

Ist das räumliche Gewebe regulär, dann gilt es nach Satz 2: $e_F = e_G \Rightarrow F = G$. Wählt man x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) so, dass das erste Glied der Implikation (VR) erfüllt ist, dann haben wir für die durch Formel (16) definierten F und G $e_F = f(x_1, y_1, z_1) = e_G = f(x_3, y_3, z_3)$, also $F = G$. Die Argumente in den rechten Gliedern von (16) sind aber paarweise gleich, wenn man in die erste Formel (16) $x = x_2, y = y_2, z = z_2$ und in die zweite $x = x_4, y = y_4, z = z_4$ setzt, so dass $f(x_2, y_2, z_2) = f(x_4, y_4, z_4)$ ist. Damit ist es gezeigt, dass die Regularität von (Q, f) die Erfüllung der Bedingung (VR) nach sich zieht.

Ist (VR) erfüllt, dann nehmen wir an, dass $e_F = e_G$ und wollen daraus schliessen, dass $F = G$. Aus $e_F = e_G$ und (16) folgt

$$(17) \quad f(x_1, y_1, z_1) = f(x_3, y_3, z_3).$$

Die Elemente $\xi, \eta, \zeta \in Q$ seien willkürlich gewählt; die Beziehungen

$$(18) \quad \begin{cases} \xi = f(x_2, y_1, z_1) = f(x_4, y_3, z_3) \\ \eta = f(x_1, y_2, z_1) = f(x_3, y_4, z_3) \\ \zeta = f(x_1, y_1, z_2) = f(x_3, y_3, z_4) \end{cases}$$

bestimmen die Elemente $x_2, y_2, z_2, x_4, y_4, z_4$ eindeutig. Aus (17) und (18) bekommt man $f(x_2, y_2, z_2) = f(x_4, y_4, z_4)$. Es folgt

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta, \zeta) &= F[f(x_2, y_1, z_1), f(x_1, y_2, z_1), f(x_1, y_1, z_2)] = f(x_2, y_2, z_2) = \\ &= f(x_4, y_4, z_4) = G[f(x_4, y_3, z_3), f(x_3, y_4, z_3), f(x_3, y_3, z_4)] = G(\xi, \eta, \zeta). \end{aligned}$$

Damit ist auch der zweite Teil des Satzes 3 bewiesen.

Aus diesem Beweis und der Folgerung des Satzes 2 folgt: Ist die Bedingung (VR) für feste Elemente x_1, y_1, z_1 erfüllt, so ist sie allgemein erfüllt.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Aczél J., Belousov V. D., Hosszú M., *Generalized Associativity and Bisymmetry on Quasigroups*. Acta Math. Acad. Sci. Hung., 11, 127–136 (1960).
- [2] Aczél J., Pickert G., Radó F., *Nomogramme, Gewebe und Quasigruppen*. Mathematica, 2 (25), 5–24 (1960).
- [3] Bruck R. H., *A Survey of Binary Systems*. Ergebnisse der Math., N. F. XX., Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.
- [4] Pickert G., *Projektive Ebenen*. Die Grundlehren der Math. Wiss. LXXX, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
- [5] Radó F., *Generalizarea tesuturilor spațiale*. Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. 1, fasc. 1, 41–55 (1960).

Eingegangen am 30. VIII. 1960.

SUR L'APPROXIMATION DES DÉRIVÉES DES FONCTIONS PAR LES DÉRIVÉES CORRESPONDANTES DE CERTAINS POLYNOMES DU TYPE BERNSTEIN

par

D. D. STANCU

à Cluj

1. Dans ce travail nous faisons quelques considérations sur l'évaluation des ordres d'approximation des dérivées d'une fonction $f(x)$, qui sur l'intervalle $[0, 1]$ est continue avec ses dérivées, qui interviendront dans nos considérations, par les dérivées du même ordre du polynome de Bernstein

$$(1) \quad B_m(f; x) = \sum_{i=0}^m p_{m,i}(x) f\left(\frac{i}{m}\right) \quad \left(p_{s,i}(t) = \binom{s}{i} t^i (1-t)^{s-i}\right).$$

Nous donnerons ensuite une évaluation des ordres d'approximation des dérivées partielles d'une fonction de deux variables $f(x, y)$ par les dérivées partielles correspondantes des polynomes du type Bernstein des degrés (m, n) , respectivement m ,

$$(2) \quad B_{m,n}(f; x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_{m,i}(x) p_{n,j}(y) f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right),$$

$$(3) \quad B_m(f; x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} p_m^{i,j}(x, y) f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right),$$

où

$$(4) \quad p_m^{i,j}(x, y) = \binom{m}{i} \binom{m-i}{j} x^i y^j (1-x-y)^{m-i-j},$$

selon que $f(x, y)$ est définie et continue, ainsi que ses dérivées partielles des ordres dont nous avons besoin, sur le carré $D[0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1]$ ou sur le triangle $\Delta[x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0]$.

