

§ 6.

In der Nomographie gibt man auch Darstellungen von Funktionen $(x, y) \rightarrow xy$ für die $xy = z$ nicht eindeutig nach x bzw. y lösbar ist. Sind dabei wenigstens die Abbildungen $x \rightarrow xy$ und $y \rightarrow xy$ noch umkehrbar (z.B. streng monoton), so haben wir es mit kürzbaren Gruppoiden, sonst (vgl. die nicht-parallele Anamorphose in § 1) mit Gruppoiden zu tun (für die Terminologie vgl. [4]). Falls die Funktion einem Wertepaar eine Menge als Funktionswert zuordnet, so gelangen wir zu Multigruppoiden. Falls die im § 1 erwähnte Gewebedefinition von [2] zu Grunde gelegt wird, so ist die Zuordnung $(x, y) \rightarrow xy$ auch nicht für alle x, y definiert, was auf Halbgruppoiden bzw. Halb-Multigruppoiden führt. Endlich sind auch die Definitionsbereiche der Funktion $(x, y) \rightarrow xy$ bezüglich des ersten und zweiten Argumentes und ihr Wertevorrat nicht unbedingt dieselbe Menge, so dass eigentlich algebraische Strukturen mit drei Grundmengen P, Q, R zu untersuchen wären, wo gewissen $x \in P, y \in Q$ ein $z \in R$ zugeordnet ist. Eine Fülle von schwierigen Problemen wird durch die Aufgabe des Aufbaus einer Gewebegeometrie auf diesen allgemeinen Strukturen aufgeworfen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Aczél J., Belousov V. D., Hosszú M., *Generalized Associativity and Bisymmetry on Quasigroups*. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 11, 127—136 (1960).
 - [2] Blaschke W., Bol G., *Geometrie der Gewebe*. Grundlehren der Math. Wiss., XLIX, Berlin, 1938.
 - [3] Bol G., *Gewebe und Gruppen (Topologische Fragen der Differentialgeometrie LXV)*. Math. Annalen 114, 414—431 (1937).
 - [4] Bruck R. H., *A Survey of Binary Systems*. Ergebnisse der Math., N. F. XX., Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.
 - [5] Cartan É., *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs*. Mémoires de sci. math. XLII., Paris, 1930.
 - [6] D'Ocagne M., *Traité de nomographie*. 2. édition, Paris, 1921.
 - [7] Pickert G., *Sechseckgewebe und potenzassoziative Loops*. Proc. Intern. Congr. Math. Amsterdam, 1954., II., 245—246.
 - [8] — *Projektive Ebenen*. Grundlehren der math. Wiss., LXXX., Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
 - [9] Radó F., *Ecuatii funcționale în legătură cu nomografia*. Studii și cerc. mat. Cluj, IX., 249—319 (1958); *Équations fonctionnelles caractérisant les nomogrammes avec trois échelles rectilignes*. Mathematica 1 (24), 143—166 (1959).
 - [10] Salzmann H., *Topologische projektive Ebenen*. Math. Zeitschr. 67, 436—466 (1957).
 - [11] Thomsen G., *Topologische Fragen der Differentialgeometrie XII., Schnittpunktsätze in ebenen Geweben*. Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg 7, 99—106 (1929).
- Eingegangen am 5. II. 1960.

ОТНОСИТЕЛЬНО СВОЙСТВ МОНОТОННОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ С. Н. БЕРНШТЕЙНА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ *)

О. АРАМЭ

Клуж

В настоящей работе исследуется приближение данное многочленом $B_n(x; f)$ С. Н. Бернштейна в случае когда приближаемая функция $f(x)$ имеет ограниченные разделённые разности второго порядка в промежутке $[0, 1]$. Показывается, что при таком условии имеет место равенство:

$$f(x) - B_n(x; f) = \frac{x(1-x)}{n} \cdot [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f],$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — значения из промежутка $[0, 1]$.

Предварительно доказывается свойство согласно которому, если функция $f(x)$, определённая в промежутке $[0, 1]$, удовлетворяет в этом промежутке известному условию выпуклости первого порядка, то соответствующая последовательность интерполяционных многочленов С. Н. Бернштейна — монотонна в $[0, 1]$. Затем устанавливается подобное свойство для последовательности производных первого порядка многочленов С. Н. Бернштейна. В последнем параграфе этой работы рассматривается применение предшествующей теории к приближенному решению дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. Именно, рассматривается изменение метода последовательных приближений Е. Пикара, состоящее в применении к интегралам, последовательно появляющимся в определении приближений — формул квадратуры вида

$$\int_a^b \varphi(s) ds \approx \int_a^b B_n(s; \varphi) ds,$$

*) Эта работа опубликована и на румынском языке в журнале „Studii și cercetări de matematică (Cluj)“, том VIII, no. 3—4, стр. 195—210 (1957).

где $B_n(x; \varphi)$ — интерполяционный многочлен n -ой степени С. Н. Бернштейна, соответствующий промежутку $[a, b]$ и функции $\varphi(x)$:

$$B_n(x; \varphi) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{i=0}^n C_n^i \varphi(a_i) (x-a)^i (b-x)^{n-i}; \quad a_i = a + \frac{i(b-a)}{n}.$$

Исследуется потом сходимость таким образом полученного метода.

СВОЙСТВА ОТНОСИТЕЛЬНО МОНОТОННОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

§ 1.

