

QUELQUES TYPES DE NOMOGRAMMES TANGENTIELS

par

LASCU BAL

à Cluj

1. Dans la pratique du calcul graphique on emploie presque exclusivement les nomogrammes à contacts d'intersection. Il y a des équations où ces nomogrammes deviennent difficiles à employer, surtout quand on utilise le plan transparent. Il s'agit donc de trouver des nomogrammes plus simples. C'est ce que nous nous proposons dans ce qui suit, en présentant quelques types de nomogrammes tangentiels qui nous semblent assez simples.

On sait que le contact à tangence se réalise quand une courbe du plan fixe est tangente à une courbe du plan mobile. Les courbes peuvent être fixes, ou faire partie de courbes cotées d'une famille à un paramètre. Si une courbe d'un plan est tangente à une courbe de l'autre plan, dans un de ses points, nous avons un contact double, qui est formé d'un contact à intersection associé à un contact à tangence. Ce type de contact généralisé a été considéré par F. RADÓ [5]. Si nous considérons le dual du contact à intersection, point situé sur la courbe et le dual du contact à tangence —



Fig. 1

courbe tangente à une courbe — nous obtenons respectivement les contacts — droite tangente à une courbe (fig. 1) et courbe tangente à une courbe (fig. 2). On conclut que le contact à tangence est plus général que le contact à intersection et aussi que la classe des formes canoniques des nomogrammes tangentiels est plus large que la classe des formes canoniques des nomogrammes à contacts d'intersection.

Pour trouver les conditions analytiques correspondantes à ces conditions géométriques, appelées contacts, on prend le plan fixe (π) et le plan mobile (π') avec leurs systèmes de référence xOy et $x'O'y'$. Les coordonnées des points correspondants à ces plans sont liées par les relations connues

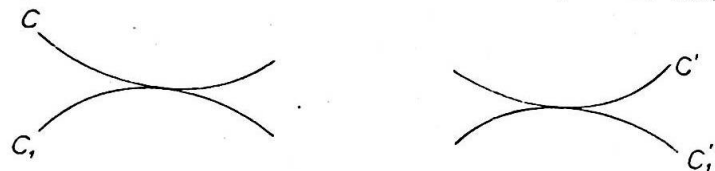


Fig. 2

$$(1) \quad \begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b. \end{cases}$$

Soit

$$F(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad G(x', y') = 0$$

les équations des deux courbes situées respectivement dans le plan fixe π et le plan mobile π' . La condition de tangence s'obtient par l'élimination des variables x et y entre les équations

$$(2) \quad \begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x', y') = 0 \end{cases}$$

Si les deux courbes appartiennent à des lignes cotées, la relation qu'on obtient contient aussi des variables cotées.

Prenons maintenant dans le plan fixe une échelle (fig. 3) et dans le plan mobile une famille de courbes à un paramètre

$$x = f_1; y = g_1$$

et

$$F(x', y', \lambda) = 0.$$

Mettons la condition que la courbe du plan π soit tangente, dans de ces points à une courbe

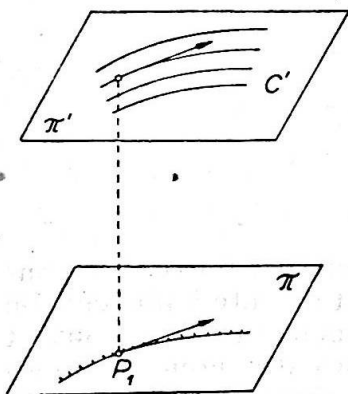


Fig. 3

de la famille, située dans le plan mobile π' . Ce contact est déterminé analytiquement par les relations

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{F_x'[(f_1 - a) \cos \alpha + (g_1 - b) \sin \alpha, -(f_1 - a) \sin \alpha + (g_1 - b) \cos \alpha, \lambda]}{F_y'[(f_1 - a) \cos \alpha + (g_1 - b) \sin \alpha, -(f_1 - a) \sin \alpha + (g_1 - b) \cos \alpha, \lambda]} = \frac{g_1'(z_1)}{f_1'(z_1)} \\ F[(f_1 - a) \cos \alpha + (g_1 - b) \sin \alpha, -(f_1 - a) \sin \alpha + (g_1 - b) \cos \alpha, \lambda] = 0. \end{cases}$$

Le contact est double si les valeurs de λ et z_1 sont données. Si nous éliminons le paramètre λ , en renonçant à la détermination de la courbe du plan mobile, nous avons un contact simple.