2. On sait [11] que la dérivée de l'ordre $0 \leq r \leq m$ du polynôme (1) peut être mis sous la forme remarquable suivante

$$(5) \quad B_m^{(r)}(f; x) = m(m-1)(m-2) \dots (m-r+1) \sum_{i=0}^m \phi_{m-r,i}(x) \Delta_{m-1}^{r-1} f\left(\frac{i}{m}\right),$$

où

$$(6) \quad \Delta_{m-1}^{r-1} f\left(\frac{i}{m}\right) = \sum_{v=0}^r (-1)^v \binom{r}{v} f\left(\frac{i+r-v}{m}\right)$$

est la différence de l'ordre r de la fonction $f(x)$, avec le pas $\frac{1}{m}$ et la valeur de départ $\frac{i}{m}$.

En 1932, S. W. WIGERT [11] a démontré que nous avons uniformément sur $[0, 1]$

$$(7) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} B_m^{(r)}(f; x) = f^{(r)}(x).$$

En 1937, T. POPOVICIU [6] a donné une nouvelle démonstration de ce résultat, en établissant l'inégalité suivante, qui nous fournit aussi une indication sur l'ordre d'approximation respectif,

$$(8) \quad |f^{(r)}(x) - B_m^{(r)}(f; x)| < A_{m,r} \omega_r\left(\frac{1}{\sqrt{m-r}}\right) + \frac{r(r-1)}{2m} M_r(f),$$

où $\omega_r(\delta)$ est le module de continuité de la dérivée $f^{(r)}(x)$, et

$$(9) \quad A_{m,r} = \frac{3}{2} + 2 \frac{r\sqrt{m-r}}{m} \leq \frac{3+2\sqrt{r}}{2}, \quad M_r(f) = \sup_{[0,1]} |f^{(r)}(x)|.$$

3. Nous allons d'abord démontrer qu'il a lieu l'inégalité suivante

$$(10) \quad |f^{(r)}(x) - B_m^{(r)}(f; x)| < \left(1 + \frac{2r + \sqrt{m+4r^2-r}}{2\sqrt{m}}\right) \omega_r\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) + \frac{r(r-1)}{2m} M_r(f).$$

En effet, si nous tenons compte de la formule de moyenne bien connue,

$$\Delta_{m-1}^{r-1} f\left(\frac{i}{m}\right) = \frac{1}{m^r} f^{(r)}\left(\frac{i + \theta_i r}{m}\right) \quad (0 < \theta_i < 1)$$

et si nous introduisons la notation

$$(11) \quad C(p, q) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{2}{p}\right) \dots \left(1 - \frac{q-1}{p}\right),$$

p et q étant des nombres naturels tels que $q \leq p$, la formule (5) peut être mise sous la forme

$$B_m^{(r)}(f; x) = C(m, r) \sum_{i=0}^{m-r} \phi_{m-r,i}(x) f^{(r)}\left(\frac{i + \theta_i r}{m}\right).$$

Considérons maintenant le polynôme suivant

$$I_m^{(r)}(f; x) = \frac{1}{C(m, r)} B_m^{(r)}(f; x).$$

En utilisant l'identité

$$(12) \quad \sum_{i=0}^s \phi_{s,i}(t) \equiv 1,$$

ainsi qu'une propriété bien connue du module de continuité, nous pouvons écrire successivement

$$(13') \quad \begin{aligned} |f^{(r)}(x) - I_m^{(r)}(f; x)| &= \left| \sum_{i=0}^{m-r} \phi_{m-r,i}(x) \left[f^{(r)}(x) - f^{(r)}\left(\frac{i + \theta_i r}{m}\right) \right] \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-r} \phi_{m-r,i}(x) \left| f^{(r)}(x) - f^{(r)}\left(\frac{i + \theta_i r}{m}\right) \right| \leq \sum_{i=0}^{m-r} \phi_{m-r,i}(x) \left[\frac{1}{\delta} \left| x - \frac{i + \theta_i r}{m} \right| + 1 \right] \omega_r(\delta) = \\ &= \left[\frac{1}{\delta} \sum_{i=0}^{m-r} \phi_{m-r,i}(x) \left| x - \frac{i + \theta_i r}{m} \right| + 1 \right] \omega_r(\delta). \end{aligned}$$