В этом параграфе мы устанавливаем:

ТЕОРЕМА 1.)** а) Если функция $f(x)$ определена в промежутке $[0, 1]$ — и в нём она соответственно выпукла, невогнута, полиномиальная, невыпукла, вогнута первого порядка (то-есть всякая её разделенная разность второго порядка в промежутке $[0, 1]$ соответственно > 0 , ≥ 0 , $= 0$, ≤ 0 , < 0), то последовательность интерполяционных многочленов С. Н. Бернштейна, соответствующая этой функции и промежутку $[0, 1]$

$$(1.1) \quad B_1(x; f), B_2(x; f), \dots, B_n(x; f), \dots$$

является соответственно убывающей, невозрастающей, стационарной, неубывающей, возрастающей.

б) Какая бы ни была функция $f(x)$, определенная и непрерывная в промежутке $[0, 1]$, безразлично от того, удовлетворяет ли она или нет некоторому свойству выпуклости, то для неё имеют место соотношения

$$(1.2) \quad B_{n+1}(x; f) - B_n(x; f) = -\frac{x(1-x)}{n(n+1)} \cdot [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f],$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — значения из промежутка $[0, 1]$.

В доказательстве этой теоремы мы использовали следующее указание, данное с этой целью проф. Т. ПОПОВИЧЕМ:

Если написать

$$B_n = \sum_{i=0}^n C_n^i f\left(\frac{i}{n}\right) x^i (1-x)^{n-i} [x + (1-x)]$$

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i f\left(\frac{i}{n+1}\right) x^i (1-x)^{n+1-i}$$

** После появления настоящей работы в журнале „Studii și cercetări de matematică (Cluj)“, t. VIII, nr. 3—4, 1957, первая часть теоремы 1 была снова найдена в работе: I. J. Schonberg, On variation diminishing approximation methods. On numerical approximation. Proceedings of a Symposium, Madison, April 21—23, 1958, p. 249—274. The University of Wisconsin Press, Madison, 1959.

и установить разность, то получается

$$(1.3) \quad B_{n+1} - B_n = \sum_{i=1}^n \left[C_{n+1}^i f\left(\frac{i}{n+1}\right) - C_n^i f\left(\frac{i}{n}\right) - C_n^{i-1} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \right] x^i (1-x)^{n-i+1} = \\ = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i (1-x)^{n-i+1}.$$

Коэффициент λ_i имеет вид

$$\lambda_i = -C_n^i \left[\frac{i}{n-i+1} f\left(\frac{i-1}{n}\right) - \frac{n+1}{n-i+1} f\left(\frac{i}{n+1}\right) + f\left(\frac{i}{n}\right) \right] = \\ = -\frac{i}{n^2(n+1)} C_n^i \left[\frac{n^2(n+1)}{n-i+1} f\left(\frac{i-1}{n}\right) - \frac{n^2(n+1)^2}{i(n-i+1)} f\left(\frac{i}{n+1}\right) + \frac{n^2(n+1)}{i} f\left(\frac{i}{n}\right) \right].$$

Выражение, стоящее в последних прямых скобках, представляет собой разделённую разность второго порядка функции $f(x)$ на узлах

$$x_{i,1} = \frac{i-1}{n}, \quad x_{i,2} = \frac{i}{n+1}, \quad x_{i,3} = \frac{i}{n}.$$

Стало быть, имеем

$$(1.4) \quad \lambda_i = -\frac{i}{n^2(n+1)} \cdot C_n^i \cdot [x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}; f] = \\ = -\frac{1}{n(n+1)} C_{n-1}^{i-1} \cdot [x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}; f].$$

Заменяя эти значения в выражении разности $B_{n+1} - B_n$ и учитывая соответствующее свойство выпуклости функции $f(x)$, приходим к первому утверждению теоремы.

Второе утверждение устанавливается следующим образом. Зафиксируя переменную x в промежутке $[0, 1]$, рассмотрим функционал

$$(1.5) \quad F_n[f] = B_{n+1}(x; f) - B_n(x; f).$$

Замечается, что он обращается в нуль, если $f(x)$ — многочлен первой степени в $[0, 1]$, (согласно первому утверждению теоремы 1). Тогда, из результата, установленного проф. Т. ПОПОВИЧЕМ [7, 9], вытекает, что этот функционал имеет простой вид, то-есть вид

$$(1.6) \quad F_n[f] = K_n(x) \cdot [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f],$$

где коэффициент $K_n(x)$ не зависит от функции $f(x)$, а ξ_1, ξ_2, ξ_3 — значения из промежутка $[0, 1]$, зависящие, вообще говоря, от $f(x)$. Значение коэффициента $K_n(x)$ определяется непосредственно при надлежащем выборе функций $f(x)$ в (1.5) и (1.6). Таким образом, если принять $f(x) = x^2$, то получается

$$(1.7) \quad K_n(x) = F_n[x^2] = B_{n+1}(x; x^2) - B_n(x; x^2) = -\frac{x(1-x)}{n(n+1)}.$$

— равенство, вытекающее немедленно, имея в виду тождество

$$\sum_{m=0}^n m^2 C_n^m u^m v^{n-m} = nu(nu + v)(u + v)^{n-2},$$

в котором берём $u=x, v=1-x$.

Заменяя выражение $K_n(x)$ из (1.7) в (1.6), приходим ко второму утверждению теоремы 1.

