MATHEMATICA VOL. 2 (25), 1, 1960, pp. 55 – 142

FORMULES DE QUADRATURE À NOEUDS EXTÉRIEURS

par

D. V. IONESCU

à Cluj

Dans ce travail nous allons étudier des formules de quadrature à noeuds extérieurs à l'intervalle d'intégration et nous ferons une étude en détail de leurs restes. Nous ferons aussi une comparaison entre les bornes supérieures des valeurs absolues des restes des formules de quadrature à noeuds extérieurs et de certaines formules de quadrature à noeuds intérieurs, d'où il résultera que les formules à noeuds intérieurs que nous considérons dans ce travail sont préférables aux formules de quadrature à noeuds extérieurs.

Dans ce travail on insiste sur les formules de quadrature à noeuds extérieurs qui proviennent des formules d'interpolation de Newton à noeuds en progression arithmétique à gauche, de Bessel et de Stirling.

On sait que certaines formules d'intégration numérique des équations differentielles, par exemple les formules d'Adams, Nyström ou Störmer, s'obtiennent en utilisant des formules de quadrature qui proviennent des formules d'interpolation de Newton à noeuds en progression arithmétique à gauche.

Nous donnerons dans un autre travail, la discussion de ces formules d'intégration numérique, en tenant compte des résultats de ce travail.

§ 1. Formules à noeuds simples

1. Considérons l'intégrale

$$I = \int_a^b p(x)\, f(x)\, dx, \tag{1}$$

où la fonction $f(x)$ est de la classe C^{n+m} dans un intervalle $[\alpha, \beta]$ comprenant l'intervalle $[a, b]$, ce qui veut dire que la fonction $f(x)$ est continue ainsi que ses premières $n+m$ dérivées dans l'intervalle $[\alpha,\beta]$ et supposons que $p(x)$ soit une fonction continue positive dans l'intervalle $[a,b]$, pouvant s'annuler aux extrémités de cet intervalle. A l'intégrale (1) nous attachons les noeuds $x_1', x_2', \ldots, x_m'$ à droite de b en ordre croissant et les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à gauche de a, en ordre décroissant, tous ces noeuds appartenant à l'intervalle $[\alpha,\beta]$. Nous voulons établir une formule de quadrature de la forme

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx = A_1f(x_1)+A_2f(x_2)+\ldots+A_nf(x_n)+ \tag{2}$$
$$+A_1'f(x_1')+A_2'f(x_2')+\ldots+A_m'f(x_m')+R$$

et étudier son reste.

Nous attachons aux intervalles $[x_n, x_{n-1}], \ldots, [a,b], \ldots, [x_{m-1}', x_m']$ les fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x), \ldots, \varphi_{n+m+1}(x)$, intégrales des équations différentilles [1]

$$\varphi_i^{(n+m)}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } i\neq n+1\\ p(x) & \text{si } i=n+1.\end{cases} \tag{3}$$

Nous pourons écrire alors l'intégrale (1) sous la forme

$$I=\int_{x_n}^{x_{n-1}}\varphi_1^{(n+m)}(x)\,f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_1}^{a}\varphi_n^{(n+m)}(x)\,f(x)\,dx+ \tag{4}$$
$$+\int_a^b\varphi_{n+1}^{(n+m)}(x)f(x)\,dx+\int_b^{x_1'}\varphi_{n+2}^{(n+m)}(x)f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_{m-1}'}^{x_m'}\varphi_{n+m+1}^{(n+m)}(x)\,f(x)\,dx.$$

Nous appliquerons à chaque intégrale de la formule (4), la formule généralisée d'intégration par parties, et nous aurons

$$I=\big[\varphi_1^{(n+m-1)}(x)\,f(x)-\varphi_1^{(n+m-2)}(x)f'(x)+\ldots+ \tag{5}$$
$$+(-1)^{n+m-1}\varphi_1(x)\,f^{(n+m-1)}(x)\big]_{x_n}^{x_{n-1}}+(-1)^{n+m}\int_{x_n}^{x_{n-1}}\varphi_1(x)\,f^{(n+m)}(x)\,dx+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+\big[\varphi_n^{(n+m-1)}(x)f(x)-\varphi_n^{(n+m-2)}(x)f'(x)+\ldots+(-1)^{n+m-1}\varphi_n(x)f^{(n+m-1)}(x)\big]_{x_1}^{a}+$$
$$+(-1)^{n+m}\int_{x}^{a}\varphi_n(x)\,f^{(n+m)}(x)\,dx+$$

$$+\big[\varphi_{n+1}^{(n+m-1)}(x)f(x)-\varphi_{n+1}^{(n+m-2)}(x)f'(x)+\ldots+(-1)^{n+m-1}\varphi_{n+1}(x)f^{(n+m-1)}(x)\big]_a^b+$$
$$+(-1)^{n+m}\int_a^b\varphi_{n+1}(x)f^{(n+m)}(x)\,dx+$$
$$+\big[\varphi_{n+2}^{(n+m-1)}(x)f(x)-\varphi_{n+2}^{(n+m-2)}(x)f'(x)+\ldots+(-1)^{n+m-1}\varphi_{n+2}(x)f^{(n+m-1)}(x)\big]_b^{x_1'}+$$
$$+(-1)^{n+m}\int_b^{x_1'}\varphi_{n+2}(x)\,f^{(n+m)}(x)dx+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+\big[\varphi_{n+m+1}^{(n+m-1)}(x)f(x)-\varphi_{n+m+1}^{(n+m-2)}(x)f'(x)+\ldots+(-1)^{n+m-1}\varphi_{n+m+1}(x)f^{(n+m-1)}(x)\big]_{x_{m-1}'}^{x_m'}+$$
$$+(-1)^{n+m}\int_{x_{m-1}'}^{x_m'}\varphi_{n+m+1}(x)f^{(n+m)}(x)\,dx.$$

Si nous imposons aux fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+m+1}(x)$ les conditions aux limites

$$\varphi_1(x_n)=0,\ \varphi_1'(x_n)=0,\ \ldots,\ \varphi_1^{(n+m-2)}(x_n)=0, \tag{6}$$

$$\begin{cases}\varphi_2(x_{n-1})=\varphi_1(x_{n-1}),\ \varphi_2'(x_{n-1})=\varphi_1'(x_{n-1}),\ \ldots,\\ \quad\ldots,\ \varphi_2^{(n+m-2)}(x_{n-1})=\varphi_1^{(n+m-2)}(x_{n-1}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_n(x_1)=\varphi_{n-1}(x_1),\ \varphi_n'(x_1)=\varphi_{n-1}'(x_1),\ldots,\ \varphi_n^{(n+m-2)}(x_1)=\varphi_{n-1}^{(n+m-2)}(x_1).\end{cases} \tag{7}$$

$$\varphi_{n+1}(a)=\varphi_n(a),\ \varphi_{n+1}'(a)=\varphi_n'(a),\ \ldots,\ \varphi_{n+1}^{(n+m-2)}(a)=\varphi_n^{(n+m-2)}(a), \tag{8}$$
$$\varphi_{n+1}^{(n+m-1)}(a)=\varphi_n^{(n+m-1)}(a),$$

$$\varphi_{n+2}(b)=\varphi_{n+1}(b),\ \varphi_{n+2}'(b)=\varphi_{n+1}'(b),\ldots,\ \varphi_{n+2}^{(n+m-2)}(b)=\varphi_{n+1}^{(n+m-2)}(b), \tag{9}$$
$$\varphi_n^{(n+m-1)}(b)=\varphi_{n+1}^{(n+m-1)}(b)$$

$$\begin{cases}\varphi_{n+3}(x_1')=\varphi_{n+2}(x_1'),\ \varphi_{n+3}'(x_1')=\varphi_{n+2}'(x_1'),\ldots,\\ \quad\ldots,\ \varphi_{n+3}^{(n+m-2)}(x_1')=\varphi_{n+2}^{(n+m-2)}(x_1'),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_{n+m+1}(x_{m-1}')=\varphi_{n+m}(x_{m-1}'),\ \varphi_{n+m+1}'(x_{m-1}')=\varphi_{n+m}'(x_{m-1}'),\ldots,\\ \quad\varphi_{n+m+1}^{(n+m-2)}(x_{m-1}')=\varphi_{n+m}^{(n+m-2)}(x_{m-1}')\end{cases} \tag{10}$$

$$\varphi_{n+m+1}(x_m')=0,\ \varphi_{n+m+1}'(x_m')=0,\ldots,\ \varphi_{n+m+1}^{(n+m-2)}(x_m')=0, \tag{11}$$

alors, la formule (5) se réduit à

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = A_1f(x_1) + A_2f(x_2) + \dots + A_nf(x_n) + \tag{12}$$

$$+ A_1'f(x_1') + \dots + A_m'f(x_m') + (-1)^{n+m}\int_{x_n}^{x_m'} \varphi(x)f^{(n+m)}(x)dx.$$

Nous avons donc obtenu une formule de quadrature de la forme (2) pour laquelle le reste R est nul lorsque la fonction $f(x)$ est remplacée par un polynome quelconque de degré $n + m - 1$

Dans la formule (12), nous avons

$$\tag{13} \begin{cases} A_n = -\varphi_1^{(n+m-1)}(x_n) \\ A_{n-1} = \varphi_1^{(n+m-1)}(x_{n-1}) - \varphi_2^{(n+m-1)}(x_{n-1}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_1 = \varphi_{n-1}^{(n+m-1)}(x_1) - \varphi_n^{(n+m-1)}(x_1) \\ A_1' = \varphi_{n+2}^{(n+m-1)}(x_1') - \varphi_{n+3}^{(n+m-1)}(x_1') \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{m-1}' = \varphi_{n+m}^{(n+m-1)}(x_{m-1}') - \varphi_{n+m+1}^{(n+m-1)}(x_{m-1}') \\ A_m' = \varphi_{n+m+1}^{(n+m-1)}(x_m') \end{cases}$$

et le reste R est donné par

$$R = (-1)^{n+m}\int_{x_n}^{x_m'} \varphi(x)\,f^{(n+m)}(x)dx, \tag{14}$$

où la fonction $\varphi(x)$ coïncide successivement avec $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n+m+1}(x)$ dans les intervalles $[x_n, x_{n-1}]$, $[x_{n-1}, x_{n-2}]$, ..., $[x_{m-1}', x_m']$.

2. *Détermination des coefficients A_i et A_k'.* Pour déterminer le coefficient A_i de la formule (12) nous remplacerons $f(x)$ par le polynome $P_i(x)$, nul sur tous les noeuds, sauf le noeud x_i où il prend la valeur 1. Nous avons

$$P_i(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})}\cdot\frac{(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}\cdot\frac{(x-x_1')\dots(x-x_m')}{(x_i-x_1')\dots(x_i-x_m')}. \tag{15}$$

Le polynome $P_i(x)$ ayant le degre $n + m - 1$, la formule (12) nous donne

$$A_i = \int_a^b P_i(x)dx. \tag{16}$$

A_i a le signe de $(-1)^{i-1}$. En effet nous remarquerons que si $x \in [a, b]$ nous avons $\dfrac{x-x_k'}{x_i-x_k'} > 0$, pour $k = 1, 2, \dots, m$; de même nous avons $\dfrac{x-x_{i+l}}{x_i-x_{i+l}} > 0$ pour $l = 1, 2, \dots, n-i$; enfin nous avons $\dfrac{x-x_j}{x_i-x_j} < 0$, pour $j = 1, 2, \dots, i-1$.

Donc, le polynome $P_i(x)$ a le signe de $(-1)^{i-1}$ dans l'intervalle $[a, b]$ et alors il résulte d'après la formule (16) que A_i a le signe de $(-1)^{i-1}$.

Pour déterminer le coefficient A_k' de la formule (12) nous remplaçons $f(x)$ par le polynome $Q_k(x)$, nul sur tous les noeuds, sauf le noeud x_k' où il prend la valeur 1.

Nous avons

$$Q_k(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_k'-x_1)\dots(x_k'-x_n)}\cdot\frac{(x-x_1')\dots(x-x_{k-1}')}{(x_k'-x_1')\dots(x_k'-x_{k-1}')}\cdot\frac{(x-x_{k+1}')\dots(x-x_m')}{(x_k'-x_{k+1}')\dots(x_k'-x_m')}. \tag{17}$$

Le polynome $Q_k(x)$ ayant le degré $n + m - 1$, la formule (12) nous donne

$$A_k' = \int_a^b Q_k(x)\,dx. \tag{18}$$

A_k' a le signe de $(-1)^{k-1}$. En effet nous remarquons que si $x \in [a, b]$, nous avons $\dfrac{x-x_i}{x_k'-x_i} > 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$; de même nous avons $\dfrac{x-x_{k+l}'}{x_k'-x_{k+l}'} > 0$ pour $l = 1, 2, \dots, m-k$; enfin nous avons $\dfrac{x-x_j'}{x_k'-x_j'} < 0$ pour $j = 1, 2, \dots, k-1$.