Si nous tenons compte de l'identité (12), et des suivantes (voir par exemple [5])

$$\sum_{i=0}^s i \phi_{s,i}(t) \equiv st, \quad \sum_{i=0}^s i^2 \phi_{s,i}(t) \equiv st(st+1-t),$$

par l'application de l'inégalité de Cauchy-Buniakovsky, nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{m-r} \phi_{m-r,i}(x) \left| x - \frac{i + \theta_i r}{m} \right| < \sum_{i=0}^{m-r} \phi_{m-r,i}(x) \left(\left| x - \frac{i}{m} \right| + \frac{r}{m} \theta_i \right) <$$

$$< \frac{r}{m} \sum_{i=0}^{m-r} \theta_i \phi_{m-r,i}(x) + \left[\sum_{i=0}^{m-r} \left(x - \frac{i}{m} \right)^2 \phi_{m-r,i}(x) \right]^{\frac{1}{2}} <$$

$$< \frac{r}{m} + \frac{1}{m} [r^2 x^2 + (m-r)x(1-x)]^{\frac{1}{2}}.$$

Vu que

$$x^2 \leq 1, \quad x(1-x) \leq \frac{1}{4},$$

on aboutit à l'inégalité

$$(13) \quad \sum_{i=0}^{m-r} \phi_{m-r,i}(x) \left| x - \frac{i + \theta_i r}{m} \right| < \frac{\sqrt{m+4r^2-r} + 2r}{2m}.$$

De ce fait, l'inégalité (13') devient

$$|f^{(r)}(x) - P_m^{(r)}(f; x)| < \left[\frac{1}{\delta} \left(\frac{\sqrt{m+4r^2-r} + 2r}{2m} \right) + 1 \right] \omega_r(\delta).$$

Si nous choisissons $\delta = m^{-\frac{1}{2}}$, nous obtenons l'inégalité

$$(14) \quad |f^{(r)}(x) - P_m^{(r)}(f; x)| < \left(1 + \frac{r}{\sqrt{m}} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4r^2-r}{m}} \right) \omega_r \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \right).$$

Afin d'aboutir à l'inégalité que nous nous sommes proposés d'établir, écrivons l'identité

$$f^{(r)}(x) - B_m^{(r)}(f; x) = f^{(r)}(x) - P_m^{(r)}(f; x) + [1 - C(m, r)] P_m^{(r)}(f; x).$$

Tenons compte que nous avons

$$(15) \quad 1 - C(p, q) \leq 1 - \left(1 - \frac{1+2+\dots+q-1}{p} \right) = \frac{q(q-1)}{2p} \quad (q \leq p)$$

et que

$$(16) \quad \left| P_m^{(r)}(f; x) \right| = \left| \sum_{i=0}^{m-r} \phi_{m-r,i}(x) f^{(r)} \left(\frac{i + \theta_i r}{m} \right) \right| \leq \sum_{i=0}^{m-r} \phi_{m-r,i}(x) M_r(f) = M_r(f).$$

Nous avons ensuite

$$|f^{(r)}(x) - B_m^{(r)}(f; x)| \leq |f^{(r)}(x) - P_m^{(r)}(f; x)| + [1 - C(m, r)] |P_m^{(r)}(f; x)|.$$

Tenant compte des inégalités (14), (15) et (16) nous obtenons l'inégalité (10) que nous voulions justement établir.

Pour $r = 0$ on en obtient la bien connue inégalité de T. POPOVICIU [4]

$$(17) \quad |f(x) - B_m(f; x)| < \frac{3}{2} \omega \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \right)^*,$$

et pour $s = 1$ on aboutit à l'inégalité

$$|f'(x) - B'_m(f; x)| < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{3}{m}} \right) \omega_1 \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \right).$$

On remarque que de l'inégalité (10) découle également le résultat (7) de WIGERT.

4. Passons maintenant au cas de deux variables.

La dérivée partielle de l'ordre (r, s) , où $0 \leq r \leq m$ et $0 \leq s \leq n$, du polynôme (2) peut être écrite

$$(18) \quad \frac{\partial^{r+s} B_{m,n}(f; x, y)}{\partial x^r \partial y^s} = B_{m,n}^{(r,s)}(f; x, y) =$$

$$= C(m, r) C(n, s) \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} \phi_{m-r,i}(x) \phi_{n-s,j}(y) \Delta_{m-1,n-1}^{r,s} f \left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n} \right),$$

où

$$(19) \quad \Delta_{m-1,n-1}^{r,s} f \left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n} \right) = \sum_{v=0}^r \sum_{\mu=0}^s (-1)^{r+s} \binom{r}{v} \binom{s}{\mu} f \left(\frac{i+r-v}{m}, \frac{j+s-\mu}{n} \right)$$

est la différence de l'ordre (r, s) de la fonction $f(x, y)$, au pas $h = m^{-1}$ pour x , au pas $k = n^{-1}$ pour y et au point de départ $\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n} \right)$.