Примечание. Утверждения вышеприведенной теоремы сохраняются, если вместо промежутка $[0,1]$ рассматривать некоторый промежуток $[a, b]$. В этом последнем случае надо рассматривать интерполяционные многочлены С. Н. Бернштейна относительно промежутка $[a, b]$. Таким образом, получается равенство

$$(1.8) \quad B_{n+1}(x; f) - B_n(x; f) = -\frac{(x-a)(b-x)}{n(n+1)} \cdot [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f],$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — значения из промежутка $[a, b]$.

§ 2.

Вторая теорема, которую мы устанавливаем ниже, относится к последовательности производных первого порядка интерполяционных многочленов С. Н. Вернштейна, соответствующих данной функции $f(x)$ и данному интервалу.

ТЕОРЕМА 2. Если функция $f(x)$ определена в промежутке $[0,1]$ является в этом промежутке соответственно выпуклой, невогнутой, невыпуклой, вогнутой первого и второго порядка (то-есть всякая разделенная разность второго порядка и всякая разделенная разность третьего порядка этой функции соответственно $> 0, \geq 0, \leq 0, < 0$) и если разделенные разности второго порядка ограничены в промежутке $[0,1]$, а $\delta_2 = \lim_{x_1, x_2, x_3 \rightarrow 0} |x_1, x_2, x_3; f| \neq 0$, тогда последовательность производных первого порядка интерполяционных многочленов С. Н. Бернштейна соответствующих функций $f(x)$ и промежутку $[0,1]$, то есть последовательность

$$\frac{d}{dx} B_1(x; f), \frac{d}{dx} B_2(x; f), \dots, \frac{d}{dx} B_n(x; f), \dots$$

начиная с некоторого индекса $N(\epsilon)^{***}$ является соответственно убывающей, невозрастающей, неубывающей, возрастающей в промежутке $[0, \frac{1}{5} - \epsilon]$, где ϵ — произвольное положительное число.

Доказательство. Дифференцируя почленно тождество (1.3), получаем

$$(2.1) \quad \frac{d}{dx} \{B_{n+1} - B_n\} = \sum_{i=1}^{n-1} [(i+1)\lambda_{i+1} - (n-i+1)\lambda_i] x^i (1-x)^{n-i} + \lambda_1(1-x)^n - \lambda_n x^n.$$

*** Индекс $N(\epsilon)$ не зависит от переменного x .

Рассмотрим сумму

$$(2.2) \quad S(x) = \sum_{i=1}^{n-1} [(i+1)\lambda_{i+1} - (n-i+1)\lambda_i] x^i (1-x)^{n-i},$$

появляющуюся в (2.1). Заменяя λ_i их в (1.4) приведенными выражениями, получаем

$$(2.2') \quad S(x) = \frac{1}{n^2(n+1)} \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ i(n-i+1) C_n^i \cdot \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n+1}, \frac{i}{n}; f \right] - \right. \\ \left. - (i+1)^2 C_n^{i+1} \cdot \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n+1}, \frac{i+1}{n}; f \right] \right\} x^i (1-x)^{n-i} = \\ = \frac{1}{n^2(n+1)} \sum_{i=1}^{n-1} u_i x^i (1-x)^{n-i},$$

где обозначено

$$u_i = i(n-i+1) C_n^i \cdot \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n+1}, \frac{i}{n}; f \right] - \\ - (i+1)^2 C_n^{i+1} \cdot \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n+1}, \frac{i+1}{n}; f \right].$$

Покажем сперва, что $u_i \leq 0$ при всяком $i=1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]$. С этой целью рассмотрим вспомогательное выражение

$$v_i = -i(n-i+1) C_n^i \cdot \left[\frac{i}{n+1}, \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n+1}; f \right] + \\ + (i+1)^2 C_n^{i+1} \cdot \left[\frac{i}{n+1}, \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n+1}; f \right] = \\ = C_n^i \cdot [(n-i)(i+1) - i(n-i+1)] \cdot \left[\frac{i}{n+1}, \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n+1}; f \right] = \\ = C_n^i \cdot (n-2i) \cdot \left[\frac{i}{n+1}, \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n+1}; f \right].$$

Предположим для определенности, что $f(x)$ является невогнутой первого и второго порядка в промежутке $[0,1]$. Заметим что в этом предположении, если $i \leq \left[\frac{n}{2} \right]$ то $v_i \geq 0$. Далее, составляем сумму

$$u_i + v_i = i(n-i+1) C_n^i \cdot \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n+1}, \frac{i}{n}; f \right] - \\ - i(n-i+1) C_n^i \cdot \left[\frac{i}{n+1}, \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n+1}; f \right] + (i+1)^2 C_n^{i+1} \cdot \left[\frac{i}{n+1}, \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n+1}; f \right] - \\ - (i+1)^2 C_n^{i+1} \cdot \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n+1}, \frac{i+1}{n}; f \right] =$$

$$= -\frac{i(n-i+1)(2n-i+1)}{n(n+1)} C_n^i \cdot \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n+1}, \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n+1}; f \right] - \\ - \frac{(i+1)^2(n+i-1)}{n(n+1)} C_n^{i+1} \cdot \left[\frac{i}{n+1}, \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n+1}, \frac{i+1}{n}; f \right].$$

Из этих равенств, и благодаря тому, что при $i=1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]$, имеем $v_i \geq 0$, следуют неравенства

$$(2.3) \quad u_i \leq 0, \quad \left(i = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2} \right] \right).$$

