachtet werden. Eine weitere Abstrahierung der Gewebe auf abstrakte algebraische Strukturen, insbes. Quasigruppen wurde in mehreren, im wesentlichen äquivalenten Weisen unternommen (s. z. B. [2], [3], [4], [8], [11]).

Unsere folgenden Bemerkungen skizzieren auch einen solchen Weg. Da wir hier die Algebraisierung als „Entgeometrisierung“ auffassen, wollen wir unser Ziel ohne geometrische Hilfsmittel erreichen, insbes. ohne eine „Streckenaddition“, wie sie in allen oben zitierten Arbeiten benutzt wird. Dagegen wollen wir dem nomographischen Ursprung näher bleiben. Deshalb gehen wir nicht gleich bei der Definition in § 1 von Quasigruppen auf Loops über, und so wird z.B. die Definition der regulären Gewebe der Nomogramme mit paralleler Anamorphose ähnlicher. Die Vermeidung der Loops in den meisten Definitionen bringt die kräftigere Verwendung des Isotopiebegriffs mit sich, was vielleicht auch dem Wesen der Theorie der Quasigruppen näher liegt. In den §§ 2—4 bringen wir neuformulierte Beweise verschiedener Schliessungssätze. Allerdings werden in diesen Beweisen schon Loops verwendet, obzwar deren Loop-Eigenschaft meist nicht ausgenützt wird. Dies hängt damit zusammen, dass auch unser Verfahren — wie wir es in § 5 zeigen wollen, — äquivalent mit den in den oben genannten Arbeiten gegebenen ist. Dagegen wollen wir im § 6 auch über diese Arbeiten hinausführende Probleme stellen.

In der Nomographie stellt man eine Funktion von zwei Veränderlichen, deren Wert an der Stelle (x,y) wir kurz mit xy bezeichnen wollen (ohne dass darunter unbedingt das Produkt der Zahlen x, y zu verstehen ist), durch eine Netztafel z. B. so dar, dass die Koordinatenlinien ($x = \text{const.}$ bzw. $y = \text{const.}$), sowie die Niveaukurven ($z = xy = \text{const.}$) gezeichnet und mit den

bezüglichen x, y, z Knoten versehen werden, und der zu (x_0, y_0) gehörige Funktionswert wird durch Ablesen der Kote der durch den Schnittpunkt der Koordinatenlinien $x = x_0, y = y_0$ gehenden z -Kurve graphisch bestimmt (Figur 1). Wenn man auf der X - und Y -Achse die Skalen so transformieren kann, dass die Niveaueurven in lauter Geraden übergehen, so nennen wir dies eine Anamorphose, und falls sogar eine Übertragung in lauter parallele Geraden (Figur 2) möglich ist, so sprechen wir von einer *parallelen Anamor-*

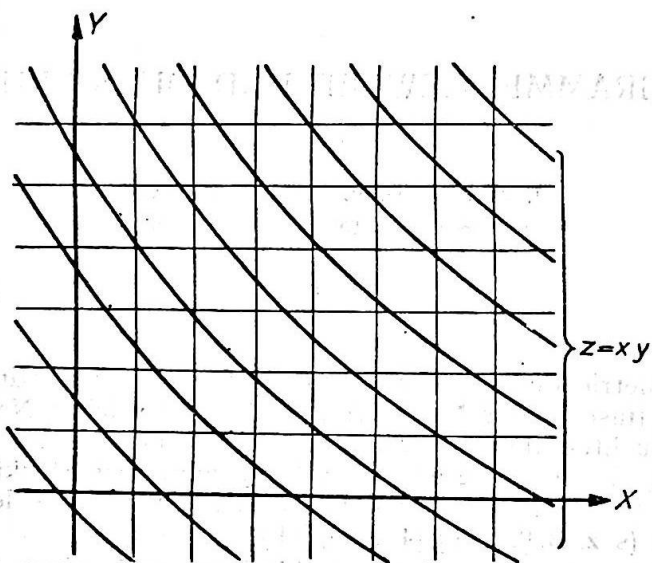


Fig. 1

phose. In diesen Fällen lässt sich die Funktion auch durch das duale Gebilde der Fluchtentafeln mit drei Kurven bzw. drei Geraden darstellen. Diese Kurven sind mit Skalen versehen und die funktionale Verbindung der Werte wird durch Kollinearität der bezüglichen Skalenpunkte dargestellt. Funktionen $(x, y) \rightarrow xy$, deren Netztafeln eine parallele Anamorphose zulassen (die also auch durch Fluchtentafeln mit drei Geraden dargestellt werden können), lassen sich immer in der Form

$$xy = f^{-1}[g(x) + h(y)]$$

schreiben wo f, g, h stetige und streng monotone Funktionen sind ([6]).

Ein (3-) *Gewebe* besteht nun aus drei Kurvenscharen, so dass durch jeden Punkt eines Gebietes genau eine Kurve jeder Schar geht, während zwei Kurven zweier verschiedener Scharen einander in genau einem Punkte schneiden (andere Definitionen wie z. B. in [2], verlangen nur höchstens einen Schnittpunkt). Ein Gewebe nennt man *regulär* falls es ein topologisches Abbild von drei Parallelen-Büscheln von Geraden ist. Da zwei der drei Kurvenscharen immer in parallele – sogar in parallele und auf einander senkrechte – topologisch übergeführt werden können, können diese als Koor-

dinatenlinien eines cartesischen Koordinatensystems und die Kurven der dritten Schar als Niveaueurven einer Funktion (deren Wert an der Stelle (x, y) wir wieder mit xy bezeichnen wollen) betrachtet werden; wir haben also wieder ein Gebilde wie in Figur 1. Da ein reguläres Gewebe offenbar auch mit drei Büscheln von Geraden parallel zu den Seiten eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks homöomorph ist, und bei solchen (s. Figur 2) die dritte Schar aus Niveaulinien der Funktion

$$(u, v) \rightarrow u + v$$

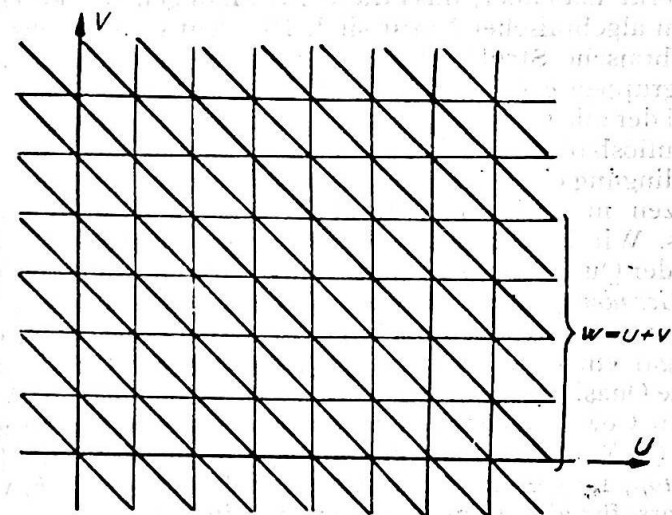


Fig. 2

besteht, gilt in diesem Fall

$$(1) \quad f(xy) = g(x) + h(y),$$

wo f, g und h wieder stetige und streng monotone Funktionen sind.