Donc, le polynome $Q_k(x)$ a le signe de $(-1)^{k-1}$, dans l'intervalle $[a, b]$, et par suite A_k' a le signe de $(-1)^{k-1}$.

Les signes de $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont donc alternants, A_1 étant positif. De même les signes de $A_1', A_2', \dots, A_m'$ sont alternants, A_1' étant positif.

3. *Dans la formule de quadrature* (12) *le reste R ne peut pas s'annuler lorsqu'on remplace $f(x)$ par un polynome quelconque de degré plus grand que $m + n - 1$.* En effet si le reste R de la formule (12) était nul lorsque $f(x)$ est remplacée par un polynome de degré plus grand que $m + n - 1$, la formule (12) devrait être vérifiée par le polynome

$$P(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\dots(x-x_n)^{\alpha_n}(x_1'-x)^{\alpha_1'}(x_2'-x)^{\alpha_2'}\dots(x_m'-x)^{\alpha_m'}$$

où $\alpha_i \geqq 1$ et $\alpha_k' \geqq 1$. Dans ce cas le polynome $P(x)$ étant positif dans l'intervalle $[a, b]$ le premier membre de la formule (12) serait positif, tandis que le second membre serait nul, ce qui est impossible.

En particulier, il résulte qu'il *n'existe pas une formule de quadrature à noeuds extérieurs qui soit du type de Gauss.*

4. *Détermination des fonctions* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+m+1}(x)$. Les équations différentielles (3) et les conditions aux limites (6), (7), (8), (9), (10), (11) déterminent les fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+m+1}(x)$.

En effet, les premières n équations différentielles (3) et les conditions aux limites (6) et (7) nous donnent

$$
(19)\quad \begin{cases}
\varphi_1(x) = \lambda_n \dfrac{(x-x_n)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} \\[2ex]
\varphi_2(x) = \lambda_n \dfrac{(x-x_n)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \lambda_{n-1} \dfrac{(x-x_{n-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\varphi_n(x) = \lambda_n \dfrac{(x-x_n)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \lambda_{n-1} \dfrac{(x-x_{n-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \ldots + \\[2ex]
\qquad\qquad + \lambda_1 \dfrac{(x-x_1)^{n+m-1}}{(n+m-1)!},
\end{cases}
$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des constantes arbitraires.

De même les dernières m équations différentielles (3) et les conditions aux limites (10), (11) nous donnent

$$
(20)\quad \begin{cases}
\varphi_{n+m+1}(x) = \mu_m \dfrac{(x-x'_m)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} \\[2ex]
\varphi_{n+m}(x) = \mu_m \dfrac{(x-x'_m)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \mu_{m-1} \dfrac{(x-x'_{m-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\varphi_{n+2}(x) = \mu_m \dfrac{(x-x'_m)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \mu_{m-1} \dfrac{(x-x'_{m-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \ldots + \\[2ex]
\qquad\qquad + \mu_1 \dfrac{(x-x'_1)^{n+m-1}}{(n+m-1)!};
\end{cases}
$$

où $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ sont des constantes arbitraires.

La $(n+1)$-ème équation (3) et les conditions aux limites (8) donnent

$$
(21)\quad \varphi_{n+1}(x) = \int_a^x \frac{(x-s)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} p(s)ds + \lambda_n \frac{(x-x_n)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \ldots + \lambda_1 \frac{(x-x_1)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}.
$$

En écrivant que les fonctions $\varphi_{n+1}(x)$, $\varphi_{n+2}(x)$ ainsi déterminées vérifient les conditions aux limites (9), nous avons le système d'équations

$$
\mu_1 + \ldots\ldots + \mu_m - \lambda_1 - \ldots\ldots - \lambda_n = \int_a^b p(s)ds
$$

$$
\mu_1 \frac{b-x'_1}{1!} + \ldots + \mu_m \frac{b-x'_m}{1!} - \lambda_1 \frac{b-x_1}{1!} - \ldots - \lambda_n \frac{b-x_n}{1!} = \int_a^b p(s)(b-s)ds
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$$
\mu_1 \frac{(b-x'_1)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \ldots + \mu_m \frac{(b-x'_m)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} - \lambda_1 \frac{(b-x_1)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} - \ldots - \lambda_n \frac{(b-x_n)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} =
$$

$$
= \int_a^b \frac{p(s)(b-s)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} ds,
$$

ou

$$
(22)\quad \begin{cases}
\mu_1 + \ldots + \mu_m - \lambda_1 - \ldots - \lambda_n = \displaystyle\int_a^b p(s)ds \\[2ex]
\mu_1 x'_1 + \ldots + \mu_m x'_m - \lambda_1 x_1 - \ldots - \lambda_n x_n = \displaystyle\int_a^b p(s)s\,ds \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\mu_1 x_1'^{n+m-1} + \ldots + \mu_m x_m'^{n+m-1} - \lambda_1 x_1^{n+m-1} - \ldots - \lambda_n x_n^{n+m-1} = \\[2ex]
\qquad\qquad = \displaystyle\int_a^b p(s)s^{n+m-1}ds.
\end{cases}
$$

qui déterminent les inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$.

Le déterminant du système (22) étant le déterminant de Vandermonde des nombres $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$ n'est pas nul et par suite les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ sont parfaitement déterminées.

L'intérprétation des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$. En dérivant successivement les équations (19) et (20), nous avons les équations

$$
(23)\quad \begin{cases}
\varphi_1^{(n+m-1)}(x) = \lambda_n \\
\varphi_2^{(n+m-1)}(x) = \lambda_n + \lambda_{n-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_n^{(n+m-1)}(x) = \lambda_n + \lambda_{n-1} + \ldots + \lambda_1
\end{cases}
$$

et

$$(24)\quad \begin{cases} \varphi_{n+2}^{(n+m-1)}(x) = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m \\ \varphi_{n+3}^{(n+m-1)}(x) = \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{n+m}^{(n+m-1)}(x) = \mu_{m-1} + \mu_m \\ \varphi_{n+m+1}^{(n+m-1)}(x) = \mu_m. \end{cases}$$

Il résulte alors d'après les équations (13) que

$$(25)\quad \begin{cases} \lambda_n = -A_n, \ \lambda_{n-1} = -A_{n-1}, \dots, \ \lambda_1 = -A_1 \\ \mu_m = A_m', \ \mu_{m-1} = A_{m-1}', \dots, \ \mu_1 = A_1'. \end{cases}$$

Les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ sont liés donc aux coefficients de la formule de quadrature (12) par les formules (25).

D'après les formules (25) la solution du système (22) s'obtient facilement si nous tenons compte des formules (16) et (18).

5. *Les degrés des polynomes* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n+m-1}(x)$ *à l'exception de* $\varphi_{n+1}(x)$, *sont* $n+m-1$. D'après les formules (23), (24), et (25) il faut démontrer que les sommes

$$(26)\quad \begin{cases} B_n = A_n \\ B_{n-1} = A_n + A_{n-1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ B_1 = A_n + A_{n-1} + \dots + A_1 \\ B_m' = A_m' \\ B_{m-1}' = A_m' + A_{m-1}' \\ \dots\dots\dots\dots \\ B_1' = A_m' + A_{m-1}' + \dots + A_1' \end{cases}$$

ne sont pas nulles.

Considérons le polynome d'interpolation $\psi_j(x)$ qui satisfait aux conditions suivantes

$$(27)\quad \begin{cases} \psi_j(x_n) = 1, \ \psi_j(x_{n-1}) = 1, \dots, \psi_j(x_{n-j+1}) = 1, \\ \psi_j(x_{n-j}) = 0, \ \psi_j(x_{n-j-1}) = 0, \dots, \psi_j(x_1) = 0, \\ \psi_j(x_1') = 0, \ \psi_j(x_2') = 0, \dots, \psi_j(x_m') = 0, \end{cases}$$

où j est l'un des nombres $1, 2, \dots, n$.

Le degré du polynome $\psi_j(x)$ *est* $n+m-1$. Pour le démontrer appliquons le théorème de Rolle au polynome $\psi_j(x)$ et aux intervalles

$$[x_n, x_{n-1}], \dots, [x_{n-j+2}, x_{n-j+1}], \ [x_{n-j}, x_{n-j-1}], \dots, [x_{m-1}', x_m'].$$

Le polynome $\psi_j(x)$ ayant des valeurs égales aux extrémités de chaque intervalle, sa derivée $\psi_j'(x)$ a au moins un zéro dans chaque intervalle; la derivée $\psi_j'(x)$ a donc au moins $n+m-2$ zéros réels et distincts. Supposons que le degré du polynome $\psi_j(x)$ soit plus petit que $n+m-1$; alors le degré de sa dérivée $\psi_j'(x)$ est plus petit que $n+m-2$ et comme $\psi_j'(x)$ s'annule en $n+m-2$ points distincts, $\psi_j'(x)$ est identiquement nul. Dans ce cas le polynome $\psi_j(x)$ doit être une constante, ce qui est impossible puisque $\psi_j(x)$ prend la valeur 1 au point x_n et la valeur 0 au point x_m'. Donc le polynome $\psi_j(x)$ a le degré $n+m-1$.

Le polynome $\psi_j(x)$ a un signe constant dans l'intervalle (x_1, x_1') et par suite dans l'intervalle $[a, b]$, inclus dans l'intervalle (x_1, x_1'). *Démontrons que le signe de* $\psi_j(x)$ *dans l'intervalle* (x_1, x_1') *et par suite dans l'intervalle* $[a, b]$ *est le signe de* $(-1)^{n-j}$.

Pour le prouver, nous remarquons que dans l'intervalle $[x_{n-j+1}, x_{n-j}]$ la dérivée $\psi_j'(x)$ garde un signe constant, puisque $\psi_j'(x)$ a un zéro dans l'intervalle (x_{n-j+2}, x_{n-j+1}) et le premier zéro qui suit appartient à l'intervalle (x_{n-j}, x_{n-j-1}). La droite qui joint les points de coordonnées $(x_{n-j+1}, 1)$, $(x_{n-j}, 0)$ a le coefficient angulaire négatif. Alors, d'après le théorème des acroissements finis, il exite dans l'intervalle (x_{n-j+1}, x_{n-j}) au moins un point où la dérivée $\psi_j'(x)$ est négative. On déduit ainsi que la dérivée $\psi_j'(x)$ est négative dans l'intervalle (x_{n-j+1}, x_{n-j}), et par suite le polynome $\psi_j(x)$ *décroît* dans cet intervalle. Il résulte alors que $\psi_j(x)$ est négatif dans l'intervalle (x_{n-j}, x_{n-j-1}), positif dans l'intervalle $(x_{n-j-1}, x_{n-j-2}), \dots$, et dans l'intervalle (x_1, x_1') il a le signe de $(-1)^{n-j}$

Les raisonnements précédents sont valables aussi dans le cas $j = n$, lorsque les conditions (27) se réduisent aux conditions de la première et de la troisième ligne.

Si nous remplaçons dans la formule de quadrature (12) la fonction $f(x)$ par le polynome $\psi_j(x)$, nous aurons d'après les conditions (27)

$$\int_a^b p(x)\psi_j(x)dx = A_n + A_{n-1} + \dots + A_{n-j+1}.$$

Mais le polynome $\psi_j(x)$ gardant un signe constant dans l'intervalle $[a, b]$, *le signe de* $(-1)^{n-j}$, *il résulte que la somme* $A_n + A_{n-1} + \dots + A_{n-j+1}$ *est différente de zéro et a le signe de* $(-1)^{n-j}$.

Nous avons ainsi démontré que *le degré des polynomes* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\dots$, $\varphi_n(x)$ *est* $n+m-1$.

D'une manière analogue on démontre que le polynome $\theta_l(x)$ qui satisfait aux conditions

$$\theta_l(x'_m) = 1,\quad \theta_l(x'_{m-1}) = 1, \ldots, \theta_l(x'_{m-l+1}) = 1;$$
$$\theta_l(x'_{m-l}) = 0, \ldots, \theta(x'_1) \quad = 0,$$
$$\theta_l(x_1) = 0, \ldots, \theta_l(x_n) \quad = 0$$

est du degré $n + m - 1$ et que son signe dans l'intervalle (x_1, x'_1) et par suite dans l'intervalle $[a, b]$ est le signe de $(-1)^{m-l}$. En remplaçant dans la formule de quadrature (12) la fonction $f(x)$ par le polynome $\theta_l\,(x)$ on obtient

$$\int_a^b p(x)\,\theta_l(x)\,dx = A'_m + A'_{m-1} + \ldots + A'_{m-l+1},$$

d'où il résulte que *les sommes* $A'_m + A'_{m-1} + \ldots + A'_{m-l+1}$ *sont différentes de zéro, et ont le signe de* $(-1)^{m-l}$, *pour* $l = 1, 2, \ldots, m$.