Принимая во внимание (2.2') и (2.3), приходим к выводу, что все члены суммы $S(x)$, соответствующие индексам $i \leq \left[\frac{n}{2} \right]$ неположительны и их сумма обозначаемая через $S_1(x)$, удовлетворяет при всяком x из промежутка $[0, 1]$, неравенству

$$(2.4) \quad S_1(x) = \frac{1}{n^2(n+1)} \cdot \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2} \right]} u_i x^i (1-x)^{n-i} \leq 0.$$

Рассмотрим теперь сумму всех членов, принадлежащих $S(x)$, соответствующих индексам i , удовлетворяющим неравенству $i \geq \left[\frac{n}{2} \right] + 1$. Обозначим эту сумму через $S_2(x)$.

$$(2.5) \quad S_2(x) = \frac{1}{n^2(n+1)} \sum_{i=\left[\frac{n}{2} \right]+1}^{n-1} \left\{ i(n-i+1) C_n^i \cdot \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n+1}, \frac{i}{n}; f \right] - \right. \\ \left. - (i+1)^2 C_n^{i+1} \cdot \left[\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n}, \frac{i+1}{n+1}, \frac{i+1}{n}; f \right] \right\} x^i (1-x)^{n-i}.$$

Обозначим дальше через p -целое число $\left[\frac{n}{2} \right] + 1$ и перегруппируем члены суммы $S_2(x)$ следующим образом:

$$S_2(x) = \frac{1}{n^2(n+1)} \left\{ p(n-p+1) C_n^p \cdot \left[\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n+1}, \frac{p}{n}; f \right] x^p (1-x)^{n-p} - \right. \\ \left. - n^2 C_n^n \cdot \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}, 1; f \right] x^{n-1} (1-x) \right\} + \\ + \frac{1}{n^2(n+1)} \sum_{i=p}^{n-2} \left\{ (i+1)(n-i) C_n^{i+1} \cdot \left[\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n}, \frac{i+1}{n+1}, \frac{i+1}{n}; f \right] x^{i+1} (1-x)^{n-i-1} - \right. \\ \left. - (i+1)^2 C_n^{i+1} \cdot \left[\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n}, \frac{i+1}{n+1}, \frac{i+1}{n}; f \right] x^i (1-x)^{n-i} \right\}.$$

Стало быть

$$(2.6) \quad S_2(x) = \frac{1}{n^2(n+1)} \left\{ p(n-p+1) C_n^p \cdot \left[\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n+1}, \frac{p}{n}; f \right] x^p (1-x)^{n-p} - \right. \\ \left. - n^2 \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}, 1; f \right] x^{n-1} (1-x) \right\} + \\ + \frac{1}{n^2(n+1)} \sum_{i=p}^{n-2} (i+1) C_n^{i+1} \cdot \left[\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n}, \frac{i+1}{n+1}, \frac{i+1}{n}; f \right] [(n+1)x-i-1] x^i (1-x)^{n-i-1}.$$

Обозначим через $\sigma_1(x)$ следующую сумму, появляющуюся в (2.6):

$$(2.7) \quad \sigma_1(x) = \frac{1}{n^2(n+1)} \sum_{i=p}^{n-2} (i+1) C_n^{i+1} \cdot \left[\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n}, \frac{i+1}{n+1}, \frac{i+1}{n}; f \right] [(n+1)x-i-1] x^i (1-x)^{n-i-1}.$$

Заметим что в промежутке $\left[0, \frac{1}{2} \right]$ множители $[(n+1)x-i-1]$ фигурирующие в (2.7) — отрицательны при $i \geq p$. Стало быть

$$(2.8) \quad \sigma_1(x) \leq 0, \quad \text{при всяком } x \in \left[0, \frac{1}{2} \right].$$

Рассмотрим теперь последний член из суммы (2.1), т. е. член $-\lambda_n x^n$ и ассоциируем его с членом $-\frac{n^2}{n^2(n+1)} \cdot \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}, 1; f \right] x^{n-1} (1-x)$ фигурирующим в (2.6). Их сумма будет

$$(2.9) \quad \sigma_2 = \frac{1}{n(n+1)} \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}, 1; f \right] x^n - \frac{1}{n+1} \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}, 1; f \right] x^{n-1} (1-x) = \\ = \frac{1}{n(n+1)} \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}, 1; f \right] x^{n-1} (x-n+nx).$$

Заметим что в промежутке $\left[0, \frac{1}{2} \right]$ множитель $(x-n+nx)$ неположителен, стало быть $\sigma_2(x)$ — неположителен в этом промежутке.

$$(2.10) \quad \sigma_2(x) \leq 0, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2} \right].$$

Рассмотрим теперь предпоследний член из (2.1), т. е. $\lambda_i (1-x)^n$, присоединим его к первому члену из (2.6), т. е. к члену

$$\frac{p(n-p+1)}{n^2(n+1)} C_n^p \cdot \left[\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n+1}, \frac{p}{n}; f \right] x^p (1-x)^{n-p}, \quad \left(p = \left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right).$$

Обозначим через $\sigma_3(x)$ сумму этих двух членов. Покажем что какое бы ни было число $\varepsilon > 0$, для него существует число $N(\varepsilon)$ такое что при $n > N(\varepsilon)$, сумма $\sigma_3(x)$ неположительна в промежутке $\left[0, \frac{1}{5} - \varepsilon \right]$.