In der Geometrie der Gewebe gibt man verschiedene geometrische Bedingungen für die Regularität eines Gewebes. Dies sind gewisse *Schliessungssätze*. Wir nennen hier drei solche. Die *Thomsen-Bedingung* besagt (Figur 3) in der Darstellung von Figur 1: Sind x_1, x_2, x_3 drei beliebige x -Werte und y_1, y_2, y_3 drei beliebige y -Werte und liegen die Punkte (x_1, y_2) und (x_2, y_1) auf derselben z -Kurve (Niveaueurve) und eben so (x_1, y_3) und (x_3, y_1) auf einer Niveaueurve, so liegen auch die Punkte (x_2, y_3) und (x_3, y_2) auf derselben z -Kurve. Da zu Punkten derselben Niveaueurve dieselben Funktionswerte gehören, und da wir den Funktionswert an der Stelle (x, y) mit xy bezeichneten, können wir die Thomsen-Bedingung auch so schreiben:

$$(2) \quad (x_1 y_2 = x_2 y_1 \ \& \ x_1 y_3 = x_3 y_1) \Rightarrow x_2 y_3 = x_3 y_2$$

Ähnlich lässt sich die *Reidemeister-Bedingung* (Figur 4) so schreiben:

$$(3) \quad (x_1 y_2 = x_2 y_1 \ \& \ x_1 y_4 = x_2 y_3 \ \& \ x_3 y_2 = x_4 y_1) \Rightarrow x_3 y_4 = x_4 y_3$$

und die Sechseckbedingung (Figur 5) so:

$$(4) \quad (x_1 y_2 = x_2 y_1 \ \& \ x_1 y_3 = x_2 y_2 = x_3 y_1) \Rightarrow x_2 y_3 = x_3 y_2.$$

Man sieht „geometrisch“ leicht ein (vgl. z. B. [2], [11]), dass aus der Thomsen-Bedingung die Reidemeister-Bedingung folgt, während die letztere durch die Spezialisierung $x_2 = x_3, y_2 = y_3$ in die Sechseckbedingung übergeht. Dennoch ist jede dieser Bedingungen mit der Regularität des Gewebes äquivalent, (s. z. B. [2], [9]).

Nun bemerkt man aber, dass diese Bedingungen in der Darstellungen (2), (3), (4) rein algebraischer Natur sind. Dies legt es nahe, die Gewebe auf abstrakte algebraische Strukturen zu verallgemeinern. Insbesondere kann das auf Quasigruppen geschehen, d. h. auf Mengen Q mit einer Verknüpfung $(x, y) \rightarrow xy$, bei der alle Gleichungen der Gestalt $xb = c$ oder $ax = d$ bezüglich x eindeutig auflösbar sind. Die Mengen von Paaren (x, y) mit $x, y \in Q$, die durch eine Bedingung einer der drei Arten $x = c, y = c, xy = c$ beschrieben werden, besitzen nun die oben angegebenen Eigenschaften der Kurven eines Gewebes. Wir bezeichnen die Menge der angegebenen Paarmengen daher als das der Quasigruppe Q zugeordnete Gewebe und die Paarmengen selber als die Geraden (oder, auch wohl: Linien) des Gewebes. Wir werden Q auch als die dem Gewebe zugeordnete Quasigruppe bezeichnen. Gelegentlich werden wir sogar ein Gewebe mit seiner zugeordneten Quasigruppe identifizieren, also die Quasigruppe selbst als Gewebe bezeichnen. — Was wir unter einem regulären Gewebe verstehen sollen, wird durch (1) nahe gelegt. Zwei Quasigruppen Q, R mit den Verknüpfungen $(x, y) \rightarrow xy$ bzw. $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ nennt man isotop, falls es drei umkehrbare Abbildungen f, g, h , von Q auf R gibt derart, dass für alle Elementenpaare x, y in Q

$$(5) \quad f(xy) = g(x) \cdot h(y)$$

gilt. — Ein Gewebe nennen wir regulär, falls die zugeordnete Quasigruppe mit einer Gruppe, stark regulär, falls sie mit einer abelschen Gruppe isotop ist. Im § 4 werden wir auch die sogen. Halb-Regularität definieren. — Im folgenden wollen wir zeigen, dass die drei obengenannten Schliessungsbedingungen auf Quasigruppen eben mit diesen verschiedenen Stufen der Regularität äquivalent sind.

§ 2.

Wir beweisen erstens, dass ein Gewebe dann und nur dann stark regulär ist, falls die Thomsen-Bedingung erfüllt ist (vgl. [1], [9]).

Es gelte zuerst (2). Werden dann

$$x_1 = u \quad \text{und} \quad y_1 = v$$

beliebig gewählt, so gibt es wegen der Quasigruppen-Eigenschaften bei beliebigen x, y solche x_2, y_2, x_3, y_3 , dass

$$(6) \quad x = uy_2 = x_2 v, \quad y = uy_3 = x_3 v.$$

gelte. Also sind die Voraussetzungen in (2) erfüllt und deshalb folgt

$$(7) \quad x_2 y_3 = x_3 y_2.$$

Jetzt definieren wir durch

$$(8) \quad sv \cdot ut = st$$

auf derselben Menge Q eine neue zur ursprünglichen isotope Quasigruppe (mit der Verknüpfung $(x, y) \rightarrow x \cdot y$). Wegen der eindeutigen Lösbarkeit von

$$(9) \quad sv = x, \quad ut = y$$

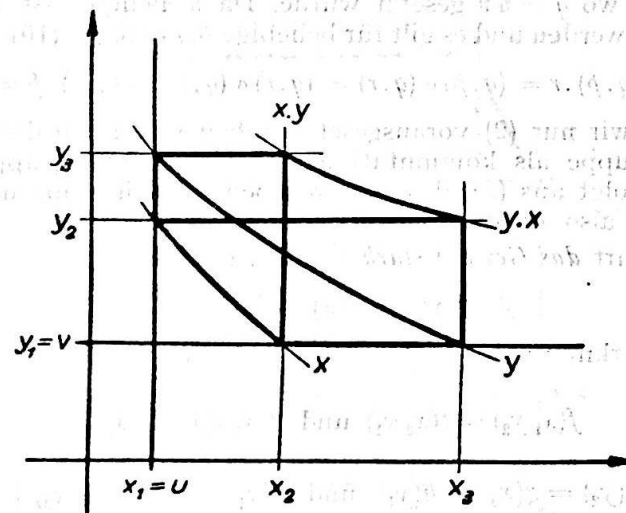


Fig. 3

nach s, t bestimmt nämlich (8) bei fixen u, v , tatsächlich eindeutig die Verknüpfung $(x, y) \rightarrow x \cdot y$, mit der Q wieder eine Quasigruppe bildet, während (8) selbst die Isotopie (vgl. (5)) der beiden Quasigruppen sichert. Die mit einer durch (8) definierten Verknüpfung versehenen Quasigruppen bezeichnen wir als die *L-H-Isotope* (vgl. [8], S. 48) der Quasigruppe mit der Verknüpfung $(x, y) \rightarrow xy$ (der Name wird sich in § 4 erklären). Diese sind für alle unsere Beweise wichtig.