Si nous tenons compte de la formule de moyenne

$$(20) \quad \Delta_{m-1,n-1}^{r,s} f \left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n} \right) = \frac{1}{m^r n^s} f_{x^r y^s}^{(r,s)} \left(\frac{i + \theta_i r}{m}, \frac{j + \theta'_j s}{n} \right) \quad (0 < \theta_i, \theta'_j < 1),$$

la dérivée de (18) peut être écrite aussi

$$(21) \quad B_{m,n}^{(r,s)}(f; x, y) = \\ = C(m, r) C(n, s) \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} \phi_{m-r,i}(x) \phi_{n-s,j}(y) f_{x^r y^s}^{(r,s)} \left(\frac{i + \theta_i r}{m}, \frac{j + \theta'_j s}{n} \right).$$

*) Une démonstration très simple de cette inégalité, à l'aide de l'inégalité de Cauchy - Buniakovsky, a été donnée par T. POPOVICIU dans [8].

Introduisons la notation

$$P_{m,n}^{(r,s)}(f; x, y) = \frac{1}{C(m, r)C(n, s)} B_{m,n}^{(r,s)}(f; x, y).$$

Dans ce qui suit nous utiliserons le module de continuité $\omega(\delta_1, \delta_2)$ de la fonction $f(x, y)$, que nous définirons ainsi

$$(22) \quad \omega(\delta_1, \delta_2) = \sup |f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|,$$

où (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont deux points du domaine plan considéré, de manière que

$$(23) \quad |x_2 - x_1| \leq \delta_1, \quad |y_2 - y_1| \leq \delta_2.$$

Par la suite nous nous servirons de la suivante propriété de celui-ci

$$(24) \quad \omega(\lambda_1 \delta_1, \lambda_2 \delta_2) \leq (\lambda_1 + \lambda_2 + 1) \omega(\delta_1, \delta_2) \quad (\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0)$$

qui a été démontré en détail par A. F. IPATOV [2].

Compte tenu de l'identité (12) et de l'inégalité précédente, écrite pour la dérivée partielle de l'ordre (r, s) de la fonction $f(x, y)$, nous pouvons écrire

$$(25) \quad |f_{x^r y^s}^{(r,s)}(x, y) - P_{m,n}^{(r,s)}(f; x, y)| \leq \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} p_{m-r,i}(x) p_{n-s,j}(y) \left| f_{x^r y^s}^{(r,s)}\left(x, y\right) - f_{x^r y^s}^{(r,s)}\left(\frac{i + \theta_i r}{m}, \frac{j + \theta_j s}{n}\right) \right|.$$

Mais si $\omega_{r,s}(\delta_1, \delta_2)$ est le module de continuité de la dérivée partielle de l'ordre (r, s) de la fonction $f(x, y)$, nous avons

$$\begin{aligned} & \left| f_{x^r y^s}^{(r,s)}(x, y) - f_{x^r y^s}^{(r,s)}\left(\frac{i + \theta_i r}{m}, \frac{j + \theta_j s}{n}\right) \right| \leq \\ & \leq \omega_{r,s}\left(\frac{1}{\delta_1} \left|x - \frac{i + \theta_i r}{m}\right|, \frac{1}{\delta_2} \left|y - \frac{j + \theta_j s}{n}\right|\right) \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{\delta_1} \left|x - \frac{i + \theta_i r}{m}\right| + \frac{1}{\delta_2} \left|y - \frac{j + \theta_j s}{n}\right| + 1\right) \omega_{r,s}(\delta_1, \delta_2), \end{aligned}$$

conformément à l'inégalité (24).

Vu que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} p_{m-r,i}(x) p_{n-s,j}(y) \left| x - \frac{i + \theta_i r}{m} \right| = \\ & = \sum_{i=0}^{m-r} p_{m-r}(x) \left| x - \frac{i + \theta_i r}{m} \right| < \frac{2r + \sqrt{m + 4r^2 - r}}{2m}, \end{aligned}$$

et

$$\sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} p_{m-r,i}(x) p_{n-s,j}(y) \left| y - \frac{j + \theta_j s}{n} \right| < \frac{2s + \sqrt{n + 4s^2 - s}}{2n},$$

l'inégalité (25) devient

$$\begin{aligned} & |f_{x^r y^s}^{(r,s)}(x, y) - P_{m,n}^{(r,s)}(f; x, y)| < \\ & \left[\frac{1}{\delta_1} \left(\frac{2r + \sqrt{m + 4r^2 - r}}{2m} \right) + \frac{1}{\delta_2} \left(\frac{2s + \sqrt{n + 4s^2 - s}}{2n} \right) + 1 \right] \omega_{r,s}(\delta_1, \delta_2). \end{aligned}$$