Эта сумма есть

$$(2.11) \quad \sigma_3(x) = \lambda_1(1-x)^n + \frac{p(n-p+1)}{n^2(n-1)} C_n^p \cdot \left[\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n+1}, \frac{p}{n}; f \right] x^p(1-x)^{n-p}.$$

Заменяя в (2.11) λ_1 его значением данным в (1.4), получаем

$$(2.12) \quad \sigma_3(x) = -\frac{1}{n(n+1)} \left[0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}; f \right] (1-x)^n + \\ + \frac{p(n-p+1)}{n^2(n+1)} C_n^p \cdot \left[\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n+1}, \frac{p}{n}; f \right] x^p(1-x)^{n-p}.$$

Отсюда следует неравенство

$$(2.13) \quad \sigma_3(x) \leq -\frac{\delta_2[f]}{n(n+1)} (1-x)^n + \frac{p(n-p+1)}{n^2(n+1)} C_n^p \cdot \Delta_2[f] x^p(1-x)^{n-p} = \bar{\sigma}_3(x),$$

$$\text{где } \delta_2[f] = \lim_{[0,1]} |[x_1, x_2, x_3; f]| \text{ а } \Delta_2[f] = \overline{\lim}_{[0,1]} |[x_1, x_2, x_3; f]|.$$

Наложим условие $\bar{\sigma}_3(x) \leq 0$. Принимая во внимание что $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, это условие принимает вид

$$(2.14) \quad \left(\frac{x}{1-x} \right)^p \leq \frac{n^2(n+1)}{p(n-p+1)C_n^p} \cdot \frac{\delta_2}{\Delta_2}.$$

Легко проверить что $C_n^p \leq 2^{n-1}$, где $p = \left[\frac{n}{2} \right] + 1$. Неравенство (2.14) удовлетворяется тем более когда x удовлетворяет неравенству

$$\left(\frac{x}{1-x} \right)^p \leq \frac{n}{p(n-p+1)2^{n-1}} \cdot \frac{\delta_2}{\Delta_2},$$

то есть неравенству

$$(2.15) \quad \frac{x}{1-x} \leq \left(\frac{n\delta_2}{p(n-p+1)2^{n-1}\Delta_2} \right)^{\frac{1}{p}} = \rho_n.$$

Учитывая что $p = \left[\frac{n}{2} \right] + 1$ и что по предположению $\delta_2 \neq 0$, следует что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \frac{1}{4}$. Если теперь наложим переменному x условие удовлетворения неравенств $0 \leq x \leq \frac{1}{5} - \varepsilon$, то принимая во внимание, что функция $\frac{x}{1-x}$ возрастает в промежутке $[0,1]$, следуют неравенства

$$0 \leq \frac{x}{1-x} \leq \frac{1-5\varepsilon}{4+5\varepsilon} < \frac{1}{4}.$$

Начиная с некоторого индекса $N(\varepsilon)$ (независящего от x), числа ρ_n из (2.15) превышают значение $\frac{1-5\varepsilon}{4+5\varepsilon}$ и значит начиная с этого индекса, будет иметь место неравенство (2.15). Стало быть для $n > N(\varepsilon)$, будем иметь

$$(2.16) \quad \sigma_3(x) \leq 0, \text{ при всяком } x \in \left[0, \frac{1}{5} - \varepsilon \right].$$

В заключении, учитывая (2.1), (2.2), (2.6), (2.7), (2.9) и (2.11), можем написать

$$\frac{d}{dx} \langle B_{n+1} - B_n \rangle = S(x) + \lambda_1(1-x)^n - \lambda_n x^n = S_1(x) + S_2(x) + \lambda_1(1-x)^n - \lambda_n x^n = \\ = S_1(x) + \sigma_1(x) + \sigma_2(x) + \sigma_3(x).$$

Потом, учитывая неравенства (2.4), (2.8), (2.10), (2.16), следует что при $n > N(\varepsilon)$, имеют место неравенства

$$\frac{d}{dx} \langle B_{n+1} - B_n \rangle \leq 0, \text{ при всяком } x \in \left[0, \frac{1}{5} - \varepsilon \right],$$

что и требовалось доказать.

Вышеприведенную теорему легко можно переносить на случай, когда интерполяционные многочлены С. Н. Бернштейна рассматриваются относительно произвольного промежутка $[a, b]$.

ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ

§ 3. О приближении данным многочленом $B_n(x; f)$

Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[0,1]$, то соответствующая последовательность интерполяционных многочленов $B_n(x; f)$ равномерно сходится в этом промежутке и — согласно результату полученному Т. ПОПОВИЧЕМ [6], имеет место оценка

$$|f(x) - B_n(x; f)| \leq \frac{3}{2} \omega \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$.

Е. В. ВОРОНОВСКАЯ, исследуя асимптотическое поведение приближения данного многочленом $B_n(x; f)$, устанавливает в [10] следующий результат:

Если функция $f(x)$ имеет в промежутке $[0,1]$ непрерывную производную второго порядка, то имеет место следующее соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[f(x) - B_n(x; f)] = -\frac{1}{2} x(1-x) f''(x)$$

(см. также [1, 2, 3]).

В этом параграфе мы устанавливаем следующую теорему, в некотором смысле обобщающую вышеуказанный результат Е. В. Вороновской:

ТЕОРЕМА 3. Если функция $f(x)$ является определенной в промежутке $[0,1]$ и непрерывна в нём, то имеет место следующее равенство

$$(3.1) \quad f(x) - B_n(x; f) = -\frac{x(1-x)}{n} \cdot [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f],$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — значения из промежутка $[0,1]$.