Wir zeigen, dass aus der Thomsen-Bedingung die Kommutativität aller *L-H-Isotope* folgt (vgl. Figur 3):

$$(10) \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Tatsächlich wird aus (6) und (8)

$$x \cdot y = x_2 v \cdot uy_3 = x_2 y_3, \quad y \cdot x = x_3 v \cdot uy_2 = x_3 y_2$$

und wegen (7) gilt so die behauptete Kommutativität von $(x, y) \rightarrow x \cdot y$.

Aus der Kommutativität aller *L-H-Isotope* einer Quasigruppe (sogar aus der Kommutativität aller *L-H-Isotope* mit festem v) folgt aber auch ihre

Assoziativität (vgl. [8]). Ist nämlich nicht nur das durch (8) definierte, sondern auch das L-H-Isotop mit der durch

$$(11) \quad sv \circ wt = st$$

gegebenen Verknüpfung $(x, y) \rightarrow x \circ y$ kommutativ, also

$$(12) \quad a \circ b = b \circ a,$$

so kann mit (9), (8) und (11)

$$(13) \quad x \cdot y = sv \cdot ut = st = sv \circ wt = x \circ (wv \cdot ut) = x \circ (q \cdot y)$$

erhalten werden, wo $q = wv$ gesetzt wurde. Da w beliebig ist, kann auch q beliebig gewählt werden und es gilt für beliebige p, q, r wegen (10), (13) und (12)

$$(p \cdot q) \cdot r = (q \cdot p) \cdot r = (q \cdot p) \circ (q \cdot r) = (q \cdot r) \circ (q \cdot p) = (q \cdot r) \cdot p = p \cdot (q \cdot r)$$

w. z. b. w. Da wir nur (2) vorausgesetzt haben und da so die L-H-Isotope unserer Quasigruppe als kommutative assoziative Quasigruppen abelsche Gruppen sind, folgt aus (2), dass die gegebene Quasigruppe mit abelschen Gruppen isotop, also *das Gewebe stark regulär* ist.

Ist umgekehrt *das Gewebe stark regulär*, gilt also

$$f(xy) = g(x) + h(y),$$

wo Q mit der Verknüpfung $(x, y) \rightarrow x + y$ eine abelsche Gruppe bildet, so ist (2) erfüllt. Aus

$$f(x_1 y_2) = f(x_2 y_1) \text{ und } f(x_1 y_3) = f(x_3 y_1)$$

d.h.

$$g(x_1) + h(y_2) = g(x_2) + h(y_1) \text{ und } g(x_1) + h(y_3) = g(x_3) + h(y_1)$$

folgt nämlich

$$g(x_2) = g(x_1) + h(y_2) - h(y_1), \quad h(y_3) = -g(x_1) + g(x_3) + h(y_1)$$

und hieraus folgt durch die Addition wegen der Kommutativität tatsächlich

$$g(x_2) + h(y_3) = g(x_3) + h(y_2)$$

d.h.

$$f(x_2 y_3) = f(x_3 y_2)$$

also ist (2) erfüllt, w.z.b.w.

Wir haben damit auch bewiesen: ist (2) für ein y_1 und für alle x_1, x_2, y_2, x_3, y_3 , erfüllt, so ist (2) auch für alle y_1 erfüllt.

§ 3.

Wir beweisen zweitens, dass ein Gewebe dann und nur dann regulär ist falls die Reidemeister-Bedingung erfüllt ist (vgl. [9]).

Es gelte vorerst (3). Es werden diesmal

$$x_1 = u \text{ und } y_1 = v$$

fixiert. Es gibt bei beliebigen x, y, z solche x_2, x_3, y_2, y_3 , dass

$$(14) \quad x = x_3 v, \quad y = x_2 v = u y_2, \quad z = u y_3$$

und solche x_4, y_4 , dass

$$(15) \quad x_3 y_2 = x_4 v, \quad x_2 y_3 = u y_4$$

gelte. Also sind die Voraussetzungen in (3) erfüllt und deshalb folgt

$$(16) \quad x_3 y_4 = x_4 y_3.$$

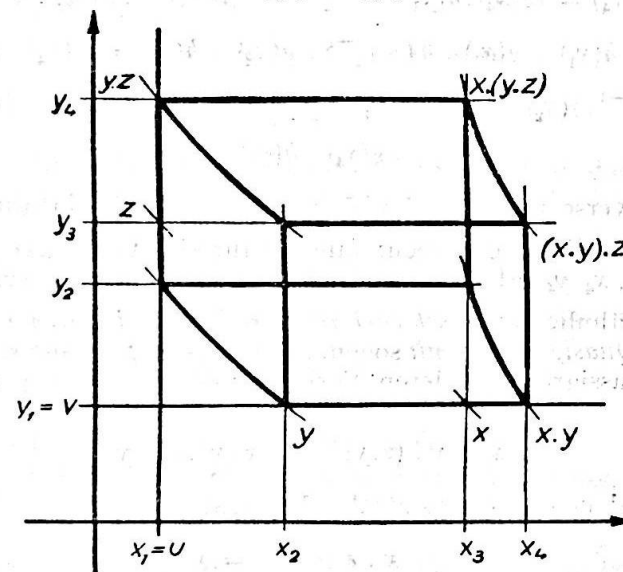


Fig. 4

Wir beweisen, dass die durch (8) definierten L-H-Isotope assoziativ, also Gruppen sind (vgl. Figur 4). Wir erhalten aus (14) und (15)

$$x \cdot y = x_3 v \cdot u y_2 = x_3 y_2 = x_4 v, \quad y \cdot z = x_2 v \cdot u y_3 = x_2 y_3 = u y_4$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x_4 v \cdot u y_3 = x_4 y_3, \quad x \cdot (y \cdot z) = x_3 v \cdot u y_4 = x_3 y_4$$

und wegen (16) gilt die behauptete Assoziativität von $(x, y) \rightarrow x \cdot y$. Also folgt aus (3) dass die gegebene Quasigruppe mit einer Gruppe isotop ist, d.h. dass das Gewebe regulär ist. — Auch hieraus kann übrigens abgeleitet werden, dass aus der Thomsen-Bedingung die starke Regularität des Gewebes folgt (vgl. [11]). Da nämlich aus der Thomsen-Bedingung (2) die Reidemeistersche (3) und aus dieser die Isotopie der Quasigruppe mit einer Gruppe folgt und das Einsetzen des letzteren Resultes in (2) die Kommutativität dieser Gruppe ergibt, folgt aus (2) tatsächlich die starke Regularität des Gewebes.