Par un raisonnement analogue on peut déduire les conditions analytiques même, en utilisant les coordonnées tangentielles des courbes.

Un contact à tangence contient tout au plus deux éléments cotés et par conséquent un nomogramme qui a tous les contacts à tangence, représente une équation qui contient tout au plus huit variables. On peut diminuer le nombre des variables si certains contacts sont constants. Quand trois contacts de position sont constants, le nomogramme représente une équation à deux variables.

2. Les contacts à tangences étant moins précis et difficiles à observer; nous considérons des nomogrammes qui ont tout au plus deux contacts tangentiels, disposés de telle sorte, que l'utilisation du nomogramme soit simple. Soit dans le plan fixe deux réseaux cotés

$$x = \varphi_{12}; y = \psi_{12}$$

$$x' = \varphi_{34}; y' = \psi_{34}$$

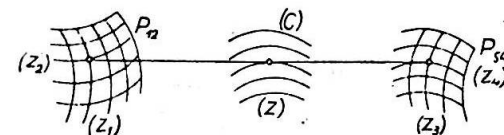


Fig. 4

et une famille de lignes cotées d'équation tangentielle

$$F(u, v, z) = 0.$$

Prenons dans le plan π une droite D_0 et cherchons le nomogramme donné par la formule de structure

$$P_{12} \vdash D_0'; P_{34} \vdash D_0'; C \vdash D_0',$$

le dernier contact étant à tangence.

La forme canonique de ce nomogramme s'obtient en écrivant que la droite D'_0 est tangente à une courbe de la famille (c). Les coordonnées tangentielles vérifient l'équation de la famille

$$(4) \quad F\left(\frac{\psi_{12} - \psi_{34}}{\varphi_{12}\psi_{34} - \varphi_{34}\psi_{12}}, \frac{\varphi_{34} - \varphi_{12}}{\varphi_{12}\psi_{34} - \psi_{12}\varphi_{34}}, z\right) = 0.$$

Dans le cas général la formule est compliquée, mais si à la place du réseau des points cotés (z_1, z_2) , on prend une échelle rectiligne sur l'axe Oy

$$x = 0; y = \psi_1,$$

la forme canonique (4) devient

$$(5) \quad F\left[\frac{\psi_{34} - \psi_1}{\psi_1\varphi_{34}}, -\frac{1}{\psi_1}, z\right] = 0.$$

En écrivant

$$f_{34} = -\frac{1}{\varphi_{34}}; \quad g_1 = -\frac{1}{\psi_1};$$

$$g_{34} = \frac{\psi_{34}}{\varphi_{34}}; \quad z_2 = z,$$

on a

$$F(g_1 g_{34} + f_{34}, g_1, z_2) = 0,$$

où

$$(6) \quad z_2 = \Phi(g_1, f_{34} + g_1 g_{34}).$$

La forme canonique (6) est connue [6] et figure parmi les formes des nomogrammes à transparent orienté. Sur le transparent il y a une courbe et deux points, c'est-à-dire une complication. Le nomogramme tangentiel considéré comporte seulement une règle et, par conséquent, il est plus simple [4].