Nous avons ainsi démontré que *le degré des polynomes* $\varphi_{n+2}(x)$, $\varphi_{n+3}(x), \ldots, \varphi_{n+m+1}(x)$ *este* $n + m - 1$.

6. *Un théorème sur les résidus d'une fonction rationnelle.* Le théorème du nr. précédent relativement au degré du polynome $\psi_l(x)$, nous conduit au théorème suivant :

Étant donnée la fonction rationnelle

$$\frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

où les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sont en ordre croissant et où* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont ses résidus relativement aux pôles* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *les sommes* $A_1 + A_2 + \ldots + A_i$ *sont différentes de zéro et ont le signe de* $(-1)^{n-i}$, *pour* $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

En effet si nous considérons le polynome d'interpolation $h_k(x)$, nul sur les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sauf le noeud x_k où il prend la valeur 1, nous avons

$$h_k(x) = \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)} = A_k\,x^{n-1} + \ldots$$

Le polynome

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x) + \ldots + h_i(x),$$

c'est à dire

$$h(x) = (A_1 + A_2 \ldots + A_i)\,x^{n-1} + \ldots$$

satisfait aux conditions

$$h(x_1) = 1, h(x_2) = 1, \ldots, h(x_i) = 1, h(x_{i+1}) = 0, \ldots, h(x_n) = 0.$$

Les raisonnements faits au nr. précédent pour démontrer que le polynome $\psi_l(x)$ a le degré $n + m - 1$, sont valables aussi pour le polynome $h(x)$. Donc le polynome $h(x)$ a le degré $n - 1$, ce qui veut dire que les sommes $A_1 + A_2 + \ldots + A_i$ sont différentes de zéro. Pour trouver le signe de $A_1 + A_2 + \ldots + A_i$ nous remarquons que le polynome décroît de 1 à 0 dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, il a un maximum dans l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, un minimum dans l'intervalle $[x_{i-2}, x_{i-1}]$, ..., et ainsi de suite, il a un maximum ou un minimum dans l'intervalle $[x_1, x_2]$ selon que le nombre natural i est pair ou impair. Il résulte que le polynome $h(x)$ croît ou décroît dans l'intervalle $(-\infty, x_1)$ selon que i est pair ou impair c'est à dire selon que $(-1)^i$ est positif ou négatif. Mais dans l'intervalle $(-\infty, x_1)$, le polynome

$$h(x) = (A_1 + A_2 + \ldots + A_i)\,x^{n-1} + \ldots$$

croît ou décroît selon que $(A_1 + A_2 + \ldots A_i)(-1)^n$ est positif ou négatif. Il résulte donc que $A_1 + A_2 + \ldots + A_i$ *a le signe de* $(-1)^{n-i}$.

7. *La forme de la courbe* $y = \varphi(x)$ *dans l'intervalle* $[x_n, x'_m]$. La fonction $\varphi(x)$ qui coïncide avec les fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n+m+1}(x)$ dans les intervalles $[x_n, x_{n-1}]$, $[x_{n-1}, x_{n-2}]$, ..., $[x'_{m-1}, x'_m]$ est continue dans l'intervalle $[x_n, x'_m]$ ainsi que ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $n + m - 2$ et dans l'intervalle $[x_1, x'_1]$ la fonction $f(x)$ est continue, ainsi que ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $n + m - 1$, comme il résulte d'après les conditions aux limites (6)—(11). Nous allons démontrer le théorème suivant:

La fonction $\varphi(x)$ *a un seul extremum dans l'intervalle* (x_n, x'_m) *qui est un maximum si* n *est pair ou un minimum si* n *est impair.*

En effet, supposons que la fonction $\varphi(x)$ ait deux extrema dans l'intervalle (x_n, x'_m), ce qui veut dire que la dérivée $\varphi'(x)$ s'annule en deux points ξ_1, ξ_2 de l'intervalle (x_n, x'_m). Alors, d'après les conditions aux limites (6) et (11) on en déduit, en appliquant le théorème de Rolle, que la dérivée $\varphi^{(n+m-2)}(x)$ s'annule en $n + m - 1$ points distincts $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n+m-1}$ de l'intervalle (x_n, x'_m) que nous supposons rangés en ordre croissant.

Le point η_1 ne peut pas appartenir à l'intervalle $(x_n, x_{n-1}]$, puisqu'on a montré que $\varphi_1(x)$ est un polynome de degré $n + m - 1$.

Le point η_1 peut appartenir à l'intervalle $(x_{n-1}, x_{n-1}]$, mais dans ce cas, le point suivant η_2 ne peut plus appartenir au même intervalle. En effet si les points η_1 et η_2 appartiennent à l'intervalle $(x_{n-1}, x_{n-2}]$, en appliquant le théorème de Rolle, nous déduisons que la dérivée $\varphi^{(n+m-1)}(x)$, s'annule en un point de l'intervalle (η_1, η_2). Mais ceci est impossible, puisqu'on a démontré au nr. **5** que $\varphi_2(x)$ est un polynome de degré $n + m - 1$.

D'une manière analogue, on démontre que dans chaque intervalle $(x_{n-2}, x_{n-3}]$, ..., $(x_2, x_1]$, $(x_1, a]$ il n' y a qu' un seul point $\eta_2, \ldots, \eta_{n-2}$, η_{n-1}.

On démontre aussi de la même manière que dans l'intervalle $[x'_{m-1}, x'_m)$ il n'y a aucun point η et que dans les intervalles successifs $[x'_{m-2}, x'_{m-1})$ $[x'_{m-3}, x'_{m-2}), \ldots, [b, x'_1)$ il y a les points $\eta_{n+m-1}, \eta_{n+m-2}, \ldots, \eta_{n+1}$.

Il résulte alors que dans l'intervalle (a, b) il y a le point η_n.

Considérons maintenant la fonction $\varphi(x)$ dans l'intervalle (x_1, x'_1). Elle est continue dans cet intervalle et a des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre $n+m-1$ (conditions (8) et (9)). La dérivée $\varphi^{(n+m-2)}(x)$ s'annule en trois points distincts: $\eta_{n-1} \in (x_1, a]$, $\eta_n \in (a, b)$, $\eta_{n+1} \in [b, x'_1)$. Alors en appliquant le théorème de Rolle à la dérivée $\varphi^{(n+m-2)}(x)$ et aux intervalles $[\eta_{n-1}, \eta_n]$, $[\eta_n, \eta_{n+1}]$ on en déduit que la dérivée $\varphi^{(n+m-1)}(x)$ s'annule en deux points ζ_1, ζ_2 distincts de l'intervalle (x_1, x'_1). Le point ζ_1 ne peut pas appartenir à l'intervalle (x_1, a), la fonction $\varphi(x)$, étant dans cet intervalle un polynome de degré $n+m-1$. De même le point ζ_2 ne peut pas appartenir à l'intervalle (b, x'_1), la fonction $\varphi(x)$ étant dans cet intervalle un polynome de degré $n+m-1$. Donc, les points ζ_1 et ζ_2 appartiennent à l'intervalle $[a, b]$. La fonction $\varphi(x)$ ayant dans l'intervalle $(a; b)$ la dérivée $\varphi^{(n+m)}(x)$ continue, on peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction $\varphi^{(n+m-1)}(x)$ et à l'intervalle $[\zeta_1, \zeta_2]$. On en déduit que la dérivée $\varphi^{(n+m)}(x)$ doit s'annuler en un point ζ de l'intervalle (a, b) ce qui est impossible, puisque dans cet intervalle nous avons $\varphi^{(n+m)}(x) = p(x)$.

Nous sommes arrivés à une contradiction, d'où il résulte qu'il est impossible que la fonction $\varphi(x)$ ait deux extrema dans l'intervalle (x_n, x'_m).

Donc la fonction $\varphi(x)$ a un seul extremum dans l'intervalle (x_n, x'_m)

Remarquons que le signe de $\varphi(x)$ dans l'intervalle $(x_n, x_{n-1}]$ est le signe de

$$y = \lambda_n \frac{(x - x_n)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} = -A_n \frac{(x - x_n)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}$$

et par suite est donné par le signe de $-A_n$. On a démontré que le signe de A_n est le signe de $(-1)^{n-1}$. Donc $\varphi(x)$ a le signe de $(-1)^n$ dans l'intervalle $(x_n, x_{n-1}]$.

Il résulte que la fonction $\varphi(x)$ a un maximum dans l'intervalle (x_n, x'_m) si n est pair, ou un minimum si n est impair.

La forme de la courbe $y = \varphi(x)$ dans l'intervalle $[x_n, x'_m]$ est donnée dans la figure 1, selon que n est pair ou impair.

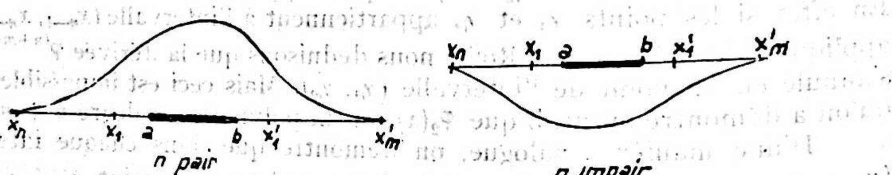


Fig. 1

Dans le cas $n = 1$, $m = 1$, la forme de la courbe $y = \varphi(x)$ est donnée dans la figure 2.

8. *Le reste dans la formule de quadrature* (12). Il est donné par la formule (14), c'est-à-dire

$$R = (-1)^{n+m} \int_{x_n}^{x'_m} \varphi(x) f^{(n+m)}(x)\,dx,$$

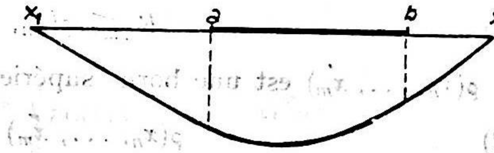


Fig. 2

et nous savons que la fonction $\varphi(x)$ garde un signe constant dans l'intervalle (x_n, x'_m). La fonction $f(x)$ étant de la classe C^{n+m}, nous pouvons écrire

(28) $$R = (-1)^{n+m} f^{(n+m)}(\xi) \int_{x_n}^{x'_m} \varphi(x)\,dx,$$

où $\xi \in (x_n, x'_m)$.

On calcule l'intégrale de la formule (28) par la formule de quadrature (12) en remplaçant $f(x)$ par le polynome

$$f(x) = \frac{1}{(n+m)!}(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)(x - x'_1)(x - x'_2) \ldots (x - x'_m).$$

Nous aurons

$$\frac{1}{(n+m)!} \int_a^b p(x)(x - x_1) \ldots (x - x_n)(x - x'_1) \ldots (x - x'_m)\,dx = (-1)^{n+m} \int_{x_n}^{x'_m} \varphi(x)\,dx,$$

d'où il résulte que

$$\int_{x_n}^{x'_m} \varphi(x)\,dx = \frac{(-1)^n}{(n+m)!} \int_a^b p(x)(x - x_1) \ldots (x - x_n)(x'_1 - x) \ldots (x'_m - x)\,dx.$$

La formule (28) devient donc

(29) $$R = (-1)^m I f^{(n+m)}(\xi),$$

où I est un nombre positif, qui dépend des noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_m$.