Ist umgekehrt *das Gewebe regulär*, gilt also

$$f(xy) = g(x) \cdot h(y),$$

wobei $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ assoziativ ist, so gilt (3). Aus

$$g(x_1) \cdot h(y_2) = g(x_2) \cdot h(y_1); \quad g(x_1) \cdot h(y_4) = g(x_2) \cdot h(y_3)$$

und

$$g(x_3) \cdot h(y_2) = g(x_4) \cdot h(y_1)$$

folgt nämlich wegen der Gruppeneigenschaften tatsächlich immer

$$g(x_3) \cdot h(y_4) = [g(x_4) \cdot h(y_1) \cdot h(y_2)^{-1}] \cdot [g(x_1)^{-1} \cdot g(x_2) \cdot h(y_3)] =$$

$$= g(x_4) \cdot h(y_1) \cdot [g(x_1) \cdot h(y_2)]^{-1} \cdot g(x_2) \cdot h(y_3) = g(x_4) \cdot h(y_1) \cdot$$

$$[g(x_2) \cdot h(y_1)]^{-1} \cdot g(x_2) \cdot h(y_3) = g(x_4) \cdot h(y_1) \cdot h(y_1)^{-1} \cdot g(x_2)^{-1} \cdot g(x_2) \cdot h(y_3) =$$

$$= g(x_4) \cdot h(y_3)$$

(u^{-1} ist das Inverse von u in der Gruppe), also ist (3) erfüllt, w. z. b. w.

Wir haben zugleich bewiesen: falls (3) für ein Wertepaar x_1, y_1 und für alle $x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4$ erfüllt ist, so ist (3) auch für alle x_1, y_1 erfüllt.

Man kann ähnlich auch schwach reguläre Gewebe dadurch definieren, dass die bezüglichen Quasigruppen mit sogen. Moufang-Loops isotop sind: Moufang-Loops sind Quasigruppen, deren Verknüpfung $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ für alle x, y, z das Gesetz

$$x \cdot [y \cdot (z \cdot y)] = [(x \cdot y) \cdot z] \cdot y$$

erfüllt und in denen es ein neutrales Element e mit

$$(17) \quad x \cdot e = e \cdot x = x$$

gibt. Ein Gewebe ist genau dann schwach-regulär, wenn es die aus (3) durch die Zusatzvoraussetzung $x_2 = x_3$ bzw. $y_2 = y_3$ bzw. $x_2 y_3 = x_3 y_2$ entstehenden drei Bolschen Bedingungen erfüllt (vgl. [3]).

§ 4.

Um die mit der Sechseckbedingung äquivalente Abschwächung der Regularität zu definieren werden wir vorerst die Regularitätsdefinitionen und die Ergebnisse der §§ 2—3 etwas umformulieren. Wir betrachten etwas näher die durch (8) definierten L-H-Isotope. Mit (5) verglichen sehen wir, dass hier $f(x) = x$ ist. Solche Isotope nennen wir *Hauptisotope*. (Besteht zwischen zwei Quasigruppen Hauptisotopie, so sind sie notwendigerweise auf derselben Menge definiert). Andererseits bildet die Menge Q mit der durch (8) definierten Verknüpfung $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ eine Loop, d.h. eine Quasigruppe mit neutralem Element e (d.h. es ist (17) erfüllt). — Tatsächlich ist $e = uv$ ein Einheitselement. Setzt man nämlich in (8) $s = u$ bzw. $t = v$, so erhält man

$$uv \cdot ut = ut \text{ bzw. } sv \cdot uv = sv,$$

was mit (17) äquivalent ist. Also definiert (8) Loop-Haupt-Isotope und deshalb nannten wir diese kurz L-H-Isotope. Es gilt sogar, dass alle Hauptisotope, die Loops sind, durch (8) bestimmt werden. Es sei nämlich

$$(18) \quad st = g(s) \cdot h(t),$$

mit umkehrbaren Abbildungen g, h von Q auf sich und es gelte (17). Wir setzen in (18) für s bzw. t die wegen der Umkehrbarkeit der Abbildungen g und h existierenden Elemente u bzw. v mit

$$g(u) = e \text{ bzw. } h(v) = e$$

ein und erhalten

$$h(t) = ut \text{ bzw. } g(s) = sv,$$

so dass (18) tatsächlich in

$$st = sv \cdot ut$$

d.h. in (8) übergeht. — Andererseits sieht man unmittelbar, dass jedes Isotop einer Quasigruppe zu einem Hauptisotop isomorph ist: (5) lässt sich mit der durch

$$x \circ y = gf^{-1}(x) \cdot hf^{-1}(y)$$

definierten Verknüpfung $(x, y) \rightarrow x \circ y$ (die ein Hauptisotop der mit der Verknüpfung $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ gegebenen Quasigruppe liefert) als

$$f(xy) = g(x) \cdot h(y) = gf^{-1}f(x) \cdot hf^{-1}f(y) = f(x) \circ f(y)$$

schreiben (f^{-1} ist die inverse Abbildung zu f).

Nun sind aber die Existenz eines neutralen Elements, Assoziativität und Kommutativität isomorphieinvariante Eigenschaften. Sind also die L-H-Isotope einer Quasigruppe Gruppen bzw. abelsche Gruppen, so sind das auch alle mit der Quasigruppe isotope Loops. Denn alle Loop-Isotope sind mit Loop-Haupt-Isotopen isomorph, also ebenfalls Gruppen bzw. abelsche Gruppen. So kann man die regulären bzw. stark regulären Quasigruppen auch dadurch definieren, dass alle Loop-Isotope der bezüglichen Quasigruppe Gruppen bzw. abelsche Gruppen sind. Ähnlich lässt sich auch die am Ende des § 3 definierte schwache Regularität umformulieren.

Nun nennen wir ein Gewebe halb-regulär, falls alle Loop-Isotopen der bezüglichen Quasigruppe schwach potenzassoziativ sind. Hier verstehen wir unter schwacher Potenzassoziativität das Bestehen von

$$(19) \quad (x \cdot x) \cdot x = x \cdot (x \cdot x)$$

für jedes Element x . Später werden wir noch die (stärkere) Potenzassoziativität definieren.

Wir beweisen, dass ein Gewebe dann und nur dann halb-regulär ist, falls die Sechseckbedingung erfüllt ist. (vgl. [7], [8]).

Da auch das Bestehen von (19) isomorphie-invariant ist, genügt es wieder (19) nur für die durch (8) definierten L-H-Isotope zu betrachten. Dies ist aber mit (4) äquivalent (vgl. Figur 5). Denn gilt (4), werden

$$x_1 = u, \quad y_1 = v$$

beliebig gewählt und ist x gegeben, so gibt es x_2, y_2 derart, dass

$$(20) \quad x = uy_2 = x_2v$$

und x_3, y_3 derart, dass

$$(21) \quad x \cdot x = x_2v \cdot uy_2 = x_2y_2 = uy_3 = x_3v$$

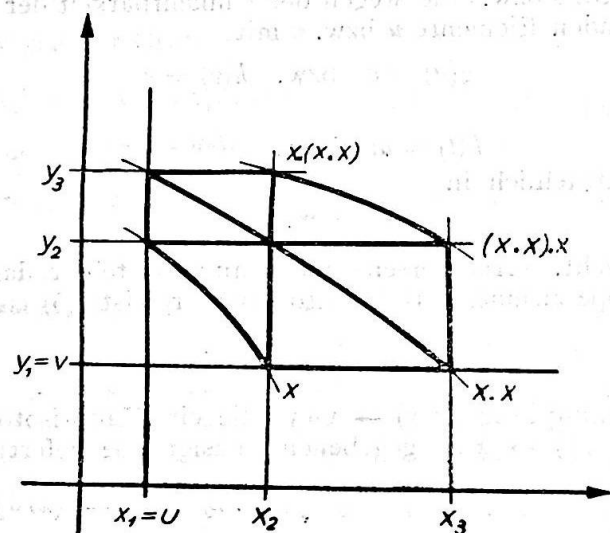


Fig. 5

gelte. Also sind die Voraussetzungen in (4) erfüllt und deshalb folgt

$$(22) \quad x_2y_3 = x_3y_2.$$

Nun folgt aber aus (20) und (21)