Si nous prenons $\delta_1 = m^{-\frac{1}{2}}$ et $\delta_2 = n^{-\frac{1}{2}}$, nous obtenons

$$(26) \quad |f_{x^r y^s}^{(r,s)}(x, y) - P_{m,n}^{(r,s)}(f; x, y)| < A_{m,n}^{r,s} \omega_{r,s}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

où

$$(27) \quad A_{m,n}^{r,s} = 1 + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4r^2 - r}{m}} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4s^2 - s}{n}} + \frac{r}{\sqrt{m}} + \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Ayons en vue que

$$|P_{m,n}^{(r,s)}(f; x, y)| \leq \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} p_{m-r,i}(x) p_{n-s,j}(y) \left| f_{x^r y^s}^{(r,s)}\left(\frac{i + \theta_i r}{m}, \frac{j + \theta_j s}{n}\right) \right| \leq M_{r,s}(f),$$

où

$$(28) \quad M_{r,s}(f) = \sup_D |f_{x^r y^s}^{(r,s)}(x, y)|,$$

et que

$$\begin{aligned} (29) \quad & 1 - C(m, r) C(n, s) = \\ & = [1 - C(m, r)][1 - C(n, s)] + C(m, r)[1 - C(n, s)] + C(n, s)[1 - C(m, r)] \leq \\ & \leq \frac{r(r-1)}{2m} \frac{s(s-1)}{2n} + \frac{r(r-1)}{2m} + \frac{s(s-1)}{2n} = B_{m,n}^{r,s}, \end{aligned}$$

car $C(p, q) < 1$.

On remarque que l'on peut écrire

$$(30) \quad |f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x, y) - B_{m,n}^{(r,s)}(f; x, y)| = \\ = |f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x, y) - P_{m,n}^{(r,s)}(f; x, y) + [1 - C(m, r)C(n, s)]P_{m,n}^{(r,s)}(f; x, y)| \leq \\ \leq |f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x, y) - P_{m,n}^{(r,s)}(f; x, y)| + [1 - C(m, r)C(n, s)]|P_{m,n}^{(r,s)}(f; x, y)|.$$

Si nous utilisons (26), (28) et (29), cette inégalité nous conduit justement à l'inégalité que nous avons proposée d'établir

$$(31) \quad \left| \frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} - \frac{\partial^{r+s} B_{m,n}(f; x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right| < A_{m,n}^{r,s} \omega_{r,s} \left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + B_{m,n}^{r,s} M_{r,s}(f),$$

valable, en générale, lorsque toutes les dérivées partielles $\frac{\partial^{v+\mu} f(x, y)}{\partial x^v \partial y^\mu}$ ($0 \leq v + \mu \leq r + s$) existent et sont continues sur D .

Il en résulte que nous avons uniformément sur le carré D

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{\partial^{r+s} B_{m,n}(f; x, y)}{\partial x^r \partial y^s} = \frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s},$$

résultat qui a été obtenu, par d'autres voies, par H. KINGSLEY [4] et A. F. IPATOV [3]. Dans des hypothèses un peu plus larges, un résultat de même genre a été obtenu par P. L. BUTZER [1].

Pour $r = s = 0$ on obtient de (31) l'inégalité de A. F. IPATOV [2]

$$|f(x, y) - B_{m,n}(f; x, y)| < \omega \left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Dans le cas de $r = s = 1$, on obtient

$$\left| \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 B_{m,n}(f; x, y)}{\partial x \partial y} \right| < \\ < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{3}{m}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{3}{n}} \right) \omega_{1,1} \left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Si $f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x, y)$ satisfait la condition de Lipschitz

$$(32) \quad |f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x_2, y_2) - f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x_1, y_1)| < A |x_2 - x_1|^\alpha + B |y_2 - y_1|^\beta$$

$$(0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1, A > 0, B > 0),$$

alors l'inégalité (31) se réduit à la suivante

$$\left| \frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} - \frac{\partial^{r+s} B_{m,n}(f; x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right| < \\ < A_{m,n}^{r,s} \left(\frac{A}{\sqrt{m}^\alpha} + \frac{B}{\sqrt{n}^\beta} \right) + B_{m,n}^{r,s} M_{r,s}(f).$$