(30) $$I = \frac{1}{(n+m)!} \int_a^b p(x)(x - x_1) \ldots (x - x_n)(x'_1 - x) \ldots (x'_m - x)\,dx.$$

Si nous désignons par M_{n+m} la borne supérieure de $|f^{(n+m)}(x)|$ dans l'intervalle $[x_n, x'_m]$, il résulte de la formule (29) que nous aurons l'évaluation suivante de la valeur absolue du reste R.

$$|R| \leqq \rho(x_n, \ldots, x'_m), \tag{31}$$

où $\rho(x_n, \ldots, x'_m)$ est une borne supérieure de $|R|$, définie par la formule

$$\rho(x_n, \ldots, x'_m) = IM_{n+m}. \tag{32}$$

Conséquence. Si l'on considère d'autres noeuds $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ *et* $x_1'^*, \ldots, x_m'^*$ *tels que* $x_k^* \leqq x_k$ *pour* $k = 1, 2, \ldots, n$ *et* $x_i'^* \geqq x'_i$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, m$, *le signe d'égalité n'ayant pas lieu pour toutes les valeurs de k et de i, alors pour la borne supérieure* $\rho^*(x_n^*, \ldots, x_m'^*)$ *de la valeur absolue de* R^*, *nous avons*

$$\rho^*(x_n^*, \ldots, x_m'^*) > \rho(x_n, \ldots, x'_m). \tag{33}$$

En effet, nous avons

$$\rho^*(x_n^*, \ldots, x_m'^*) = M_{n+m}^* I_{n+m},$$

où M_{n+m}^* est la borne supérieure de $|f^{(n+m)}(x)|$ dans l'intervalle $[x_n^*, x_m'^*]$, et

$$I^* = \frac{1}{(n+m)!}\int_a^b (x - x_1^*) \ldots (x - x_n^*)(x_1'^* - x) \ldots (x_m'^* - x)dx.$$

D'après le choix des noeuds $x_k^*, x_i'^*$, nous avons

$$(x - x_1^*) \ldots (x - x_n^*)(x_1'^* - x) \ldots (x_m'^* - x) >$$
$$> (x - x_1) \ldots (x - x_n)(x'_1 - x) \ldots (x'_m - x),$$

d'où il résulte que $I^* > I$. D'autre part nous avons $M_{n+m}^* \geqq M_{n+m}$ et par suite

$$M_{n+m}^* I^* > M_{n+m} I,$$

d'où résulte l'inégalité (33).

Donc *nous n'avons aucun intérêt à déplacer les noeuds* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *vers la gauche et les noeuds* $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$ *vers la droite, parceque dans ce cas la borne supérieure* $\rho(x_n, \ldots, x'_m)$ *croît.*

9. *La formule de quadrature de N. Obreschkoff* [2]. On connaît la formule de quadrature

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx = A_0 f(a) + A_1 f'(a) + \ldots + A_{n-1}f^{(n-1)}(a) + \tag{34}$$
$$+ B_0 f(b) + B_1 f'(b) + \ldots + B_{m-1}f^{(m-1)}(b) + R_0$$

dite *la formule de N. Obreschkoff*, où le reste R est donné par

$$R_0 = (-1)^m \frac{1}{(n+m)!}\int_a^b p(x)(x-a)^n(b-x)^m f^{(n+m)}(x)dx.$$

Nous pouvons encore écrire

$$R_0 = (-1)^m \frac{f^{(n+m)}(\xi_0)}{(n+m)!}\int_a^b p(x)(x-a)^n(b-x)^m dx, \tag{35}$$

où $\xi_0 \in (a, b)$.

En désignant par M_{n+m}^0 la borne supérieure de $|f^{(n+m)}(x)|$ dans l'intervalle $[a, b]$, et par

$$I_0 = \int_a^b p(x)(x-a)^n(b-x)^m dx, \tag{36}$$

nous aurons l'évaluation suivante pour $|R|$.

$$|R_0| \leqq \rho_0(a, b), \tag{37}$$

où $\rho_0(a, b)$ est une borne supérieure pour $|R_0|$, définie par

$$\rho_0(a, b) = M_{n+m}^0 I_0. \tag{38}$$

10. *Comparaison entre la borne* $\rho(x_n, \ldots, x'_m)$ *de la valeur absolue du reste R de la formule de quadrature* (12) *et la borne supérieure* $\rho_0(a, b)$ *de la valeur absolue du reste R de la formule de quadrature* (34) *d'Obreschkoff.* Nous allons démontrer que *quel que soit le choix des noeuds extérieurs* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *et* $x'_1, \ldots, x'_m$ *nous avons l'inégalité*

$$\rho(x_n, \ldots, x'_m) > \rho_0(a, b). \tag{39}$$

En effet, nous avons

$$(x - x_1) \ldots (x - x_n) < (x-a)^n, \ (x'_1 - x) \ldots (x'_m - x) > (b-x)^m$$

et par suite, d'après les formules (30) et (36), nous avons

$$I > I_0.$$

D'autre part, $M_{n+m} \geqq M_{n+m}^0$, d'où il résulte l'inégalité (39).

De ce théorème il résulte que *s'il est possible d'appliquer à la fonction* $f(x)$, *la formule de quadrature* (34) *d'Obreschkoff, il est préférable d'utiliser la formule de quadrature d'Obreschkoff, que d'utiliser la formule de quadrature* (12) *à noeuds extérieurs, parceque la borne supérieure* $\rho(x_n, \ldots, x'_m)$ *de* $|R|$ *de la formule* (12) *est plus grande que la borne supérieure* $\rho_0(a, b)$ *de* $|R_0|$ *de la formule d'Obreschkoff.*

Exemple. Si l'on prend les noeuds x_0-2h, x_0-3h et x_0+2h, x_0+3h extérieurs à l'intervalle $(x_0-h,\ x_0+h)$, nous avons la formule de quadrature

$$(40)\qquad \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = \frac{h}{15}\{26\,[f(x_0-2h)+f(x_0+2h)]-11\,[f(x_0-3h)+f(x_0+3h)]\} + R,$$

où le reste R est donné par la formule

$$R = \int_{x_0-3h}^{x_0+3h} \varphi(x)\, f^{(IV)}(x)\, dx,$$

la fonction $\varphi(x)$ étant égale à $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, $\varphi_5(x)$ dans les intervalles $[x_0-3h,\ x_0-2h]$, $[x_0-2h,\ x_0-h]$, $[x_0-h,\ x_0+h]$, $[x_0+h,\ x_0+2h]$, $[x_0+2h,\ x_0+3h]$. Nous avons

$$\varphi_1(x) = \frac{11}{15}h\frac{(x-x_0+3h)^3}{3\,!},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{11}{15}h\frac{(x-x_0+3h)^3}{3\,!} - \frac{26h}{15}\frac{(x-x_0+2h)^3}{3\,!},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-x_0+h)^4}{4\,!} + \frac{11}{15}h\frac{(x-x_0+3h)^3}{3\,!} - \frac{26h}{15}\frac{(x-x_0+2h)^3}{3\,!},$$

$$\varphi_4(x) = -\frac{11h}{15}\frac{(x-x_0-3h)^3}{3\,!} + \frac{26h}{15}\frac{(x-x_0-2h)^3}{3\,!},$$

$$\varphi_5(x) = -\frac{11h}{15}\frac{(x-x_0-3h)^3}{3\,!}.$$

Une évaluation de $|R|$ de la formule de quadrature (40) est donnée par

$$|R| \leqq \rho(x_0-3h, \ldots, x_0+3h),$$

où

$$\rho(x_0-3h, \ldots, x_0+3h) =$$

$$= \frac{M_4}{4\,!}\int_{x_0-3h}^{x_0+3h} (x-x_0+3h)\,(x-x_0+2h)(x-x_0-2h)\,(x-x_0-3h)\,dx.$$

En calculant l'intégrale du second membre, on obtient

$$(41)\qquad \rho(x_0-3h, \ldots, x_0+3h) = \frac{239}{2880}(2h)^5\, M_4.$$

Si l'on considère la formule de quadrature d'Obreschkoff (34) pour $n=2$ et $m=2$, nous avons

$$(42)\qquad \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = h\,[f(x_0+h)+f(x_0-h)] - \frac{h^2}{3}[f'(x_0+h)-f'(x_0-h)] + R_0,$$

avec

$$R_0 = \frac{1}{4\,!}\int_{x_0-h}^{x_0+h} (x-x_0+h)^2\,(x-x_0-h)^2 f^{(IV)}(x)\,dx.$$

Nous aurons

$$|R_0| \leqq \rho_0(x-h,\ x_0+h),$$

où

$$\rho_0(x-h,\ x_0+h) = \frac{M_4^0}{4\,!}\int_{x_0-h}^{x_0+h} (x-x_0+h)^2(x-x_0-h)^2\,dx.$$

En calculant l'intégrale du second membre, nous avons

$$(43)\qquad \rho_0(x_0-h,\ x_0+h) = \frac{4}{2880}(2h)^5\, M_4^0.$$

En comparant les deux bornes supérieures de $|R|$ de la formule de quadrature (40) et $\rho_0(x_0-h,\ x_0+h)$ de $|R_0|$ de la formule de quadrature (42), nous avons

$$(44)\qquad \frac{\rho(x_0-3h, \ldots, x_0+3h)}{\rho_0(x_0-h,\ x_0+h)} = \frac{239}{4}\frac{M_4}{M_4^0} \geqq \frac{239}{4}.$$

L'inégalité (44) montre que la borne $\rho(x_0-3h, \ldots, x_0+3h)$ est approximativement 60 fois plus grande que $\rho_0(x_0-h,\ x_0+h)$, d'où il résulte que la formule de quadrature (42) est préférable à la formule de quadrature (40).

11. *Comparaison entre la borne supérieure $\rho(x_0-3h, \ldots, x_0+3h)$ de $|R|$ de la formule de quadrature (40) et la borne supérieure de la valeur absolue du reste dans d'autres formules de quadrature.* Considérons à côté de la formule (40), la formule de quadrature de Simpson qui utilise les noeuds x_0-h, x_0+h et le noeud intérieur x_0, *c'est-à-dire*

$$(45)\qquad \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dsx = \frac{h}{3}[f(x_0-h)+f(x_0)+4f(x_0+h)] + R_S.$$

On sait que

$$|R_S| \leqq \rho_S(x_0-h,\ x_0+h),$$

où

$$(46)\qquad \rho_S(x_0-h,\ x_0+h) = \frac{M_4^0}{2880}(2h)^5.$$

Pour les formules de quadrature (40) et (45) nous pouvons comparer les bornes supérieures $\rho(x_0-3h, \ldots, x_0+3h)$ et $\rho_S(x_0-h,\ x_0+h)$ données par les formules (41) et (46). Nous aurons

$$(47)\qquad \frac{\rho(x_0-3h, \ldots, x_0+3h)}{\rho_S(x_0-h,\ x_0+h)} = 239\,\frac{M_4}{M_4^0} \geqq 239.$$

De même si nous considérons la formule de quadrature à noeuds intérieurs, que nous avons recommandée [3]

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = \frac{h}{1083}\left[625 f(x_1) + 916 f(x_0) + 625 f(x_2)\right] + R', \tag{48}$$

où

$$x_1 = x_0 - \frac{19}{25}h, \quad x_2 = x_0 + \frac{19}{25}h,$$

on a montré que

$$|R'| \leqq \rho'(x_0 - h, x_0 + h),$$

où

$$\rho'(x_0 - h, x_0 + h) = \frac{M_4^0}{2880} \cdot 0{,}07679\,(2h)^5. \tag{49}$$

Nous pouvons comparer les bornes supérieures $\rho(x_0 - 3h, \ldots, x_0 + 3h)$ et $\rho'(x_0 - h, x_0 + h)$ des valeurs absolues des restes des formules (40) et (48); nous avons.

$$\frac{\rho(x_0 - 3h, \ldots, x_0 + 3h)}{\rho'(x_0 - h, x_0 + h)} = \frac{239}{0{,}07679} \cdot \frac{M_4}{M_4^0} \geqq 3112, \ldots \tag{50}$$

Les formules (47) et (50) montrent nettement *le désavantage des formules de quadrature à noeuds extérieurs par rapport aux formules de quadrature à noeuds intérieurs.*

L'exemple simple de la formule de quadrature (40) et les seconds membres des formules de comparaison (47) et (50) nous amènent à étudier systématiquement les bornes supérieures $\rho(x_n, \ldots, x'_m)$ des valeurs absolues des restes des formules de quadrature à noeuds extérieurs. Nous étudierons spécialement les restes des formules de quadrature qui proviennent de l'application des formules d'interpolation à noeuds équidistants.