$$(23) \quad (x \cdot x) \cdot x = x_3v \cdot uy_2 = x_3y_2, \quad x \cdot (x \cdot x) = x_2v \cdot uy_3 = x_2y_3$$

und daher (19) aus (22). So ist (19) Konsequenz von (4). Umgekehrt, folgt auch (4) aus (19). Für $u = x_1, v = y_1$ und $x_1y_2 = x_2y_1, x_1y_3 = x_3y_1$ benützen wir (20) als Definition von x . (21) gilt wegen (8) bei $x_2y_2 = x_1y_3 = x_3y_1$. So wird die Konklusion von (4) bei Bestehen der Prämissen von (4) laut (23) eine Konsequenz von (19) sein, w.z.b.w.

Wir werden jetzt zeigen, dass aus (4) auch die Potenzassoziativität des durch (8) definierten L-H-Isotops (und damit jeder mit der ursprünglichen Quasigruppe isomorphen Loop) folgt:

$$(24) \quad x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

für jedes ganze m, n (vgl. [7], [8]). Hier werden die Definitionen

$$(25) \quad x^{n+1} = x \cdot x^n \quad (n \geq 0)$$

$$(26) \quad x^0 = e \quad (= uv),$$

$$(27) \quad x^n = (x')^{-n} \quad (n < 0)$$

verwendet, wo x' das Inverse von x also das Element mit

$$x \cdot x' = e = x' \cdot x$$

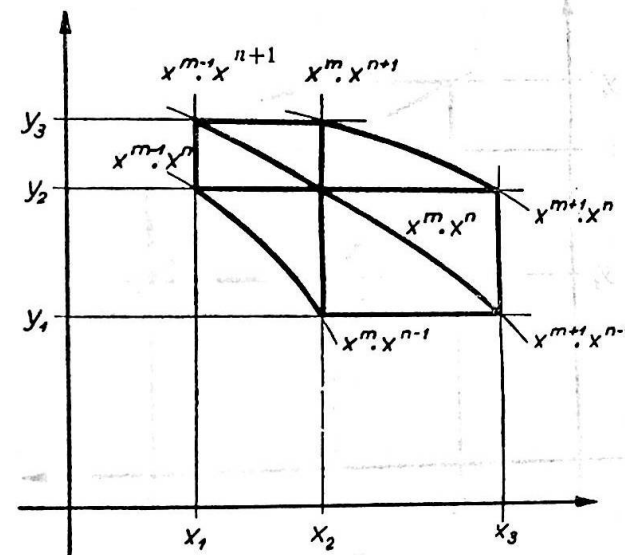


Fig. 6

ist (dessen Existenz noch nachgewiesen werden muss). Dass umgekehrt aus (24) das Bestehen von (4) folgt, ist aus den vorigen selbstverständlich, da (24) für $m = 2, n = 1$ die schwache Potenzassoziativität (19) wegen (25) als Spezialfall enthält.

Zuerst beweisen wir (24) für nicht-negative m, n . Ist $m = 0$ oder $n = 0$, so ist (24) wegen (26) und (17) trivial. Für $m = 1$ geht (24) in die Definitionsgleichung (25) über. Wir verwenden Induktion, indem wir voraussetzen, dass

$$(28) \quad x^M \cdot x^N = x^{M+N}$$

bei $M = m-1, m$ für alle (nicht-negative) N und bei $M = m+1$ für $N = n-1$ schon gültig ist, und beweisen, dass (28) dann auch für $M = m+1, N = n$ erhalten bleibt. Dazu wenden wir (4) an, indem wir $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ bei gegebenen $u, v, x^{m-1}, x^m, x^{m+1}, x^{n-1}, x^n, x^{n+1}$ durch

$$x^{m-1} = x_1v, \quad x^m = x_2v, \quad x^{m+1} = x_3v, \quad x^{n-1} = uy_1, \quad x^n = uy_2, \quad x^{n+1} = uy_3$$

definieren. Dann gelten laut (8) und der Induktionsvoraussetzungen (vgl. Figur 6)

$$x_1y_2 = x_1v \cdot uy_2 = x^{m-1} \cdot x^n = x^{m+n-1} = x^m \cdot x^{n-1} = x_2v \cdot uy_1 = x_2y_1$$

und

$$x_2 y_2 = x_2 v \cdot u y_2 = x^{-r} \cdot x^n = x^{-r+n} = x^{-r+1} \cdot x^{n-1} = x_3 v \cdot u y_1 = x_3 y_1,$$

also sind die Voraussetzungen in (30) erfüllt, und deshalb folgt

$$x_1 y_3 = x_2 y_2$$

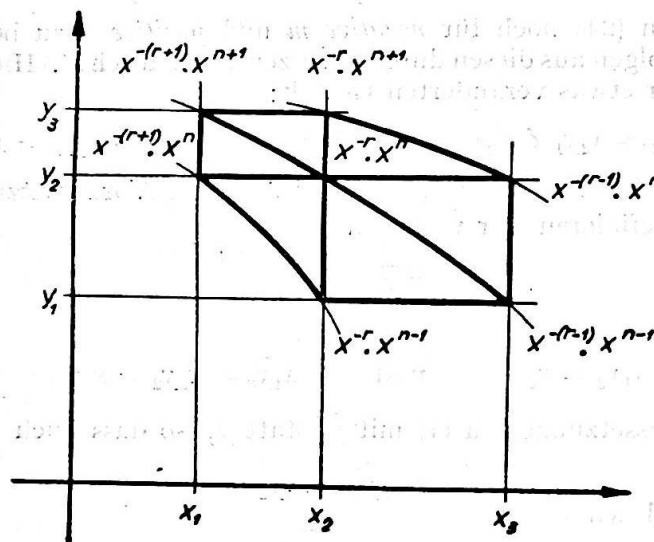


Fig. 8

und daher

$$x^{-(r+1)} \cdot x^{n+1} = x_1 v \cdot u y_3 = x_1 y_3 = x_2 y_2 = x_2 v \cdot u y_2 = x^{-r} \cdot x^n = x^{-r+n},$$

w. z. b. w. Da (32) für $R = 0, -1$ und auch für $N = 0$ wegen dem bisher Bewiesenen gilt, ist durch diesen Induktionsschluss die Potenzassoziativität (24) auch für $m < 0 < n$, also vollständig bewiesen. — Natürlich dienten die Figuren überall nur zur Veranschaulichung der Beweise und waren nicht Bestandteil von ihnen.

Wir haben zugleich bewiesen: sind alle durch (8) definierte Loops schwach potenzassoziativ (im Sinne von (19)), so sind sie auch potenzassoziativ im Sinne von (24).