Доказательство. Зафиксировав значение переменного x , рассмотрим функционал

$$(3.2) \quad R_n[f] = f(x) - B_n(x; f).$$

Используя теорему 1, замечаем, что он обращается в нуль, если $f(x)$ — многочлен первой степени и принимает отрицательное значение для любой выпуклой функции первого порядка в промежутке $[0,1]$. Тогда согласно результату, установленному проф. Т. ПОПОВИЧЕМ в [7, 9], этот функционал является простого вида, т. е.

$$(3.3) \quad R_n[f] = K_n(x) \cdot [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f],$$

где $K_n(x)$ — коэффициент не зависящий от функции $f(x)$, а ξ_1, ξ_2, ξ_3 — значение из промежутка $[0,1]$, зависящее от $f(x)$. Выражение коэффициента $K_n(x)$ определяется немедленно, если принять в (3.2) и (3.3) за $f(x)$ надлежащую функцию. Таким образом, если принять $f(x) \equiv x^2$, немедленно получаем

$$K_n(x) = R_n[x^2] = x^2 - B_n(x; x^2) = -\frac{x(1-x)}{n},$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

§ 4. Метод численного интегрирования дифференциальных уравнений

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$(4.1) \quad y' = f(x, y),$$

при начальном условии

$$(4.2) \quad y(x_0) = y_0.$$

Рассмотрим последовательность функций $y_n(x)$, определённых рекуррентной формулой

$$(4.3) \quad y_0(x) = y_0$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x B_n(s; f[s, y_{n-1}(s)]) ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

где $B_n(x; \varphi)$ — интерполяционный многочлен n -ой степени С. Н. Бернштейна, соответствующий функции $\varphi(s)$ и промежутку $[x_0, x_0+h]$.

$$(4.4) \quad B_n(x; \varphi) = \frac{1}{h^n} \sum_{i=0}^n C_n^i \varphi\left(x_0 + \frac{ih}{n}\right) (x - x_0)^i (x_0 + h - x)^{n-i}.$$

Приёмы такого рода приближённого интегрирования были исследованы Ж. ВАРГОЙ в обзорной работе [11].

В этом параграфе покажем, что при определённых условиях указанных ниже, последовательность (4.3) равномерно сходится в промежутке $[x_0, x_0+h]$ к интегралу $y(x)$ дифференциального уравнения (4.1), удовлетворяющему условию (4.2).

Предположения. Предположим, что функция $f(x, y)$ стоящая во втором члене данного дифференциального уравнения, удовлетворяет следующим условиям:

а) Функция $f(x, y)$, непрерывна в области D , определённой неравенствами $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, $y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$, ($a > 0$, $b > 0$) и удовлетворяет в этой области условию Липшица относительно переменного y с постоянной L .

б) Пусть $M = \max_{(D)} |f(x, y)|$ и пусть h — положительное число, удовлетворяющее неравенствам $h \leq \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ и $h < \frac{2}{L}$.

γ) Пусть D^* область, определённая неравенствами $x_0 \leq x \leq x_0 + h$, $y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$. Функция $f(x, y)$ имеет в D^* непрерывные частные производные первого и второго порядка.

В дальнейшем мы обозначим через $y(x)$ решение дифференциального уравнения (4.1), удовлетворяющее условию (4.2). Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. В условиях а), б), γ), последовательность (4.3) сходится равномерно в промежутке $[x_0, x_0+h]$ к интегралу $y(x)$.

Доказательство.

1°. При всяком $x \in [x_0, x_0+h]$, последовательное приближение n -ого порядка налицо и удовлетворяет неравенствам

$$(4.5) \quad y_0 - b \leq y_n(x) \leq y_0 + b, \quad n = 1, 2, \dots$$

В самом деле, при $n=1$ имеем:

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x B_1[s; f(s, y_0)] ds \right| \leq (x - x_0) |B_1[\xi; f(s, y_0)]| \leq$$

$$\leq M(x - x_0) \leq Mh \leq b.$$

Здесь использована обычная формула о среднем для определённых интегралов, а ξ — промежуточное число из интервала (x_0, x_0+h) .

Предположим теперь что последовательное приближение n -ого порядка налично и удовлетворяет неравенствам (4.5) в промежутке $[x_0, x_0+h]$. В этом предположении следует для последовательного приближения n -ого порядка ограничение

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x B_{n+1}(s; f[s, y_n(s)]) ds \right| \leq (x - x_0) |B_{n+1}(\xi; f[s, y_n(s)])| \leq M(x - x_0) \leq b, \quad x \in [x_0, x_0 + h].$$

Согласно принципу полной индукции, неравенства (4.5) верны в промежутке $[x_0, x_0+h]$, при всяком натуральном индексе n .