12. *Le cas* $m=0$. Supposons que tous les noeuds extérieurs sont à gauche de a, s'est à dire que $m=0$. Dans ce cas la formule de quadrature (12) devient

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_n f(x_n) + (-1)^n \int_{x_n}^{b} \varphi(x) f^{(n)}(x)\,dx \tag{51}$$

où la fonction $\varphi(x)$ coïncide successivement dans les intervalles $[x_n, x_{n-1}]$, $[x_{n-1}, x_{n-2}]$, ..., $[a, b]$ avec les intégrales $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_{n+1}(x)$ des équations différentielles

$$\varphi_i^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n+1 \\ 1 & \text{si } i = n+1 \end{cases}$$

qui satisfont aux conditions aux limites

$$\varphi_1(x_n) = 0, \quad \varphi_1'(x_n) = 0, \ldots, \varphi_1^{(n-2)}(x_n) = 0,$$

$$\varphi_2(x_{n-1}) = \varphi_1(x_{n-1}), \quad \varphi_2'(x_{n-1}) = \varphi_1'(x_{n-1}), \ldots, \varphi_2^{(n-2)}(x_{n-1}) = \varphi_1^{(n-2)}(x_{n-1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_n(x_1) = \varphi_{n-1}(x_1), \quad \varphi_n'(x_1) = \varphi_{n-1}'(x_1), \ldots, \varphi_n^{(n-2)}(x_1) = \varphi_{n-1}^{(n-2)}(x_1),$$

$$\varphi_{n+1}(a) = \varphi_n(a), \quad \varphi_{n+1}'(a) = \varphi_n'(a), \ldots, \varphi_{n+1}^{(n-2)}(a) = \varphi_n^{(n-2)}(a), \ \varphi_{n+1}^{(n-1)}(a) = \varphi_n^{(n-1)}(a),$$

$$\varphi_{n+1}(b) = 0, \quad \varphi_{n+1}'(b) = 0, \ldots, \quad \varphi_{n+1}^{(n-1)}(b) = 0.$$

On démontre comme au nr. **2**, que dans la formule de quadrature (51) les coefficients $A_1, A_2, \ldots A_n$ changent alternativement leurs signes, A_1 étant positif.

On démontre ensuite comme aux nr. **4**, **5** et **7** que la forme de la courbe $y = \varphi(x)$ dans le cas $n > 2$ et celle indiquée dans la figure 3.

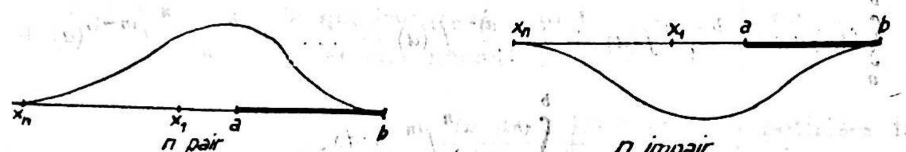


Fig. 3

Lorsque $n=1$, la formule de quadrature (51) se réduit à

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_1) - \int_{x_1}^{b} \varphi(x) f'(x)\,dx,$$

où la courbe $y = \varphi(x)$ est tracée dans la figure 4.

Lorsque $n=2$, la formule de quadrature (51) se réduit à

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{x_1 - x_2}\left[\left(\frac{a+b}{2} - x_2\right)f(x_1) - \left(\frac{a+b}{2} - x_1\right)f(x_2)\right] + \int_{x_2}^{b} \varphi(x) f''(x)\,dx,$$

où la courbe $y = \varphi(x)$ est tracée dans la figure 5.

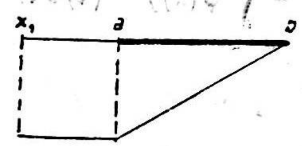


Fig. 4

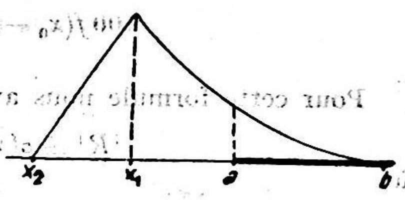


Fig. 5

On démontre comme au nr. **8** que le reste de la formule de quadrature (51) peut s'écrire sous la forme

$$R = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)\,dx,$$

où $\xi \in (x_n, b)$. Il résulte qu'une borne supérieure de $|R|$, est

$$\rho(x_n,\dots,x_1) = \frac{M_n}{n!}\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)\,dx,$$

où M_n est une borne supérieure de $|f^{(n)}(x)|$ dans l'intervalle $[x_n, b]$.

Lorsque les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n$ se déplacent vers la gauche, la borne supérieure $\rho(x_n,\dots,x_1)$ croît.

Si nous considérons la formule de quadrature à un seul noeud a multiple d'ordre n,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{1}f(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)\,dx,$$

son reste, en valeur absolue, a la borne supérieure

$$\rho_0(a,b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M_n^0,$$

où M_n^0 este la borne supérieure de $|f^{(n)}(x)|$ dans l'intervalle $[a,b]$.

Quel que soit le choix des noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n$, nous avons

$$\rho(x_n,\dots,x_1) > \rho_0(a,b).$$

Exemple. Si nous considérons l'intervalle $(x_0-h,\ x_0+h)$ et les noeuds x_0-2h, x_0-3h, x_0-4h, x_0-5h, nous avons la formule de quadrature

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[64f(x_0-2h) - 131f(x_0-3h) + 100f(x_0-4h) - 27f(x_0-5h)] + \int_{x_0-5h}^{x_0+h}\varphi(x)f^{(IV)}(x)\,dx. \tag{52}$$

Pour cette formule nous avons

$$|R| \leqq \rho(x_0-5h,\dots,x_0-2h),$$

où

$$\rho(x_0-5h,\dots,x_0-2h) = \frac{1079}{2880}M_4\,(2h)^5.$$

Si l'on compare la borne supérieure $\rho(x_0-5h,\dots,x_0-2h)$ avec la borne supérieure de la valeur absolue du reste de la formule de Simpson (43), nous avons

$$\frac{\rho(x_0-5h,\dots,x_0-2h)}{\rho_s(x_0-h,\ x_0+h)} = 1079\frac{M_4}{M_4^0} \geqq 1079.$$

Si l'on compare la borne supérieure $\rho(x_0-5h,\dots,x_0-2h)$ avec la borne supérieure de la valeur absolue du reste de la formule de quadrature (48), nous avons

$$\frac{\rho(x_0-5h,\dots,x_0-2h)}{\rho'(x_0-h,\ x_0+h)} = \frac{1079}{0{,}07679}\cdot\frac{M_4}{M_4^0} \geqq 14051,\dots$$

Les seconds membres des formules précédentes de comparaison avec les nombres 1079 et 14051 qui sont très grands, montrent le désavantage des formules de quadrature à noeuds extérieurs par rapport aux formules de quadrature à noeuds intérieurs considérées plus haut.

§ 2. Formules de quadrature à noeuds simples extérieurs et aux noeuds a, b.

13. Nous reprenons l'intégrale (1) avec les mêmes hypothèses faites au nr. **1**. A cette intégrale nous attachons les noeuds $x_1', x_2', \dots, x_{m-1}'$ à droite de b en ordre croissant et les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ à gauche de a en ordre décroissant, tous ces noeuds appartenant à l'intervalle $[\alpha,\beta]$. Nous voulons établir une formule de quadrature à noeuds extérieurs et aux noeuds a, b de la forme

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx = A_0f(a) + A_1f(x_1) + \dots + A_{n-1}f(x_{n-1}) + A_0'f(b) + A_1'f(x_1') + \dots + A_{m-1}'f(x_{m-1}') + R \tag{53}$$

et étudier son reste.

Nous procédons comme au nr. **1**; aux intervalles $[x_{n-1}, x_{n-2}]$, ..., $[a, b]$, ..., $[x_{m-2}', x_{m-1}']$, nous attachons les fonctions $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots, \varphi_{n+m-1}(x)$ qui sont les intégrales des équations différentielles

$$\varphi_i^{(n+m)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ p(x) & \text{si } i = n \end{cases} \tag{54}$$

satisfaisant aux conditions aux limites

$$\varphi_1(x_{n-1}) = 0,\quad \varphi_1'(x_{n-1}) = 0,\ \dots,\ \varphi_1^{(n+m-2)}(x_{n-1}) = 0$$

$$\varphi_2(x_{n-2}) = \varphi_1(x_{n-2}),\ \varphi_2'(x_{n-2}) = \varphi_1'(x_{n-2}),\dots,\ \varphi_2^{(n+m-2)}(x_{n-2}) = \varphi_1^{(n+m-2)}(x_{n-2})$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$
(55)\quad
\begin{aligned}
&\varphi_{n-1}(x_1) = \varphi_{n-2}(x_1),\ \varphi'_{n-1}(x_1) = \varphi'_{n-2}(x_1), \ldots, \varphi_{n-1}^{(n+m-2}(x_1) = \varphi_{n-1}^{(n+m-2)}(x_1)\\
&\varphi_n(a) = \varphi_{n-1}(a),\ \varphi'_n(a) = \varphi'_{n-1}(a), \ldots, \varphi_n^{(n+m-2)}(a) = \varphi_{n-1}^{(n+m-2)}(a)\\
&\varphi_{n+1}(b) = \varphi_n(b),\ \varphi'_{n+1}(b) = \varphi'_n(b), \ldots, \varphi_{n+1}^{(n+m-2)}(b) = \varphi_n^{(n+m-2)}(b)\\
&\varphi_{n+2}(x'_1) = \varphi_{n+1}(x'_1),\ \varphi_{n+2}(x'_1) = \varphi'_{n+1}(x'_1), \ldots, \varphi_{n+2}^{(n+m-2)}(x'_1) = \varphi_{n+1}^{(n+m-2)}(x'_1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{n+m-1}(x'_{m-2}) = \varphi_{n+m-2}(x'_{m-2}),\ \varphi'_{n+m-1}(x'_{m-2}) = \varphi'_{n+m-2}(x'_{m-2}), \ldots\\
&\qquad \ldots, \varphi_{n+m-1}^{(n+m-2)}(x'_{m-2}) = \varphi_{n+m-2}^{(n+m-2)}(x'_{m-2})\\
&\varphi_{n+m-1}(x'_{m-1}) = 0,\ \varphi'_{n+m-1}(x'_{m-1}) = 0, \ldots, \varphi_{n+m-1}^{(n+m-2)}(x'_{m-1}) = 0.
\end{aligned}
$$

Dans ces conditions nons avons la formule de quadrature (53) où

$$
(56)\quad
\begin{aligned}
A_{n-1} &= -\varphi_1^{(n+m-1)}(x_{n-1})\\
A_{n-2} &= \varphi_1^{(n+m-1)}(x_{n-2}) - \varphi_2^{(n+m-1)}(x_{n-2})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_1 &= \varphi_{n-2}^{(n+m-1)}(x_1) - \varphi_{n-1}^{(n+m-1)}(x_1)\\
A_0 &= \varphi_{n-2}^{(n+m-1)}(a) - \varphi_n^{(n+m-1)}(a)\\
A'_0 &= \varphi_n^{(n+m-1}(b) - \varphi_{n-1}^{(n+m-1)}(b)\\
A'_1 &= \varphi_{n+1}^{(n+m-1}(x'_1) - \varphi_{n+2}^{(n+m-1}(x'_1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A'_{m-2} &= \varphi_{n+m-2}^{(n+m-1)}(x'_{m-2}) - \varphi_{n+m-1}^{(n+m-1)}(x'_{m-2})\\
A'_{m-1} &= \varphi_{n+m-1}^{(n+m-1)}(x'_{m-1}).
\end{aligned}
$$

14. *Déterminations des coefficients A_i et A_k.* En procédant comme au nr. **2**, nous avons

$$
(57)\qquad A_i = \int_a^b p(x)\, P_i(x)\, dx,
$$

pour $i=0,1,\ldots,n-1$, où

$$
P_0(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})(x-b)(x-x'_1)\ldots(x-x'_{m-1})}{(a-x_1)\ldots(a-x_{n-1})(a-b)(a-x'_1)\ldots(a-x'_{m-1})}
$$

$$
P_i(x) = \frac{(x-a)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{n-1})(x-b)(x-x'_1)\ldots(x-x'_{m-1})}{(x_i-a)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n-1})(x_i-b)(x_i-x'_1)\ldots(x_i-x'_{m-1})},
$$

pour $i=1,2,\ldots,n-1$.

Le polynome $P_i(x)$ gardant un signe constant dans l'intervalle (a, b) on démontre que *A_i a le signe de $(-1)^i$ pour* $i=0,1,\ldots,n-1$.

D'une manière analogue, nous avons

$$
(58)\qquad A'_k = \int_a^b p(x)\, Q_k(x)\, dx,
$$

pour $k=0,1,2,\ldots,m-1$, où

$$
Q_0(x) = \frac{(x-a)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})(x-x'_1)\ldots(x-x'_{m-1})}{(b-a)(b-x_1)\ldots(b-x_{n-1})(b-x'_1)\ldots(b-x'_{m-1})}
$$

$$
Q_k(x) = \frac{(x-a)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})(x-b)(x-x'_1)\ldots(x-x'_{k-1})(x-x'_{k+1})\ldots(x-x'_{m-1})}{(x'_k-a)(x'_k-x_1)\ldots(x'_k-x_{n-1})(x'_k-b)(x'_k-x'_1)\ldots(x'_k-x'_{k-1})(x'_k-x'_{k+1})\ldots(x'_k-x'_{m-1})},
$$

pour $k=1,2,\ldots,m-1$.