Wir bemerken, dass zur Regularität die Assoziativität der durch (8) definierten L-H-Isotope für ein Paar u, v genügt, zur starken Regularität dagegen ihre Kommutativität für ein v , aber für alle u gefordert werden musste, während wir zur Halb-Regularität ihre schwache Potenzassoziativität für alle u, v brauchten.

Eine weitere Bemerkung: Der Grund dafür, dass bei gewöhnlichen Geweben in der euklidischen Ebene auch die (schwächere) Reidemeister-Bedingung und sogar die Sechseckbedingung dasselbe (nämlich das Bestehen von (1)) leistet wie die Thomsen-Bedingung, liegt daran, dass (vgl. [5],

[10]) auf einem reellen Intervall jede topologische (und als solche zu dem reellen Intervall homöomorphe) Gruppe kommutativ (und zwar isomorph zur Additionsgruppe der reellen Zahlen), ja sogar dort jede topologische potenzassoziative Loop kommutativ und assoziativ ist.

§ 5.

Wir wollen nun den Zusammenhang unserer algebraischen Gewebedefinition mit der üblichen geometrischen Gewebedefinition untersuchen und dabei auf die verschiedenen Arten, aus Geweben Quasigruppen herzustellen, eingehen. Unter einem Gewebe versteht man (in Verallgemeinerung der in § 1 wiedergegebenen Definition eines Gewebes aus reellen Kurven) eine nicht leere Menge, deren Elemente als die Punkte des Gewebes bezeichnet werden, zusammen mit einem Tripel von Teilmengen, deren Elemente als die Geraden erster, zweiter und dritter Art des Gewebes bezeichnet werden, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sein sollen: Jeder Punkt gehört genau einer Geraden jeder der drei Arten an; zwei Geraden verschiedener Art haben genau einen Punkt gemeinsam. Um ein solches Gewebe in ein Gewebe in unserm Sinn umzuwandeln, braucht man lediglich für jeden Wert $i = 1, 2, 3$ eine umkehrbare Abbildung f_i der Menge der Geraden i -ter Art in ein und dieselbe Menge Q anzugeben (die Mengen der Geraden verschiedener Arten erweisen sich als gleichmächtig), dem gemeinsamen Punkt p der Geraden G_i der i -ten Art ($i = 1, 2$) das Elementepaar $(f_1(G_1), f_2(G_2))$ zuzuordnen und

$$f_1(G_1) \circ f_2(G_2) = f_3(G_3)$$

zu setzen, wo G_3 die durch den Punkt p gehende Gerade dritter Art ist (vgl. [4]). Die Menge der Gewebepunkte ist dann umkehrbar auf die Menge der Paare $x, y \in Q$ abgebildet, die Geraden erster, zweiter bzw. dritter Art gehen in die durch Gleichungen der Art $x = c, y = c, x \circ y = c$ beschriebenen Paarmengen über, und Q wird mit der durch (33) erklärten Verknüpfung $(x, y) \rightarrow x \circ y$ zu einer Quasigruppe. Vergleich von (33) mit (5) zeigt, dass die auf diese Weise bei verschiedener Wahl der Menge Q und der Abbildungen f_i aus einem Gewebe entstehenden Quasigruppen gerade die sämtlichen Isotope einer Quasigruppe sind. In [4] wird insbesondere das folgende Verfahren angegeben um eine Loop zu erhalten. Man wählt je eine Gerade $G_i^{(0)}$ der i -ten Art ($i = 1, 2$), setzt $Q = G_1^{(0)}$, bestimmt $f_i(G_i)$ für $i = 2, 3$ als den Schnittpunkt von G_i mit $G_1^{(0)}$ und $f_1(G_1)$ als den Schnittpunkt mit $G_1^{(0)}$ derjenigen Geraden dritter Art, die durch den Schnittpunkt von G_1 und $G_2^{(0)}$ geht. Der Schnittpunkt von $G_1^{(0)}$ und $G_2^{(0)}$ ist dann das neutrale Element. An Hand von Figur 9 erkennt man leicht, dass in [3] und [11] die Loop-Verknüpfung in gleicher Weise eingeführt wird (abgesehen von der umgekehrten Faktorenreihenfolge).

Wir wollen nun das eben beschriebene Verfahren auf eine in unserm Sinn als Gewebe aufgefasste Quasigruppe Q anwenden. $G_1^{(0)}, G_2^{(0)}$ mögen die Gleichungen $x = u$ bzw. $y = v$ haben. Gemäss der umkehrbaren Abbildung $y \rightarrow (u, y)$ identifizieren wir einfachheitshalber $G_1^{(0)}$ mit Q . Um nun noch die

Abbildungen f_i zu bestimmen, bezeichnen wir die durch den Punkt (x, y) gehenden Geraden erster, zweiter und dritter Art der Kürze halber mit x, y, xy und benutzen die durch

$$(34) \quad xy = z \iff x = z/y \iff y = x/z$$

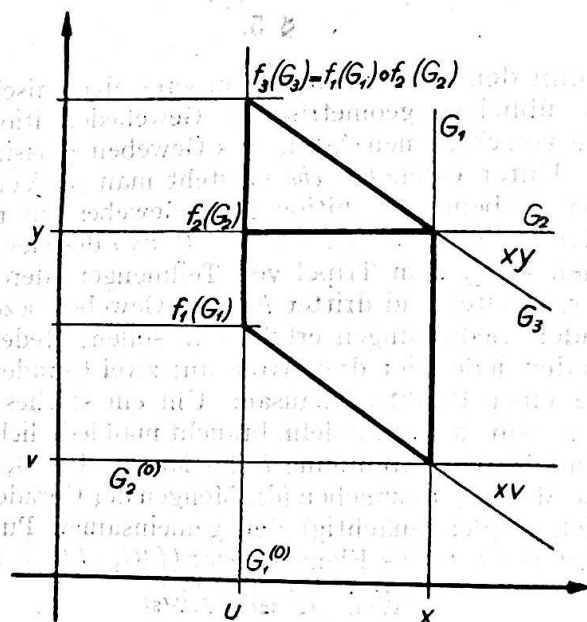


Fig. 9

erklären „Umkehroperationen“ in der Quasigruppe Q . Man bekommt dann (nach der in Figur 9 beschriebenen Konstruktion)

$$f_1(x) = u \setminus xv, \quad f_2(y) = y, \quad f_3(xy) = u \setminus xy,$$

so dass (33) zu

$$(35) \quad (u \setminus xv) \circ y = u \setminus xy$$

wird. Man überprüft leicht, dass wirklich v das neutrale Element ist, wie es nach einer weiter oben gemachten Bemerkung sein muss. Aus (8) und (35) wird nun mit $x' = xv, y' = uy$

$$(u \setminus x') \circ (u \setminus y') = u \setminus (x' \cdot y').$$

Das heisst aber: $z \rightarrow u \setminus z$ ist ein Isomorphismus des in (8) erklärten L-H-Isotops auf das in (35) erklärte Isotop. Wir bekommen also bis auf Isomorphie gerade die sämtlichen L-H-Isotope, da ja die u, v beliebig gewählt werden können. — Dies erklärt, warum wir in den Beweisen eben die durch (8) definierten Loops brauchten.

Man kann die Figuren 3–5, 7 auch von diesem Standpunkt aus untersuchen und in ihnen die „Streckenadditionen“ der Figur 9 einzeichnen.