5. Si nous utiliserons la définition suivante pour le module de continuité de la fonction $f(x, y)$,

$$\omega(\delta) = \sup |f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|,$$

ou (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont deux points du domaine plane considéré, de manière que $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \leq \delta$, et nous nous servirons de la suivante propriété de celui-ci

$$\omega(\lambda \delta) \leq (\lambda + 1) \omega(\delta) \quad (\lambda > 0)$$

nous obtenons

$$|f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x, y) - P_{m,n}^{(r,s)}(f; x, y)| < \\ < \left[\frac{1}{\delta} \left(\frac{2r + \sqrt{m + 4r^2} - r}{2m} + \frac{2s + \sqrt{n + 4s^2} - s}{2n} \right) + 1 \right] \omega_{r,s}(\delta),$$

où $\omega_{r,s}(\delta)$ est le module de continuité de la dérivée partielle $f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x, y)$.

Si nous prenons $\delta = m^{-\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}}$ nous trouvons

$$(33) \quad |f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x, y) - P_{m,n}^{(r,s)}(f; x, y)| < L_{m,n}^{r,s} \omega_{r,s} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right),$$

où

$$(34) \quad L_{m,n}^{r,s} = 1 + \left(\frac{r}{\sqrt{m}} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4r^2 - r}{m}} \right) \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}} + \\ + \left(\frac{s}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4s^2 - s}{n}} \right) \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}}.$$

On constate que nous avons

$$L_{m,n}^{r,s} < A_{m,n}^{r,s}.$$

En tenant compte de (30), (33), (34) et (27), on obtient l'inégalité suivante

$$(35) \quad \left| \frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} - \frac{\partial^{r+s} B_{m,n}(f; x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right| < L_{m,n}^{r,s} \omega_{r,s} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + B_{m,n}^{r,s} M_{r,s}(f).$$

Pour $r = s = 0$ cette inégalité se réduit à

$$|f(x, y) - B_{m,n}(f; x, y)| < \frac{3}{2} \omega \left(\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right),$$

inégalité qui a été établie pour la première fois par T. POPOVICIU [6].

Dans le cas de $r = s = 1$, on obtient

$$\left| \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 B_{m,n}(f; x, y)}{\partial x \partial y} \right| < L_{m,n}^{1,1} \omega_{1,1} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

6. Occupons-nous maintenant du cas des polynômes (3), à l'aide des quels nous avons déjà obtenu certains résultats dans les notes [9] et [10].

La fonction $f(x, y)$ est supposée être continue avec ses dérivées partielles, que nous considérerons, sur le domaine triangulaire $\Delta: x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

Dans le travail [9] nous avons donné la formule suivante qui nous sera maintenant très utile,

$$\frac{\partial^{r+s} B_m(f; x, y)}{\partial x^r \partial y^s} = m(m-1)(m-2) \dots (m-r-s+1) \times \\ \times \sum_{i=0}^{m-r-s} \sum_{j=0}^{m-r-s-i} p_{m-r-s}^{i,j}(x, y) \Delta_{m-1}^{r,s} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right).$$

Considérons le polynôme

$$Q_m^{(r,s)}(f; x, y) = \frac{1}{C(m, r+s)} \frac{\partial^{r+s} B_m(f; x, y)}{\partial x^r \partial y^s}.$$

Nous avons

$$(36) \quad |f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x, y) - Q_m^{(r,s)}(f; x, y)| \leq \\ \leq \sum_{i=0}^{m-r-s} \sum_{j=0}^{m-r-s-i} p_{m-r-s}^{i,j}(x, y) \left| f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x, y) - f_{x^r y^s}^{(r+s)}\left(\frac{i+\theta_i r}{m}, \frac{j+\theta_j s}{m}\right) \right|.$$

Si nous utilisons la définition donnée à no. 4 pour le module de continuité, nous pouvons écrire

$$(37) \quad \left| f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x, y) - f_{x^r y^s}^{(r+s)}\left(\frac{i+\theta_i r}{m}, \frac{j+\theta_j s}{m}\right) \right| \leq \\ \leq \left(\frac{1}{\delta_1} \left| x - \frac{i+\theta_i r}{m} \right| + \frac{1}{\delta_2} \left| y - \frac{j+\theta_j s}{m} \right| + 1 \right) \omega_{r,s}(\delta_1, \delta_2).$$