Le polynome $Q_k(x)$ gardant un signe constant dans l'intervalle (a, b) on démontre que *A'_k a le signe de $(-1)^k$ pour $k=0,1,\ldots,m-1$.*

On démontre comme au nr. **3**, que *dans la formule de quadrature* (53) *le reste R ne peut pas s'annuler lorsqu'on remplace la fonction $f(x)$ par un polynome quelconque de degré plus grand que $n+m-1$. En particulier, il ne peut exister une formule de quadrature à noeuds extérieurs et aux noeuds a, b, qui soit du type de Gauss.*

15. *Détermination des fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n+m-1}(x)$.* Les équations différentielles (54) et les premières n conditions aux limites (55), nous donnent

$$
(59)\quad
\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \lambda_{n-1}\frac{(x-x_{n-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!}\\
\varphi_2(x) &= \lambda_{n-1}\frac{(x-x_{n-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \lambda_{n-2}\frac{(x-x_{n-2})^{n+m-1}}{(n+m-1)!}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_{n-1}(x) &= \lambda_{x-1}\frac{(x-x_{n-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \lambda_{n-2}\frac{(x-x_{n-2})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \ldots +\\
&\qquad + \lambda_1\frac{(x-x_1)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}\\
\varphi_n(x) &= \int_a^x \frac{(x-s)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}p(s)\,ds + \lambda_{n-1}\frac{(x-x_{n-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \ldots +\\
&\qquad + \lambda_1\frac{(x-x_1)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \lambda_0\frac{(x-a)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}
\end{aligned}
$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont des constantes.

De même les équations différentielles (54) et les dernières $m-1$ conditions aux limites (55) nous donnent

$$\varphi_{n+m-1}(x) = \mu_{m-1}\frac{(x-x'_{m-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!}$$

$$\varphi_{n+m-1}(x) = \mu_{m-1}\frac{(x-x'_{m-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \mu_{m-2}\frac{(x-x'_{m-2})^{n+m-1}}{(n+m-1)!}$$

(60) $$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \mu_{m-1}\frac{(x-x'_{m-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \mu_{m-2}\frac{(x-x'_{m-2})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \dots + \mu_1\frac{(x-x'_1)^{n+m-1}}{(n+m-1)!},$$

où $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m-1}$ sont des constantes.

En écrivant que les conditions aux limites (55) du point b sont satisfaites, nous avons le système d'équations

$$-\lambda_0(b-a) - \lambda_1(b-x_1) - \dots - \lambda_{n-1}(b-x_{n-1}) + \mu_1(b-x'_1) + \dots + \mu_{m-1}(b-x'_{m-1}) = \int_a^b (b-s)p(s)\,ds$$

(61) $$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$-\lambda_0(b-a)^{n+m-1} - \lambda_1(b-x_1)^{n+m-1} - \dots - \lambda_{n-1}(b-x_{n-1})^{n+m-1} + \mu_1(b-x'_1)^{n+m-1} + \dots + \mu_{m-1}(b-x'_{m-1})^{n+m-1} = \int_a^b (b-s)^{n+m-1}p(s)\,ds,$$

qui déterminent les constantes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m-1}$ parceque le déterminant du système est un déterminant de Vandermonde.

L'interprétation des coefficients λ_i et μ_k. D'après les formules (56) qui donnent les coefficients de la formule de quadrature (53), nous avons

(62) $$A_{n-1} = -\lambda_{n-1},\ A_{n-2} = -\lambda_{n-2}, \dots, A_1 = -\lambda_1,\ A_0 = -\lambda_0,$$
$$A'_{m-1} = \mu_{m-1},\ A'_{m-2} = \mu_{m-2}, \dots, A'_1 = \mu_1,\ A'_0 = \mu_0,$$

où on a noté

(62') $$\mu_0 = \int_a^b p(s)\,ds + \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} - \mu_1 - \mu_2 - \dots - \mu_{m-1}.$$

En introduisant la nouvelle inconnue μ_0, on peut transformer le système d'équations (61) et nous aurons

$$\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_{m-1} - \lambda_0 - \lambda_1 - \dots - \lambda_{n-1} = \int_a^b p(s)\,ds$$

(63) $$\mu_0 b + \mu_1 x'_1 + \dots + \mu_{m-1}x'_{m-1} - \lambda_0 a - \lambda x_1 - \dots - \lambda_{n-1}x_{n-1} = \int_a^b p(s)s\,ds$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mu_0 b^{n+m-1} + \mu_1 x_1'^{n+m-1} + \dots + \mu_{m-1}x_{m-1}'^{n+m-1} - \lambda_0 a^{n+m-1} - \lambda_1 x_1^{n+m-1} - \dots - \lambda_{n-1}x_{n-1}^{n+m-1} = \int_a^b p(s)\,s^{n+m-1}ds.$$

L'interprétation des équations (63) est immediate. Les équations (63) expriment que dans la formule de quadrature (53) le reste R est nul lorsqu'on remplace la fonction $f(x)$, par $1, x, \dots, x^{n+m-1}$.

Le degré des polynomes $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ et $\varphi_{n+1}(x), \dots, \varphi_{n+m-1}(x)$ donnés par les formules (59) et (60) est $n+m-1$.

On démontre comme au nr. **5** que les coefficients de la formule de quadrature (53) ont la propriété exprimée par les inégalités.

$$(-1)^{n-j}(A_{n-1} + A_{n-2} + \dots + A_{n-j}) > 0,$$
$$(-1)^{m-l}(A'_{m-1} + A'_{m-2} + \dots + A'_{m-l}) > 0,$$

pour $j = 1, 2, \dots, n-1$ et $l = 1, 2, \dots, m-1$.

16. *La forme de la courbe $y = \varphi(x)$. La fonction $\varphi(x)$, continue dans l'intervalle $[x_{n-1}, x'_{m-1}]$, ainsi que ses dérivées successives, n'a qu'un extremum dans l'intervalle $[x_{n-1}, x'_{m-1}]$.*

En effet, supposons que la fonction $\varphi(x)$ ait deux extrema dans l'intervalle (x_{n-1}, x'_{m-1}) ; alors, en procédant comme au nr. **7**, il résulterait, que la dérivée $\varphi^{(n+m-2)}(x)$ ait $n+m-1$ zéros, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n+m-1}$ dans le même intervalle. On démontre que dans les intervalles $(x_{n-1}, x_{n-2}]$, $[x'_{m-2}, x'_{m-1})$ il n'y a pas des zéros de $\varphi^{(n+m-2)}(x)$, et que dans chacun des intervalles $(x_{n-2}, x_{n-3}], \dots, (x_1, a], [x'_{m-3}, x'_{m-2}), \dots, [b, x'_1)$ il ne peut y avoir qu'un seul zéro de $\varphi^{(n+m-2)}(x)$. Il résulte alors que dans l'intervalle (a, b) il y a trois zéros de $\varphi^{(n+m-2)}(x)$, les points $\eta_{n-1}, \eta_n, \eta_{n+1}$. Mais la fonction $\varphi(x)$ ayant les dérivées $\varphi^{(n+m-1)}(x)$, $\varphi^{(n+m)}(x)$ continues dans l'intervalle (a, b), la dérivée $\varphi^{(n+m)}(x)$ aurait un zéro ζ dans l'intervalle (a, b) ce qui est imposible, parceque dans l'intervalle (a, b) nous avons $\varphi^{(n+m)}(x) = p(x)$. Donc la fonction $\varphi(x)$ a un seul extremum dans l'intervalle $(x_{n-1}\ x'_{m-1})$.

La forme de la courbe $y = \varphi(x)$ est donnée dans la figure 6.

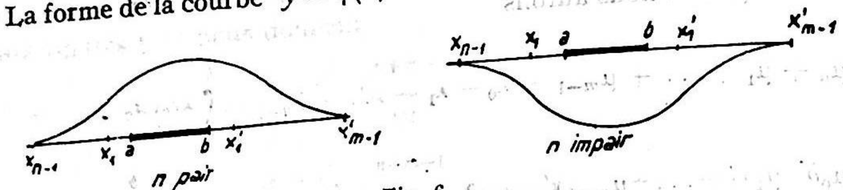


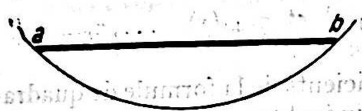
Fig. 6

Dans le cas $n = 1$, et $m = 1$ la formule de quadrature (53) devient la formule du trapèze

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + \int_a^b \varphi(x) f''(x)\,dx$$

et la forme de la courbe $y = \varphi(x)$ est donnée dans la figure 7.

17. *Le reste de la formule de quadrature* (53). La fonction $\varphi(x)$ ayant un signe constant dans l'intervalle (x_{n-1}, x'_{m-1}), le reste de la formule de quadrature (53) peut s'écrire sous la forme



$$R = (-1)^{n+m} f^{(n+m)}(\xi) \int_{x_{n-1}}^{x'_{m-1}} \varphi(x)\,dx,$$

Fig. 7

où $\xi \in (x_{n-1}, x'_{m-1})$. On démontre que

$$R = (-1)^m I f^{(n+m)}(\xi), \tag{64}$$

où

$$I = \frac{1}{(n+m)!}\int_a^b p(x)(x-a)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})(b-x)(x_1'-x)\ldots(x'_{m-1}-x)\,dx \tag{65}$$

Nous avons

$$|R| \leqq \rho\,(x_{n-1}, \ldots, x'_{m-1}), \tag{66}$$

où $\rho(x_{n-1}, \ldots, x_{m-1})$ est une borne supérieure de $|R|$, définie par la formule

$$\rho(x_{n-1}, \ldots, x'_{m-1}) = M_{n+m} I, \tag{67}$$

M_{n+m}, étant une borne supérieure de $|f^{(n+m)}(x)|$ dans l'intervalle $[x_{n-1}, x'_{m-1}]$.

Lorsque les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ se déplacent vers la gauche et les noeuds $x_1', x_2', \ldots, x'_{m-1}$ se déplacent vers la droite, la borne supériuere $\rho(x_{n-1}, \ldots, x'_{m-1})$ croît.

Nous avons

$$\rho(x_{n-1}, \ldots, x_{m-1}) > \rho_0(a, b),$$

où $\rho_0(a, b)$ est une borne supérieure de la valeur absolue du reste de la formule (34) d'Obreschkoff.

Exemple. Nous avons la formule de quadrature

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = \frac{h}{9}\{-2[f(x_0-2h)+f(x_0+2h)]+11[f(x_0-h)+f(x_0+h)]\}+ \tag{68}$$

$$+ \int_{x_0-2h}^{x_0+2h} \varphi(x) f^{(IV)}(x)\,dx$$

et pour le reste R, nous avons

$$|R| \leqq \rho(x_0-2h, \ldots, x_0+2h),$$

où

$$\rho(x_0-2h, \ldots, x_0+2h) = \frac{19}{2880}(2h)^5 M_4.$$

Il résulte que si nous comparons $\rho(x_0-2h, \ldots, x_0+2h)$ avec la borne supérieure de la valeur absolue du reste de la formule d'Obreschkoff (42), ou de la formule de Simpson (45), ou de la formule (48), nous avons

$$\frac{\rho(x_0-2h, \ldots, x_0+2h)}{\rho_0(x_0-h,\ x_0+h)} \geqq 4{,}75$$

$$\frac{\rho(x_0-2h, \ldots, x_0+2h)}{\rho_S(x_0-h,\ x_0+h)} \geqq 19 \tag{69}$$

$$\frac{\rho(x_0-2h, \ldots, x_0+2h)}{\rho'(x_0-h\ \ x_0+h)} > 247.$$

Les formules (69) montrent le désavantage des formules de quadrature à noeuds extérieurs, même si on y ajoute les noeuds a, b, les extrémités de l'intervalle d'intégration.