Nicht ganz so einfach ist der Zusammenhang mit der in [8] (und im Wesentlichen auch in [2]) benutzten Loop-Konstruktion: Wieder wird eine Gerade G erster Art als Menge der Loopelemente und ein beliebiger Punkt o darauf als neutrales Element genommen; das Verknüpfungsergebnis $x+y$ der Punkte $x, y \in G$ entsteht, indem man die Gerade dritter Art durch o mit

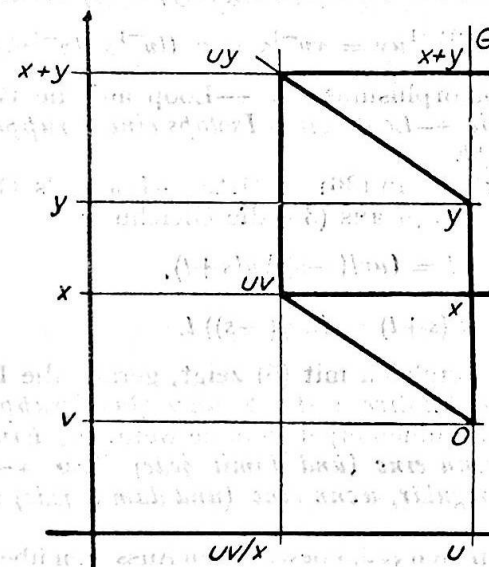


Fig. 10

der Geraden zweiter Art durch x schneidet, die Gerade erster Art durch diesen Schnittpunkt mit der Geraden dritter Art durch y zum Schnitt bringt und schliesslich die Gerade zweiter Art durch diesen Schnittpunkt mit G schneidet (Figur 10). Offenbar geht diese Konstruktion aus der in Figur 9 beschriebenen durch Vertauschen der zweiten mit der dritten Geradenart hervor. Bei ihrer Anwendung auf unsere als Gewebe aufgefasste Quasigruppe Q wählen wir (u, v) als o und identifizieren G gemäss der umkehrbaren Abbildung $z \rightarrow (u, z)$ mit Q . Mittels (34) ergibt sich dann (Figur 10):

$$(36) \quad x + y = (uv/x) \setminus uy.$$

Zu jedem Paar (u, v) entsteht so aus Q eine Loop mit der durch (36) erklärten Verknüpfung $(x, y) \rightarrow x + y$ und dem neutralen Element $v (= o)$. Diese Loops seien im folgenden als die $+-$ Loops von Q bezeichnet. Die Menge Q bildet nun mit der Verknüpfung $(x, y) \rightarrow x \setminus y$ wieder eine Quasigruppe Q' . Dafür gilt: Die $+-$ Loops von Q sind genau die L-H-Isotope von Q' . — Denn setzt man in (36) $uv/x = s, uy = t$, so ergibt sich

$$(s \setminus uv) + (u \setminus t) = s \setminus t,$$

und Vergleich mit (8) zeigt sofort die Richtigkeit der Behauptung.

Da die Isotopie von Q_1, Q_2 diejenige von Q'_1, Q'_2 nach sich zieht (wie aus (5) und (34) sofort folgt), haben isotope Quasigruppen wegen der Transitivität der Isotopie nach dem eben bewiesenen Satz dieselbe Menge von $+-$ Loops. Um die $+-$ Loops einer regulären Quasigruppe (also einer solchen, die im Sinne vom § 1 als Gewebe regulär ist) zu bestimmen, darf man daher in (36) von einer Gruppe Q (mit der Verknüpfung $(x, y) \rightarrow xy$) ausgehen und erhält

$$x + y = (uvx^{-1})^{-1}uy = xv^{-1}y = v((v^{-1}x)(v^{-1}y)).$$

Also ist $x \rightarrow v^{-1}x$ ein Isomorphismus der $+-$ Loop auf die Gruppe Q . Wir haben daher den Satz: *Die $+-$ Loops eines Isotops einer Gruppe sind sämtlich zu dieser Gruppe isomorph.*

Setzt man umgekehrt die in (36) erklärte $+-$ Loop als Gruppe voraus, so wird mit $x = -s, y = s+t$ aus (36) die Gleichung

$$t = (uv/(-s)) \setminus u(s+t),$$

also

$$u(s+t) = (uv/(-s)) t.$$

Das besagt aber, wie ein Vergleich mit (5) zeigt, gerade die Isotopie von Q mit der $+-$ Loop: *Eine assoziative $+-$ Loop einer Quasigruppe ist zu dieser isotop.* Die beiden Sätze zusammen ergeben ohne weiteres: *Eine Quasigruppe ist genau dann regulär, wenn eine (und damit jede) ihrer $+-$ Loops Gruppe ist, und genau dann stark regulär, wenn eine (und damit jede) ihrer $+-$ Loops abelsche Gruppe ist.*

Damit lassen sich die in den §§ 2, 3 bewiesenen Aussagen über die Thomsen- und Reidemeister-Bedingungen auch sofort aus den entsprechenden Aussagen für die in [8] benutzte Algebraisierung gewinnen. Für die Ergebnisse von § 4 ist ein ähnliches einfaches Übertragungsverfahren nicht bekannt, so dass es sich hier um wirklich neue Aussagen handelt. Da die Sechseckbedingung bei beiden Gewebe-Algebraisierungen die Potenzassoziativität aller Loop-Isotope besagt, gilt natürlich nun der Satz: *Die L-H-Isotope einer Quasigruppe Q sind genau dann sämtlich potenzassoziativ, wenn dies auch für die sämtlichen L-H-Isotopen der Quasigruppe Q' gilt.*

Allerdings folgen diese Übertragungssätze auch daraus, dass die Schließungsbedingungen (2), (3), und (4) sich von Q auf Q' vererben, was man leicht nachrechnet (die Folgerungen gehen ähnlich wie von (4) auf (30)).

Es sei zum Schluss noch die Frage untersucht, wann eine (und damit jede) $+-$ Loop einer Quasigruppe Q zu dieser isotop ist. Da die $+-$ Loops die L-H-Isotope von Q' sind, trifft das genau dann zu, wenn Q und Q' isotop sind. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür gibt der Satz: *Die Quasigruppe Q (mit der Verknüpfung $(x, y) \rightarrow xy$) ist genau dann isotop zur Quasigruppe Q' (mit der Verknüpfung $(x, y) \rightarrow x \setminus y$), falls es ein Isotop $\bar{Q}$ (mit der Verknüpfung $(x, y) \rightarrow x \circ y$) von Q gibt, das der folgenden „Quasilinksinversbedingung“ (QLI) genügt: Es gibt umkehrbare Abbildungen s, t von $\bar{Q}$ auf sich mit*

$$(37) \quad t(y) = s(x) \circ (x \circ y)$$

für alle $x, y \in \bar{Q}$.