2°. Сходимость последовательности (4.3) равносильна сходимости ряда

$$(4.6) \quad y_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} [y_{n+1}(x) - y_n(x)].$$

Покажем, что в промежутке $[x_0, x_0+h]$ этот ряд равномерно сходится. Общий член его ограничивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(x) = |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &\leq \int_{x_0}^x |B_{n+1}(s; f[s, y_n(s)]) - B_n(s; f[s, y_{n-1}(s)])| ds \leq \\ (4.7) \quad &\leq \int_{x_0}^x |B_{n+1}(s; f[s, y_n(s)]) - B_n(s; f[s, y_n(s)])| ds + \\ &+ \int_{x_0}^x |B_n(s; f[s, y_n(s)]) - B_n(s; f[s, y_{n-1}(s)])| ds. \end{aligned}$$

Учитывая формулу (1.2) и формулу о среднем, установленную проф. Т. ПОПОВИЧЕМ, в [8], получаем для первого интеграла следующую оценку:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} I_1(x) &= \int_{x_0}^x |B_{n+1}(s; f[s, y_n(s)]) - B_n(s; f[s, y_n(s)])| ds \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x \frac{(s - x_0)(x_0 + h - s)}{2n(n+1)} \cdot \max_{(U^*)} \left| \frac{d^2}{dx^2} f[x, y_n(x)] \right| ds. \end{aligned}$$

Обозначая через

$$\begin{aligned} M_1 &= \max_{(U^*)} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|, \quad M_2 = \max_{(U^*)} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|, \quad M_{11} = \max_{(U^*)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|, \\ M_{12} &= \max_{(U^*)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|, \quad M_{22} = \max_{(U^*)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|, \end{aligned}$$

и учитывая следующую формулу [6],

$$\frac{d}{dx} B_n(x; \varphi) = \frac{1}{h^{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \cdot \left[x_0 + \frac{ih}{n}, x_0 + \frac{(i+1)h}{n}; \varphi \right] (x - x_0)^i (x_0 + h - x)^{n-i-1},$$

получаем оценку

$$\max_{(U^*)} \left| \frac{d^2}{dx^2} f[x, y_n(x)] \right| \leq M_{11} + M_1 M_2 + M(2M_{12} + M_2^2 + M M_{22}) = N_2$$

и стало быть, из (4.8):

$$(4.8') \quad I_1(x) \leq \frac{N_2}{2n(n+1)} \int_{x_0}^x (s - x_0)(x_0 + h - s) ds \leq \frac{h(x - x_0)^2}{4n(n+1)} N_2.$$

Затем, для второго интеграла стоящего в прямом члене неравенства (4.7), получается при помощи неравенства Липшица, следующая оценка:

$$\begin{aligned} (4.9) \quad I_2(x) &= \int_{x_0}^x |B_n(s; f[s, y_n(s)]) - B_n(s; f[s, y_{n-1}(s)])| ds \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x B_n(s; L |y_n(s) - y_{n-1}(s)|) ds \leq L \int_{x_0}^x B_n(s; \varepsilon_{n-1}(s)) ds. \end{aligned}$$

Следовательно, из (4.7), (4.8) и (4.9) получаем рекуррентное соотношение

$$(4.10) \quad \varepsilon_n(x) \leq \frac{h(x - x_0)^2}{4n(n+1)} N_2 + L \int_{x_0}^x B_n(s; \varepsilon_{n-1}(s)) ds, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При $n=0$ имеем

$$\varepsilon_0(x) \leq \left| \int_{x_0}^x B_1(s; f(s, y_0)) ds \right| \leq \int_{x_0}^x B_1(s; M) ds = M(x - x_0).$$

Используя рекуррентное соотношение (4.10), получаем для $\varepsilon_1(x)$ оценку

$$\varepsilon_1(x) \leq \left(\frac{h}{4.1.2} N_2 + \frac{LM}{2} \right) (x - x_0)^2 = \delta_1(x).$$

Затем для $\varepsilon_2(x)$ получаем:

$$\varepsilon_2(x) \leq \frac{h(x - x_0)^2}{4.2.3} N_2 + L \int_{x_0}^x B_2(s; \delta_1(x)) ds.$$

Принимая во внимание что выражение $\delta_1(x)$ является выпуклым (первого порядка) в промежутке $[x_0, x_0 + h]$ и учитывая теорему 1, получаем неравенства:

$$0 \leq B_2(s; \delta_1(s)) \leq B_1(s; \delta_1(s))$$

и тем более

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(x) &\leq \frac{h(x-x_0)^2}{4 \cdot 2 \cdot 3} N_2 + L \int_{x_0}^x B_1(s; \delta_1(s)) ds = \\ &= \left[\frac{h}{4 \cdot 2 \cdot 3} N_2 + \frac{L}{2} \frac{\delta_1(x_0 + h)}{h} \right] (x - x_0)^2 = \delta_2(x). \end{aligned}$$

Подобным образом, для $\varepsilon_3(x)$ получаем оценку

$$\begin{aligned} \varepsilon_3(x) &\leq \frac{h(x-x_0)^2}{4 \cdot 3 \cdot 4} N_2 + L \int_{x_0}^x B_3(s; \delta_2(s)) ds \leq \frac{h(x-x_0)^2}{4 \cdot 3 \cdot 4} N_2 + L \int_{x_0}^x B_1(s; \delta_2(s)) ds = \\ &= \left[\frac{h}{4 \cdot 3 \cdot 4} N_2 + \frac{L}{2} \frac{\delta_2(x_0 + h)}{h} \right] (x - x_0)^2 = \delta_3(x). \end{aligned}$$

Поступая таким же образом далее, получаем оценку

$$(4.11) \quad \varepsilon_n(x) \leq \left[\frac{h}{4n(n+1)} N_2 + \frac{L}{2} \frac{\delta_{n-1}(x_0 + h)}{h} \right] (x - x_0)^2 = \delta_n(x).$$