18. *Le cas* $m=1$. Supposons que tous les noeuds extérieurs soient à gauche de a, ce qui veut dire que $m=1$. La formule de quadrature (53) devient

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx = A_0' f(b) + A_0 f(a) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_{n-1} f(x_{n-1}) + \tag{70}$$

$$\ldots + (-1)^{n+1} \int_{x_{n-1}}^b \varphi(x) f^{(n+1)}(x)\,dx$$

où la fonction $\varphi(x)$ coïncide successivement dans les intervalles $[x_{n-1}, x_{n-2}]$, $[x_{n-2}, x_{n-3}], \ldots, [a, b]$ avec les intégrales $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ des équations différentielles

$$\varphi_i^{(n+1)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ p(x) & \text{si } i = n \end{cases}$$

qui satisfont aux conditions aux limites

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_{n-1}) = 0, \quad \varphi_1'(x_{n-1}) = 0, \ \ldots, \quad \varphi_1^{(n-1)}(x_{n-1}) = 0, \\
&\varphi_2(x_{n-2}) = \varphi_1(x_{n-2}), \quad \varphi_2'(x_{n-2}) = \varphi_1'(x_{n-2}), \ \ldots, \quad \varphi_2^{(n-1)}(x_{n-2}) = \varphi_1^{(n-1)}(x_{n-2}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\varphi_{n-1}(x_1) = \varphi_{n-2}(x_1), \quad \varphi_{n-1}'(x_1) = \varphi_{n-2}'(x_1), \ \ldots, \quad \varphi_{n-1}^{(n-1)}(x_1) = \varphi_{n-2}^{(n-1)}(x_1), \\
&\varphi_n(a) = \varphi_{n-1}(a), \quad \varphi_n'(a) = \varphi_{n-1}'(a), \ \ldots, \quad \varphi_n^{(n-1)}(a) = \varphi_{n-1}^{(n-1)}(a), \\
&\varphi_n(b) = 0, \quad \varphi_n'(b) = 0, \ \ldots, \quad \varphi_n^{(n-1)}(b) = 0
\end{aligned}$$

Les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ de la formule de quadrature (70) sont alternativement positifs et négatifs, A_0 et A_0' sont positifs.

On démontre comme aux. nr.4, 5 et 7 que la forme de la courbe $y = \varphi(x)$ dans le cas $n > 1$ et celle donnée dans la figure 8.

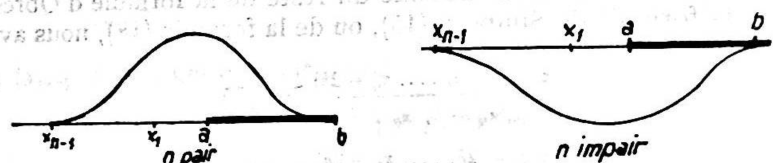


Fig. 8

La fonction $\varphi(x)$ ayant un signe constant dans l'intervalle (x_{n-1}, b) nous pouvons écrire

$$R = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b p(x)(x-a)(x-x_1) \ldots (x-x_{n-1})(b-x)\,dx, \tag{71}$$

où $\xi \in (x_{n-1}, b)$

Nous avons

$$|R| \leq \rho(x_{n-1}, \ldots, b),$$

où

$$\rho(x_{n-1}, \ldots, b) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b p(x)(x-a)(x-x_1) \ldots (x-x_{n-1})(b-x)\,dx.$$

Exemples. 1. Nous avons la formule de quadrature

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{h}{24}[9f(a+h) + 19f(a) - 5f(a-h) + f(a-2h)] + \int_{a-2h}^{a+2h} \varphi(\alpha) f^{(IV)}(x)\,dx. \tag{72}$$

La fonction $\varphi(x)$ est négative dans l'intervalle $(a-2h, a+h)$ et nous avons

$$R = f^{(IV)}(\xi) \int_{a-2h}^{a+2h} \varphi(x)\,dx = -\frac{19h^5}{720} f^{(IV)}(\xi),$$

où $\xi \in (a-2h, a+h)$.

2. Nous avons la formule de quadrature

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{h}{720}[251f(a+h) + 646f(a) - 264f(a-h) + 100f(a-2h) - 19f(a-3h)] - \int_{a-3h}^{a+h} \varphi(x) f^{(5)}(x)dx. \tag{73}$$

La fonction $\varphi(x)$ est positive dans l'intervalle $(a-3h, a+h)$, et nous avons

$$R = -f^{(5)}(\xi) \int_{a-3h}^{a+h} \varphi(x)\,dx = \frac{3h^6}{160} f^{(5)}(\xi),$$

où $\xi \in (a-3h, a+h)$.

Les exemples (72) et (73) sont tirés du livre de S. E. MIKELADZE [4].

§ 3. Formules de quadrature à noeuds extérieurs à gauche de a et au noeud a.

19. Supposons que la fonction $f(x)$ soit de la classe C^n dans l'intervalle $[\alpha, b]$. Cherchons une formule de quadrature de la forme

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = A_0 f(a) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_{n-1} f(x_{n-1}) + R, \tag{74}$$

qui utilise les noeuds a et $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ à gauche de a, tels que $x_{n-1} < x_{n-2} <, \ldots, < x_1 < a$ et étudions son reste.

Nous attachons aux intervalles $[x_{n-1}, x_{n-2}]$, $[x_{n-2}, x_{n-3}]$, ..., $[a, b]$ les intégrales $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ des équations différentielles

$$\varphi_i^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ p(x) & \text{si } i = n \end{cases} \tag{75}$$

qui satisfont aux conditions aux limites

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_{n-1}) = 0, \quad \varphi_1'(x_{n-1}) = 0, \ldots, \quad \varphi_1^{(n-2)}(x_{n-1}) = 0 \\
&\varphi_2(x_{n-2}) = \varphi_1(x_{n-2}), \varphi_2'(x_{n-2}) = \varphi_1'(x_{n-2}), \ldots, \varphi_2^{(n-2)}(x_{n-2}) = \varphi_1^{(n-2)}(x_{n-2}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\varphi_n(a) = \varphi_{n-1}(a), \quad \varphi_n'(a) = \varphi_{n-1}'(a), \ldots, \quad \varphi_n^{(n-2)}(a) = \varphi_{n-1}^{(n-2)}(a) \\
&\varphi_n(b) = 0, \quad \varphi_n'(b) = 0, \ldots, \quad \varphi_n^{(n-1)}(b) = 0.
\end{aligned} \tag{76}$$

En appliquant la méthode exposée au nr. **1**, on arrive à la formule de quadrature (74), où les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ sont donnés par les formules

$$\begin{aligned}
A_{n-1} &= \qquad\qquad\quad - \varphi_1^{(n-1)}(x_{n-1}), \\
A_{n-1} &= \varphi_1^{(n-1)}(x_{n-2}) - \varphi_2^{(n-1)}(x_{n-1}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_1 &= \varphi_{n-2}^{(n-1)}(x_1) \quad - \varphi_{n-1}^{(n-1)}(x_1), \\
A_0 &= \varphi_{n-1}^{(n-1)}(a) \quad - \varphi_n^{(n-1)}(a),
\end{aligned} \tag{77}$$

et le reste R, par la formule

$$R = (-1)^n \int_{x_{n-1}}^{b} \varphi(x) f^{(n)}(x)\, dx. \tag{78}$$

La fonction $\varphi(x)$ coïncide successivement dans les intervalles $[x_{n-1}, x_{n-2}]$, $[x_{n-2}, x_{n-3}]$, ..., $[a, b]$ avec les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$.

On démontre que les coefficients de la formule de quadrature (74) sont donnés par les formules

$$A_i = \int_a^b P_i(x)\, dx \tag{79}$$

pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$, où

$$P_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})}{(a - x_1)(a - x_2) \ldots (a - x_{n-1})}$$

et

$$P_i(x) = \frac{(x - a)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_i - a)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_{n-1})}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Le signe de A_i est le signe de $(-1)^i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Dans la formule de quadrature (74) le reste R ne peut pas s'annuler lorsqu'on remplace $f(x)$ par un polynome de degré plus grand que $n-1$, quel que soit le choix des noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Détermination des fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$. Les équations différentielles (75) et les premières n conditions aux limites (76) déterminent les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \lambda_{n-1} \frac{(x - x_{n-1})^{n-1}}{(n-1)!} \\
\varphi_2(x) &= \lambda_{n-1} \frac{(x - x_{n-1})^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_{n-2} \frac{(x - x_{n-2})^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_{n-1}(x) &= \lambda_{n-1} \frac{(x - x_{n-1})^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_{n-2} \frac{(x - x_{n-2})^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \lambda_1 \frac{(x - x_1)^{n-1}}{(n-1)!} \\
\varphi_n(x) &= \int_a^x \frac{(x - s)^{n-1}}{(n-1)!} p(s)\, ds + \lambda_{n-1} \frac{(x - x_{n-1})^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_{n-2} \frac{(x - x_{n-2})^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \\
&\quad + \lambda_1 \frac{(x - x_1)^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_0 \frac{(x - a)^{n-1}}{(n-1)!},
\end{aligned} \tag{80}$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont des constantes.

En écrivant que les conditions aux limites (76) du point b sont satisfaites, on obtient le système d'équations,

$$\begin{aligned}
&\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} = -\int_a^b p(s)\, ds, \\
&\lambda_0(b - a) + \lambda_1(b - x_1) + \ldots + \lambda_{n-1}(b - x_{n-1}) = -\int_a^b p(s)(b - s)\, ds, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\lambda_0(b - a)^{n-1} + \lambda_1(b - x_1)^{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1}(b - x_{n-1}) = \\
&\qquad = -\int_a^b p(s)(b - s)^{n-1}\, ds,
\end{aligned} \tag{81}$$

qui déterminent $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$.

D'après les formules (77) et (80), il résulte que

$$A_{n-1} = -\lambda_{n-1}, \quad A_{n-2} = -\lambda_{n-2}, \ldots, \quad A_1 = -\lambda_1, \quad A_0 = -\lambda_0. \tag{82}$$

Tenant compte de ces formules, l'interpretétation des équations (81) est simple. Ces équations expriment que le reste R de la formule de quadrature (74) est nul lorsqu'on remplace la fonction $f(x)$ par $1, b-x, \ldots, (b-x)^{n-1}$.

On démontre comme au nr. 5 que *le degré des polynomes* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ *est* $n-1$.

De même on démontre que dans la formule de quadrature (74), nous avons

$$(-1)^{n-j}(A_{n-1}+A_{n-2}+\ldots+A_{n-j})>0$$

pour $j=1, 2, \ldots, n-1$.

21. *La forme de la courbe* $y=\varphi(x)$. On démontre que *la fonction* $\varphi(x)$ *n'a qu'un seul extremum dans l'intervalle* (x_{n-1}, b). Pour faire la démonstration supposons que la fonction $\varphi(x)$ ait deux extrema dans l'intervalle (x_{n-1}, b). Alors, en procédant comme au nr. 7, il résulterait que la dérivée $\varphi^{(n-2)}(x)$ a $n-1$ zéros $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ dans l'intervalle (x_{n-1}, b). Les fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ étant des polynomes de degré $n-1$, dans l'intervalle $(x_{n-1}, x_{n-2}]$ il n'y a pas des zéros de $\varphi^{(n-2)}(x)$ et dans chacun des intervalles suivants il n'y a qu'un seul zero de $\varphi^{(n-2)}(x)$. Dans l'intervalle (a, b) il n'y a donc qu'un seul zéro de $\varphi^{(n-2)}(x)$ que nous désignons par η_{n-1}. Nous pouvons appliquer le théorème de Rolle à la fonction $\varphi^{(n-2)}(x)$ et à l'intervalle $[\eta_{n-1}, b]$. On en déduit que la dérivée $\varphi^{(n-1)}(x)$ a un zéro ζ dans l'intervalle (η_{n-1}, b). Nous appliquons encore le théorème de Rolle à la fonction $\varphi^{(n-1)}(x)$ et à l'intervalle $[\zeta, b]$ et nous déduisons que la derivée $\varphi^{(n)}(x)$ a un zéro dans l'intervalle (ζ, b) c'est-à-dire dans l'intervalle (a, b) ce qui est impossible puisque dans l'intervalle (a, b) nous avons $\varphi^{(n)}(x)=p(x)$ et nous avons supposé que la fonction $p(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle (a, b).

La fonction $\varphi(x)$ a donc un seul extremum dans l'intervalle (x_{n-1}, b)

La forme de la courbe $y=\varphi(x)$ est donnée dans les figures 9, 10 et 11 pour $n>2$, $n=2$ et $n=1$.

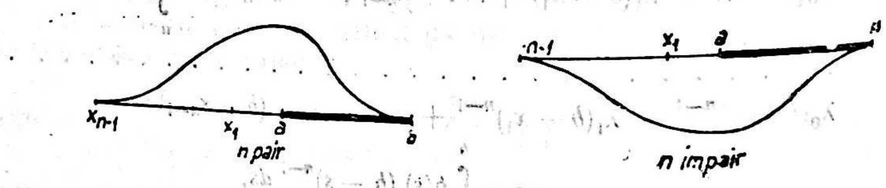


Fig. 9

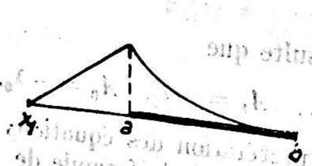


Fig. 10

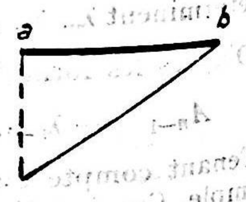


Fig. 11

22. *Le reste de la formule de quadrature* (74) La fonction $\varphi(x)$ ayant un signe constant dans l'intervalle (x_{n-1}, b) nous pouvons écrire la formule (79) sous la forme

$$R=(-1)^n f^{(n)}(\xi)\int_{x_{n-1}}^{b}\varphi(x)\,dx,$$

où $\xi \in (x_{n-1}, b)$, ou

$$R=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\int_a^b p(x)(x-a)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})dx. \tag{83}$$

Il résulte que

$$|R| \leqq \rho(x_{n-1}, \ldots, a), \tag{84}$$

où

$$\rho(x_{n-1}, \ldots, a)=\frac{M_n}{n!}\int_a^b p(x)(x-a)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\,dx. \tag{85}$$

On démontre que *si les noeuds* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *se déplacent vers la gauche, la borne supérieure* $\rho(x_{n-1}, \ldots, a)$ *de* $|R|$ *croît.*

Nous donnerons des exemples importants dans le § 4.