Zum Beweis denkt man sich in $\bar{Q}$ die zu $\setminus$ entsprechende „Umkehroperation“ eingeführt und mit dieser die Quasigruppe $\bar{Q}'$ gebildet. Dann besagt QLI gerade die Hauptisotopie von $\bar{Q}$ und $\bar{Q}'$. Da die Isotopie von Q und $\bar{Q}$ die von Q' und $\bar{Q}'$ nach sich zieht, ergibt sich daher aus QLI die Isotopie von Q und Q' . Sind umgekehrt Q, Q' isotop, so besagt das nach (5) die Existenz von umkehrbaren Abbildungen f, g, h der Menge Q auf sich mit

$$f(xy) = g(x) \setminus h(y),$$

also

$$g(x) f(xy) = h(y) \quad \text{für alle } x, y \in Q.$$

Definiert man nun das Isotop $\bar{Q}$ von Q mit der Verknüpfung $(x, y) \rightarrow x \circ y$ durch

$$x \circ y = xf(y) \quad \text{für alle } x, y \in Q,$$

so ergibt sich mit $s = g, t = hf$ die Gleichung

$$s(x) \circ (x \circ y) = g(x) f(xf(y)) = h(f(y)) = t(y),$$

also gerade (37).

Hat $\bar{Q}$ ein linksneutrales Element e , so besagt QLI übrigens einfach die Existenz einer umkehrbaren Abbildung s von $\bar{Q}$ auf sich mit

$$(38) \quad s(x) \circ (x \circ y) = s(e) \circ y \quad \text{für alle } x, y \in \bar{Q};$$

denn aus (37) mit $x = e$ ergibt sich $t(y) = s(e) \circ y$. Umgekehrt folgt aus der Verschärfung (38) von (37), dass e linksneutrales Element sein muss:

$$s(e) \circ (e \circ y) = s(e) \circ y,$$

also

$$e \circ y = y \quad \text{für alle } y \in \bar{Q}.$$

Ist e sogar neutrales Element, also $\bar{Q}$ eine Loop, so besagt QLI die Existenz eines Elementes a mit

$$z \circ (x \circ y) = (z \circ x) \circ y, \quad \text{wenn } z \circ x = a,$$

also eine Abschwächung der Assoziativität, die im Fall $a = e$ in die Linksinversbedingung (in [8] als Linkskürzungsregel bezeichnet) übergeht. Denn definiert man die Abbildung s durch

$$(39) \quad s(x) \circ x = a,$$

so geht die angegebene Abschwächung der Assoziativität in (38) über; umgekehrt aber liefert (38) mit $s(e) = a$ und $y = e$ die Gleichung (39), so dass mit $s(x) = z$, also $z \circ x = a$, (38) zu

$$z \circ (x \circ y) = (z \circ x) \circ y$$

wird.

§ 6.

In der Nomographie gibt man auch Darstellungen von Funktionen $(x, y) \rightarrow xy$ für die $xy = z$ nicht eindeutig nach x bzw. y lösbar ist. Sind dabei wenigstens die Abbildungen $x \rightarrow xy$ und $y \rightarrow xy$ noch umkehrbar (z.B. streng monoton), so haben wir es mit kürzbaren Gruppoiden, sonst (vgl. die nicht-parallele Anamorphose in § 1) mit Gruppoiden zu tun (für die Terminologie vgl. [4]). Falls die Funktion einem Wertepaar eine Menge als Funktionswert zuordnet, so gelangen wir zu Multigruppoiden. Falls die im § 1 erwähnte Gewebedefinition von [2] zu Grunde gelegt wird, so ist die Zuordnung $(x, y) \rightarrow xy$ auch nicht für alle x, y definiert, was auf Halbgruppoiden bzw. Halb-Multigruppoiden führt. Endlich sind auch die Definitionsbereiche der Funktion $(x, y) \rightarrow xy$ bezüglich des ersten und zweiten Argumentes und ihr Wertevorrat nicht unbedingt dieselbe Menge, so dass eigentlich algebraische Strukturen mit drei Grundmengen P, Q, R zu untersuchen wären, wo gewissen $x \in P, y \in Q$ ein $z \in R$ zugeordnet ist. Eine Fülle von schwierigen Problemen wird durch die Aufgabe des Aufbaus einer Gewebegeometrie auf diesen allgemeinen Strukturen aufgeworfen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Aczél J., Belousov V. D., Hosszú M., *Generalized Associativity and Bisymmetry on Quasigroups*. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 11, 127—136 (1960).
 - [2] Blaschke W., Bol G., *Geometrie der Gewebe*. Grundlehren der Math. Wiss., XLIX, Berlin, 1938.
 - [3] Bol G., *Gewebe und Gruppen (Topologische Fragen der Differentialgeometrie LXV)*. Math. Annalen 114, 414—431 (1937).
 - [4] Bruck R. H., *A Survey of Binary Systems*. Ergebnisse der Math., N. F. XX., Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.
 - [5] Cartan É., *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs*. Mémoires de sci. math. XLII., Paris, 1930.
 - [6] D'Ocagne M., *Traité de nomographie*. 2. édition, Paris, 1921.
 - [7] Pickert G., *Sechseckgewebe und potenzassoziative Loops*. Proc. Intern. Congr. Math. Amsterdam, 1954., II., 245—246.
 - [8] — *Projektive Ebenen*. Grundlehren der math. Wiss., LXXX., Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
 - [9] Radó F., *Ecuatii funcționale în legătură cu nomografia*. Studii și cerc. mat. Cluj, IX., 249—319 (1958); *Équations fonctionnelles caractérisant les nomogrammes avec trois échelles rectilignes*. Mathematica 1 (24), 143—166 (1959).
 - [10] Salzmann H., *Topologische projektive Ebenen*. Math. Zeitschr. 67, 436—466 (1957).
 - [11] Thomsen G., *Topologische Fragen der Differentialgeometrie XII., Schnittpunktsätze in ebenen Geweben*. Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg 7, 99—106 (1929).
- Eingegangen am 5. II. 1960.

ОТНОСИТЕЛЬНО СВОЙСТВ МОНОТОННОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ С. Н. БЕРНШТЕЙНА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ *)

О. АРАМЭ

Клуж

В настоящей работе исследуется приближение данное многочленом $B_n(x; f)$ С. Н. Бернштейна в случае когда приближаемая функция $f(x)$ имеет ограниченные разделённые разности второго порядка в промежутке $[0, 1]$. Показывается, что при таком условии имеет место равенство:

$$f(x) - B_n(x; f) = \frac{x(1-x)}{n} \cdot [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f],$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — значения из промежутка $[0, 1]$.

Предварительно доказывается свойство согласно которому, если функция $f(x)$, определённая в промежутке $[0, 1]$, удовлетворяет в этом промежутке известному условию выпуклости первого порядка, то соответствующая последовательность интерполяционных многочленов С. Н. Бернштейна — монотонна в $[0, 1]$. Затем устанавливается подобное свойство для последовательности производных первого порядка многочленов С. Н. Бернштейна. В последнем параграфе этой работы рассматривается применение предшествующей теории к приближенному решению дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. Именно, рассматривается изменение метода последовательных приближений Е. Пикара, состоящее в применении к интегралам, последовательно появляющимся в определении приближений — формул квадратуры вида

$$\int_a^b \varphi(s) ds \approx \int_a^b B_n(s; \varphi) ds,$$

*) Эта работа опубликована и на румынском языке в журнале „Studii și cercetări de matematică (Cluj)“, том VIII, no. 3—4, стр. 195—210 (1957).