En nous servant de nouveau de l'inégalité de Cauchy-Buniakovsky, nous obtenons

$$(38) \quad \sum_{i=0}^{m-r-s} \sum_{j=0}^{m-r-s-i} p_{m-r-s}^{i,j}(x, y) \left| x - \frac{i+\theta_i r}{m} \right| = \\ = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-r-s} \binom{m-r-s}{i} x^i (1-x)^{m-r-s-i} |mx - \theta_i r - i| \leq \\ \leq \frac{1}{m} \left[\sum_{i=0}^{m-r-s} p_{m-r-s,i}(x) |mx - i| + r \sum_{i=0}^{m-r-s} \theta_i p_{m-r-s,i}(x) \right] < \\ < \frac{r}{m} + \frac{1}{m} [(r+s)^2 x^2 + (m-r-s)x(1-x)]^{\frac{1}{2}} < \frac{2r + \sqrt{m + 4(r+s)^2 - r - s}}{2m}.$$

On montrera aussi que

$$(38') \quad \sum_{i=0}^{m-r-s} \sum_{j=0}^{m-r-s-i} p_{m-r-s}^{i,j}(x, y) \left| y - \frac{j+\theta_j s}{m} \right| < \frac{2s + \sqrt{m + 4(r+s)^2 - r - s}}{2m}.$$

Ainsi à l'aide de (37), (38), (38') et d'identité

$$\sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{r-i} p_{r-i}^{i,j}(x, y) \equiv 1,$$

l'inégalité (36) devient $|f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x, y) - O_m^{(r,s)}(f; x, y)| <$

$$< \left(1 + \frac{2r + \sqrt{m + 4(r+s)^2 - r - s}}{2\delta_1 m} + \frac{2s + \sqrt{m + 4(r+s)^2 - r - s}}{2\delta_2 m} \right) \omega_{r,s}(\delta_1, \delta_2).$$

Pour $\delta_1 = \delta_2 = m^{-\frac{1}{2}}$, cette inégalité se réduit à

$$(39) \quad |f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x, y) - Q_m^{(r,s)}(f; x, y)| < \left(1 + \frac{r+s + \sqrt{m + 4(r+s)^2 - r - s}}{\sqrt{m}} \right) \omega_{r,s}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{m}}\right).$$

On constate que nous pouvons écrire

$$(40) \quad \left| \frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} - \frac{\partial^{r+s} B_m(f; x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right| \leq \left| \frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} - Q_m^{(r,s)}(f; x, y) \right| + C(m, r+s) |Q_m^{(r,s)}(f; x, y)|.$$

En tenant compte de (39) et du fait que

$$|Q_m^{(r,s)}(f; x, y)| \leq \sum_{i=0}^{m-r-s} \sum_{j=0}^{m-r-s-i} p_{m-r-s}^{i,j}(x, y) \left| f_{x^i y^j}^{(r+s)}\left(\frac{i + \theta_i r}{m}, \frac{j + \theta_j s}{m}\right) \right| \leq M'_{r,s}(f) = \sup_{\Delta} |f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x, y)|,$$

ceci nous conduit à l'inégalité suivante, analogue aux inégalités (10) et (31)

$$\left| \frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} - \frac{\partial^{r+s} B_m(f; x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right| < \left(1 + \frac{r+s + \sqrt{m + 4(r+s)^2 - r - s}}{\sqrt{m}} \right) \omega_{r,s}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{m}}\right) + \frac{(r+s)(r+s-1)}{2m} M'_{r,s}(f)$$

qui a lieu, en général, si toutes les dérivées partielles de $f(x, y)$ d'ordres $\leq r+s$ existent et sont continues sur Δ .

Si $r = s = 0$, nous obtenons

$$|f(x, y) - B_m(f; x, y)| < 2 \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{m}}\right).$$

De (40) résulte que nous avons uniformément sur le triangle Δ

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial^{r+s} B_m(f; x, y)}{\partial x^r \partial y^s} = \frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}.$$

Si $f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x, y)$ satisfait la condition de Lipschitz (32) — sur le triangle Δ —, alors l'inégalité (42) peut être simplifiée, car

$$\omega_{r,s}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{m}}\right) \leq \frac{A}{\sqrt{m^a}} + \frac{B}{\sqrt{m^b}}.$$

7. Par l'utilisation de la définition donnée au no. 5 pour le module de continuité, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & |f_{x^r y^s}^{(r+s)}(x, y) - Q_m^{(r,s)}(f; x, y)| \leq \\ & \leq \sum_{i=0}^{m-r-s} \sum_{j=0}^{m-r-s-i} p_{m-r-s}^{i,j}(x, y) \left| f_{x^i y^j}^{(r+s)}\left(\frac{i + \theta_i r}{m}, \frac{j + \theta_j s}{m}\right) - f_{x^i y^j}^{(r+s)}(x, y) \right| \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{\delta} \sum_{i=0}^{m-r-s} \sum_{j=0}^{m-r-s-i} p_{m-r-s}^{i,j}(x, y) \left[\left| x - \frac{i + \theta_i r}{m} \right| + \left| y - \frac{j + \theta_j s}{m} \right| \right] + 1 \right) \omega_{r,s}(\delta). \end{aligned}$$