En mettant

$$g_1 = z; \quad z_2 = u; \quad z_3 = x \quad \text{et} \quad z_4 = y$$

on peut écrire la forme canonique (6), encore sous la forme

$$h(z, u) = f(x, y) + z g(x, y).$$

Dans le cas, où le réseau coté est le réseau cartésien même, le nomogramme se simplifie et représente la forme canonique

$$(6') \quad h(z, u) = f(x) g(y) + z g(y).$$

On peut considérer aussi le cas simple

$$h(z, u) = f(x) + \varphi(z) g(y).$$

Si les deux réseaux cotés deviennent des échelles curvilignes, le nomogramme obtenu résout n'importe quelle équation à trois variables. En effet, la figure dualistique comporte un nomogramme qui contient deux familles de droites cotées et une famille de courbes cotées, c'est-à-dire le nomogramme à lignes concurrentes le plus général.

Si les échelles sont rectilignes et parallèles, la forme (6) devient

$$(7) \quad f_1 f_2 + A = \Phi(f_1, z_3)$$

(A étant une constante non nulle).

Le nomogramme (7) est simple et précis (fig. 5); il représente une équation à trois variables.

Considérons dans le plan fixe deux familles des courbes cotées (fig. 6)

$$F(u, v, z_3) = 0; \quad G(u, v, z_4) = 0,$$

$$x = \varphi_{12}; \quad y = \psi_{12}$$

et dans le plan mobile une droite. Cherchons la forme canonique du nomogramme qui a la formule de structure

$$C_3 \vdash D_0; \quad P_{12} \vdash D'_0 \quad \text{et} \quad C_4 \vdash \vdash D'_0,$$

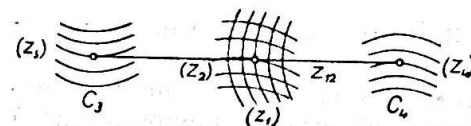


Fig. 5

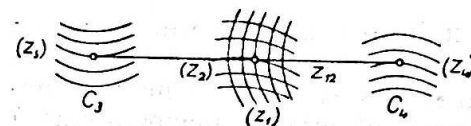


Fig. 6

le premier et le dernier contact étant tangentiels. La formule de structure donnée nous conduit à la forme canonique [6].

$$(8) \quad \varphi_{12} F_{34} + \psi_{12} G_{34} + 1 = 0.$$

Cette forme est aussi connue et peut être représentée par un nomogramme à transparent orienté moins simple que le nomogramme tangentiel [1], [4].

On parvient à la même forme en partant de l'équation tangentielle de la famille des paraboles considérées plus haut

$$u^2 - 4f_4 g_4 v^2 - 4f_4 = 0.$$

Un autre exemple de nomogramme tangential est donné par un nomogramme à index circulaire. Soit

$$x'^2 + y'^2 = R^2$$

l'équation de la famille des cercles du plan mobile et

$$x = f_1, \quad y = g_1, \quad x = f_{23}, \quad y = g_{23},$$

$$F(x, y, z_4) = 0$$

les équations des éléments cotés du plan fixe. Pour les formules de structure

$$P_1 \vdash 0; \quad P_{23} \vdash C'; \quad C_R \vdash C'_R,$$

on obtient la forme canonique en éliminant les variables x, y entre les relations

$$F(x, y, z_4) = 0$$

$$(x - f_1)^2 + (y - g_1)^2 = (f_{23} - f_1)^2 + (g_{23} - g_1)^2$$

$$\frac{F_x}{F_y} = \frac{x - a}{y - b},$$

qui, en général, ne peut pas être exprimée d'une manière explicite.

Il est important aussi de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes afin que l'équation à quatre variables

$$F(x, y, z, u) = 0$$

puisse être écrite sous l'une des formes canoniques trouvées.