Отсюда получаем следующее рекуррентное соотношение для $\delta_n(x_0 + h)$:

$$\delta_n(x_0 + h) = \frac{Lh}{2} \delta_{n-1}(x_0 + h) + \frac{h^3}{4n(n+1)} N_2, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\delta_0(x_0 + h) = Mh,$$

которая имеет вид

$$(4.12) \quad \begin{cases} \delta_n = \alpha \delta_{n-1} + \frac{\beta}{n(n+1)}, & (n = 1, 2, \dots), \\ \delta_0 = Mh, \end{cases}$$

где

$$\alpha = \frac{Lh}{2}, \quad \beta = \frac{h^3}{4} N_2.$$

С помощью этого рекуррентного соотношения, констатируем что в предположении $\alpha = \frac{Lh}{2} < 1$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(x_0 + h)$ сходится и имеет сумму

$$S = \frac{\delta_0 + \beta}{1 - \alpha} = \frac{Mh + \frac{h^3}{4} N_2}{1 - \frac{Lh}{2}}.$$

Из (4.11) замечаем что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(x_0 + h)$ является мажорантным для ряда функций $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(x)$ в промежутке $[x_0, x_0 + h]$. Таким образом, мы приходим к заключению что последовательность функции (4.3) абсолютно и равномерно сходится в этом промежутке к функции $y(x)$. При $n \rightarrow \infty$, из равенства (4.3) получаем

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[s, y(s)] ds,$$

откуда следует что функция $y(x)$ является интегралом уравнения (4.1), удовлетворяющим условию (4.2).

Примечания. 1°. Легко показать, что если в области D^* выполнены условия

$$f \geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \leq 0,$$

и если принять $y_0(x) = y_0 + b$, то соответствующая последовательность является невозрастающей в промежутке $[x_0, x_0 + b]$.

2°. Вышеустановленная теорема 4 легко распространяется на системы дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bernstein S. N., *Complément à l'article de E. Voronovskaya*. C. R. Acad. Sci. U.R.S.S. 1932, pp. 86-92.
- [2] Butzer P. L., *Linear Combinations of Bernstein Polynomials*. Can. J. Math., 5, 559-567 (1953).
- [3] Lorentz G. G., *Bernstein Polynomials*. Toronto, 1953.
- [4] Moldovan E., *Asupra unei modificări a procedurii de interpolare a lui S. Bernstein*. Studii și cercet. științ. Acad. R.P.R., Filiala Cluj, III, no. 3-4, 18-22 (1952).
- [5] Popoviciu T., *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*. Mathematica VIII, 32-33 (1934).

- [6] Popoviciu T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*. *Mathematica, Cluj*, 10, 49–54 (1935).
- [7] — *Asupra formei restului în unele formule de aproximare ale analizei*. *Lucrările sesiunii generale științifice a Acad. R.P.R. din 2–12 iunie 1950*.
- [8] — *Folytonos függvények középértéktételeiről*. *Magyar Tud. Akad. III (Mat. és Fiz.) osztályának közleményeiből*, IV, no. 3, 353–356 (1954).
- [9] — *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*. *Mathematica*, 1 (24), fasc. 1, 95–142 (1959).
- [10] Voronovskaya E., *Détermination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les polynômes de M. Bernstein*. *C.R. Acad. Sci. U.R.S.S.*, 1932, 79–85.
- [11] Warga J., *On a Class of Iterative Procedures for solving Normal Systems of Ordinary Differential Equations*. *Journ. of Math. and Physics*, XXXI, no. 4, 223–243 (1953).
- Поступило 5.I.1960.

ELEMENTARE GEOMETRIE DER GERADENBÜSCHEL DER LOBATSCHESKI-BOLYAI'SCHEN EBENE. ERWEITERUNG DER LOBATSCHESKI-BOLYAI'SCHEN EBENE

von

EUGEN GERGELY

Cluj

Die Arbeit behandelt eine Erweiterung der Lobatschewski-Bolyai'schen Ebene, die $L-B$ -Ebene*) wird in einer projektiven Ebene eingebettet. Die Erweiterung erfolgt mit Hilfe der Geradenbüschel der $L-B$ Ebene und sie ergibt somit gleichzeitig auch die Elementargeometrie dieser Geradenbüschel.

Die Arbeiten, welche ähnliche Probleme behandeln, gehen in Allgemeinen aus den Ebenen-Darstellungen der $L-B$ Ebene aus, und so kümmern sie sich nicht viel um die Einbettungsebene, weil sie die Eigenschaften derselben bekannt voraussetzen und die Lehrsätze der $L-B$ Geometrie vorführen.

Eine Abhandlung von Hjelmslev beschäftigt sich mit der Frage der Erweiterung der Ebene, diese Erweiterung wird aber nicht mit Hilfe der Geradenbüschel durchgeführt.

Vorliegende Arbeit geht von der $L-B$ Ebene aus und indem sie elementaren Eigenschaften derselben benützt, zeigt sie, dass die Ebene sich in eine, mit der projektiven Ebene isomorphen Varietät einbetten lässt.

Bekanntlich kann man in der $L-B$ Ebene drei Arten von Geradenbüschel unterscheiden:

- a) die Gesamtheit der Geraden, welche durch einen im Endlichen befindlichen Punkt der Ebene gehen;
- b) die Gesamtheit der zueinander asymptotischen Geraden;
- c) die Gesamtheit der auf einer gegebenen Geraden senkrechten Geraden.

*) Die Lobatschewski-Bolyai'sche Ebene wird in vorliegender Arbeit mit $L-B$ bezeichnet.