Compte tenu de (38), (38'), (40) et (41), si nous prenons $\delta = m^{-\frac{1}{2}}$, nous obtenons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} - \frac{\partial^{r+s} B_m(f; x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right| < \\ & < \left(1 + \frac{r+s + \sqrt{m + 4(r+s)^2 - r - s}}{\sqrt{m}} \right) \omega_{r,s}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) + \frac{(r+s)(r+s-1)}{2m} M'_{r,s}(f). \end{aligned}$$

A cette occasion nous avons amélioré une inégalité que nous avons donnée dans la note [9].

Pour $r = 0$ on aboutit à l'inégalité

$$|f(x, y) - B_m(f; x, y)| < 2 \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

que nous avons obtenue aussi dans [9].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Butzer P. L., *On two-dimensional Bernstein polynomials*. Canad. J. Math., 5, No. 1, 107—113 (1953).
- [2] Ипатов А. Ф., *Оценка погрешности и порядок приближения функций двух переменных, полиномами С. Н. Бернштейна*. Уч. Зап. Петрозаводского Ун-та, 4, №. 4, 31—48 (1955).
- [3] Ипатов А. Ф., *Некоторые теоремы сходимости полиномов $B_{n,m}(f; x, y)$ скелетов $f(r, s) \in S$ и дифференцированных полиномов*. Уч. Зап. Петрозаводского Ун-та, 4, №. 4, 49—58 (1955).
- [4] Kingsely E. H., *Bernstein polynomials for functions of two variables of class $C^{(k)}$* . Proc. Amer. Math. Soc., 2, No. 1, 64—71 (1951).
- [5] Натансон И. П., *Конструктивная теория функций*. М—Л., 1949.
- [6] Popoviciu T., *Despre cea mai bună aproximație a funcțiilor continue prin polinoame*. Cluj, 1937.
- [7] Popoviciu T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*. Mathematica, 10, 49—54 (1934).
- [8] Popoviciu T., *Sur l'approximation des fonctions continues d'un variable réelle par des polynomes*. Annales Sci. de l'Univ. de Jassy, 28, fs. 1, 208, 1942.
- [9] Stancu D. D., *Asupra aproximării prin polinoame de tip Bernstein a funcțiilor de două variabile*. Comunicările Acad. R.P.R., 9, No. 8, 773—777 (1959).
- [10] Stancu D. D., *Asupra aproximării funcțiilor de două variabile prin polinoame de tip Bernstein. Cîteva evaluări asimptotice*. Studii și Cerc. Matem., Cluj, 11, No. 1—2, 1960 (sous presse).
- [11] Wigert S., *Sur l'approximation par polynomes des fonctions continues*. Arkiv för Mat. Astr. Fys., 22, No. 9, 1—4 (1932).

Reçu le 21. mars. 1960.

О ЦЕПЯХ С ПОЛНЫМИ СВЯЗЯМИ*)

Р. ТЕОДОРЕСКУ

Бухарест

Понятия цепи с полными связями введено в теорию вероятностей О. ОНИЧЕСКУ и Г. МИХОКОМ в работе [32].

Это понятие берёт своё происхождение в стремление авторов найти наиболее общий вид зависимости между различными случайными величинами. Это понятие было немедленно обобщено В. ДЕБЛИНОМ и Р. ФОРТЕ а затем Р. ФОРТЕ [11] в его диссертации. Систематическое изучение этих цепей принадлежит главным образом румынским математикам.

Материал, касающийся цепей с полными связями разбросан по различным журнальным работам и монографиям.

Учитывая важность и актуальность этой новой но уже хорошо очерченной главы теории случайных процессов, мы сочли подходящим дать краткий обзор этой области, останавливаясь главным образом на центральных результатах.

1. Понятие цепи с полными связями

Рассмотрим последовательность случайных величин

$$(1) \quad \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$$

принимающих каждая то же конечное множество значений $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_{m+1})$; для удобства мы их будем предполагать действительными числами, т. е. $\omega_j \in R$, $1 \leq j \leq m+1$. Предположим при этом, что

*) Подробное изложение этого вопроса можно найти в недавно опубликованной монографии: G. CIUCU, R. THEODORESCU, *Procese cu legături complete*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1960.