On peut établir aisément les conditions nécessaires et suffisantes pour les formes particulières

$$(11) \quad h(z, u) = f(x)g(y) + g(y)\varphi(z)$$

$$(12) \quad h(z, u) = f(x) + \varphi(z)g(y)$$

$$(13) \quad \varphi(u) = f(x, y) + \psi(z)g(x, y).$$

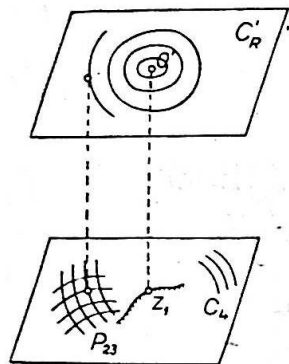


Fig. 9

Si nous considérons u comme une fonction implicite et si nous notons

$$p_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad p_2 = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad p_3 = \frac{\partial u}{\partial z}; \quad p_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad p_{33} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \quad w = \ln \frac{p_1}{p_2},$$

dans les cas où les fonctions qui y interviennent sont continues et dérivables, les conditions cherchées sont les suivantes:

Pour la forme canonique (11)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 \ln \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} : \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2}{\frac{\partial w}{\partial z}} \right) = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}.$$

Pour la forme (12)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0.$$

Pour la forme (13)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \Psi$$

où

$$\Phi = \frac{D \left(u, \frac{p_{33}}{p_3} \right)}{D(x, y)} \quad \Psi = \frac{D \left(\frac{p_{33}}{p_3}, p_3 \right)}{D(x, y)}$$

$$\Phi = \frac{D(p_3, u)}{D(x, y)} \quad \Psi = \frac{D(p_3, u)}{D(x, y)}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Бал Л., Канонические формы для уравнений с четырьмя и пятью переменными. *Mathematica*, 1 (24), 193—197 (1959).
- [2] Lambert R., *Structure générale des nomogrammes et des systèmes nomographiques*. Act. scient. et ind., Paris 1937.
- [3] Лаптева Д. Г., О построении номограммы для системы уравнений $f_2(v) = f_1(u) + f_3(w)$; $f_2(v) = \varphi_1(x) + f_4(t)$ с тремя точечными контактами и одним контактом касания. *Вычисл. Математика*, сб. 5, 133—140 (1959).
- [4] Хованский, Г. С., Некоторые вопросы практической номографии. *Вычисл. математика*, сб. 4, 3—103 (1959).
- [5] Radó F., *Despre contactele nomogramei cu transparent*. *Studii și cerc. mat.*, VIII, 3—4, 319—331 (1957).
- [6] Belgrano I., *Tratado de nomografía*. Madrid, 1953.

Reçu le 4. VIII. 1960.

SUR UN THÉORÈME DE W. A. MARKOV

par

FLORIN CONSTANTINESCU

à Cluj

1. Le but de cette note est de donner une démonstration élémentaire, directe, et quelques extensions du théorème suivant, appartenant à W. A. MARKOV [1] :

Si les racines des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$, avec toutes leurs racines réelles et simples, sont séparées, alors les racines des polynômes dérivées $P'(x)$ et $Q'(x)$ se séparent aussi.

La démonstration de W. A. Markov utilise le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Pour notre démonstration nous supposons que les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ soient du même degré n . Les conditions du théorème subsistent aussi dans le cas où les degrés des deux polynômes diffèrent d'une unité et la démonstration peut être faite d'une manière analogue.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ les racines du polynôme $P(x)$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ les racines du polynôme $Q(x)$ arrangées dans l'ordre croissant. Les conditions de séparation des racines sont

$$(1) \quad a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n.$$

Si a'_i est la racine située dans l'intervalle (a_i, a_{i+1}) du polynôme $P'(x)$ et b'_i la racine située dans l'intervalle (b_i, b_{i+1}) du polynôme $Q'(x)$, il faut démontrer que l'on ait

$$(2) \quad a'_1 < b'_1 < a'_2 < b'_2 < \dots < a'_{n-1} < b'_{n-1}.$$

La démonstration est basée sur les formules

$$(3) \quad P'(x) = P(x) \sum_{j=1}^n \frac{1}{x - a_j}, \quad Q'(x) = Q(x) \sum_{j=1}^n \frac{1}{x - b_j}.$$