§ 4. Formules de quadrature à noeuds extérieurs à gauche de a et au noeud a, en progression arithmétique.

23. Nous allons étudier maintenant des formules de quadrature à noeuds extérieurs à gauche de a et au noeud a, en progression arithmétique. On sait qu'on emploie de telles formules pour obtenir des formules d'intégration numérique des équations différentielles, du type d'Adams.

Considérons l'intervalle $[a, b]$, et désignons par $x_0=\frac{a+b}{2}$, l'abscisse du milieu de l'intervalle et par $2h=b-a$ la longueur de l'intervalle. A l'aide de x_0 et de h, nous définissons les noeuds par la formule

$$x_p=x_0-(2p-1)h,$$

où $p=1, 2, \ldots, n$. Avec ces notations nous avons $x_1=a$.

En supposant que la fonction $f(x)$ soit de la classe C^n dans l'intervalle $[x_0-(2n-1)h, x_0+h]$, nous avons démontré dans le § 3, la formule de quadrature, correspondant à $p(x)=1$

$$\int_a^b f(x)dx=A_1f(x_1)+A_2f(x_2)+\ldots+A_nf(x_n)+\int_{x_0-(2n-1)h}^{x_0+h}\varphi_n(x)f^{(n)}(x)dx, \tag{86}$$

où la fonction $\varphi_n(x)$ a le même signe dans l'intervalle $(x_0-(2n-1)h, x_0+h)$.

Nous allons transformer la formule de quadrature (86) en introduisant les différences successives $\Delta^1 f(x)$, $\Delta^2 f(x)$, ..., de la fonction $f(x)$, définies par

$$\Delta^1 f(x_2) = f(x_1) - f(x_2)$$
$$\Delta^2 f(x_3) = f(x_1) - 2f(x_2) + f(x_3)$$
$$\Delta^3 f(x_4) = f(x_1) - 3f(x_2) + 3f(x_3) - f(x_4)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^{n-1} f(x_n) = f(x_1) - C^1_{n-1}(x_2) + \ldots + (-1)^{n-1} C^{n-1}_{n-1} f(x_n).$$

On peut résoudre ces équations par rapport à $f(x_2)$, $f(x_3)$, ..., $f(x_n)$ Nous aurons

$$f(x_2) = f(x_1) - \Delta^1 f(x_2),$$
$$f(x_3) = f(x_1) - 2\Delta^1 f(x_2) + \Delta^2 f(x_3),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(x_n) = f(x_1) - C^1_{n-1}\Delta^1 f(x_2) + \ldots + (-1)^{n-1} C^{n-1}_{n-1}\Delta^{n-1} f(x_n).$$

La formule (86) devient alors

$$\int_a^b f(x)dx = 2h[B_1 f(x_1) + B_2\Delta^1 f(x_2) + \ldots + B_n\Delta^{n-1} f(x_n)] + \int_{x_0-(2n-1)h}^{x_0+h} \varphi_n(x) f^{(n)}(x)dx. \tag{87}$$

Le calcul des coefficients B_1, B_2, ..., B_n se fait de la manière suivante. On remplace $f(x)$ par 1 et l'on obtient $B_1 = 1$. On remplace ensuite $f(x)$ par

$$f(x) = \frac{1}{k!}(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k), \tag{88}$$

où $k = 1, 2, \ldots, n-1$ et nous avons $\Delta^i f(x) = 0$ pour $i > k$. D'autre part, pour $i < k$, nous avons

$$\Delta^i f(x) = f(x + 2ih) - C^1_i f(x + 2(i-1)h) + \ldots + (-1)^i C^i_i f(x),$$

d'où il résulte que

$$\Delta^i f(x_{i+1}) = f(x_1) - C^1_i f(x_2) + \ldots + (-1)^i C^i_i f(x_{i+1}).$$

Pour $i = 0, 1, \ldots, k-1$ nous avons $\Delta^i f(x_{i+1}) = 0$, et pour $i = k$,

$$\Delta^k f(x_{k+1}) = (-1)^k f(x_{k+1}) = \frac{(-1)^k}{k!}(x_{k+1} - x_1)(x_{k+1} - x_2)\ldots(x_{k+1} - x_k) = (2h)^k$$

Il résulte que nous aurons

$$(2h)^{k+1} B_{k+1} = \frac{1}{k!}\int_{x_0-h}^{x_0+h} (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)dx.$$

Si dans l'intégrale du second membre on fait le changement de variable

$$x = x_0 - h + 2uh,$$

l'intégrale devient

$$(2h)^{k+1}\int_0^1 u(u+1)\ldots(u+k-1)du.$$

Donc si l'on pose

$$J_k = \frac{1}{k!}\int_0^1 u(u+1)\ldots(u+k-1)du, \tag{89}$$

nous avons

$$B_{k+1} = J_K$$

pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

D'après la formule (83) nous avons pour le reste R de la formule de quadrature (87)

$$R = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\int_{x_0-h}^{x_0+h} (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)\,dx;\quad \xi \in (x_0 - (2n-1)h,\ x_0 + h)$$

et tenant compte de la formule (89), nous pouvons écrire

$$R = (2h)^{n+1} J_n f^{(n)}(\xi).$$

La formule (87) peut s'écrire finalement sous la forme

$$\int_a^b f(x)dx = 2h[f(x_1) + J_1\Delta^1 f(x_2) + J_2\Delta^2 f(x_3) + \ldots + J_{n-1}\Delta^{n-1} f(x_n)] + (2h)^{n+1} J_n f^{(n)}(\xi). \tag{90}$$

On arrive ordinairement à la formule de quadrature (90) en employant la formule d'interpolation de Newton à noeuds en progression arithmétique, à gauche.

En tenant compte des formules

$$J_1 = \int_0^1 u du = \frac{1}{2}$$

$$J_2 = \frac{1}{2!}\int_0^1 u(u+1)du = \frac{5}{12},$$

$$J_3 = \frac{1}{3!}\int_0^1 u(u+1)(u+2)du = \frac{3}{8}$$

. . . .

la formule (90) pour $n = 2, 3, \dots, 9$ devient

$$\int_a^b f(x)dx = 2h\left[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2)\right] + \frac{5}{12}(2h)^3 f''(\xi),$$

$$\int_a^b f(x)dx = 2h\left[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_3)\right] + \frac{3}{8}(2h)^4 f'''(\xi),$$

$$\int_a^b f(x)dx = 2h\left[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_3) + \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_4)\right] + \frac{251}{720}(2h)^5 f^{IV}(\xi),$$

$$\int_a^b f(x)dx = 2h\left[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_3) + \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_4) + \frac{251}{720}\Delta^4 f(x_5)\right] + \frac{95}{288}(2h)^6 f^{(5)}(\xi), \tag{91}$$

$$\int_a^b f(x)dx = 2h\left[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_3) + \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_4) + \frac{251}{720}\Delta^4 f(x_5) + \frac{95}{288}\Delta^5 f(x_6)\right] + \frac{19\,087}{12.\,7!}(2h)^7 f^{(6)}(\xi),$$

$$\int_a^b f(x)dx = 2h\left[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_3) + \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_4) + \frac{251}{720}\Delta^4 f(x_5) + \frac{95}{288}\Delta^5 f(x_6) + \frac{19\,087}{12.\,7!}\Delta^6 f(x_7)\right] + \frac{36\,799}{3.\,8!}(2h)^8 f^{(7)}(\xi),$$

$$\int_a^b f(x)dx = 2h\left[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_3) + \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_4) + \frac{251}{720}\Delta^4 f(x_5) + \frac{95}{288}\Delta^5 f(x_6) + \frac{19\,087}{12.\,7!}\Delta^6 f(x_7) + \frac{36\,799}{3.\,8!}\Delta^7 f(x_8)\right] + \frac{1070017}{10!}(2h)^9 f^{(8)}(\xi),$$

$$\int_a^b f(x)dx = 2h\left[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_3) + \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_4) + \frac{251}{720}\Delta^4 f(x_5) + \frac{95}{288}\Delta^5 f(x_6) + \frac{19\,087}{12.\,7!}\Delta^6 f(x_7) + \frac{36\,799}{3.\,8!}\Delta^7 f(x_8) + \frac{1070017}{10!}\Delta^8 f(x_9)\right] + \frac{2082753}{2.\,10!}(2h)^{10} f^{(9)}(\xi),$$

$$\int_a^b f(x)dx = 2h\left[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_3) + \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_4) + \frac{251}{720}\Delta^4 f(x_5) + \frac{95}{288}\Delta^5 f(x_6) + \frac{19\,087}{12.\,7!}\Delta^6 f(x_7) + \frac{36\,799}{3.\,8!}\Delta^7 f(x_8) + \frac{1070017}{10!}\Delta^8 f(x_9) + \frac{2082753}{2.\,10!}\Delta^9 f(x_{10})\right] + \frac{134\,211\,265}{12!}(2h)^{11} f^{(10)}(\xi).$$

Dans toutes ces formules le point ξ qui entre dans l'expression du reste R, diffère d'une formule à l'autre.

24. *Une propriété des coefficients J_k de la formule de quadrature* (90). *Les coefficients J_k décroissent lorsque k croît, et les différences successives de ces coefficients gardent un signe constant quel que soit k.*

En effet, nous avons

$$J_{k+1} - J_k = \frac{1}{k!}\int_a^b u(u+1)\dots(u+k-1)\left(\frac{u+k}{k+1} - 1\right)du,$$

c'est-à-dire

$$J_{k+1} - J_k = \frac{-1}{(k+1)!}\int_0^1 u(u+1)\dots(u+k-1)(1-u)\,du,$$

d'où il résulte que

$$J_{k+1} < J_k.$$

Considérons maintenant les différences d'ordre l, c'est à dire

$$J_{k+l} - C_l^1 J_{k+l-1} + \dots + (-1)^l C_l^l J_k =$$

$$= \frac{1}{k!}\int_0^1 u(u+1)\dots(u+k-1)\left[\frac{(u+k)(u+k+1)\dots(u+k+l-1)}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)} - C_l^1\frac{(u+k)(u+k+1)\dots(u+k+l-2)}{(k+1)(k+2)\dots(k+l-1)} + \dots + (-1)^l C_l^l\right]du.$$

On démontre que la grande paranthèse est égale à

$$\frac{(u-1)(u-2)\dots(u-l)}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)} = (-1)^l\frac{(1-u)(2-u)\dots(l-u)}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)}.$$

Nous avons donc

$$J_{k+l} - C_l^1 J_{k+l-1} + \ldots + (-1)^l C_l^l J_k =$$

$$= (-1)^l \frac{1}{(k+l)!} \int_0^1 u(u+1) \ldots (u+k-1)(1-u)(2-u) \ldots (l-u)du,$$

ce qui prouve que la différence d'ordre l du premier membre a le signe de $(-1)^l$.

25. *Le reste dans la formule de quadrature* (90) En désignant par M_n une borne supérieure de $|f^n(x)|$ dans l'intervalle $[x_0 - (2n-1)h, x_0 + h]$ nous avons pour le reste R de la formule de quadrature (90)

$$|R_n| \leqq \rho_n(x_0 - (2n-1)h, \ldots, x_0 - h),$$

où

(92) $$\rho_n(x_0 - (2n-1)h, \ldots, x_0 - h) = (2h)^{n+1} J_n M_n .$$

Nous allons comparer maintenant la borne supérieure $\rho(x_0 - (2n-1)h, \ldots, x_0 - h)$ *avec la borne supérieure de la valeur absolue du reste de la formule de quadrature de Gauss, de la forme*

(93) $$\int_a^b f(x)dx = C_1 f(\xi_1) + C_2 f(\xi_2) + \ldots + C_n f(\xi_n) + R_n',$$

ou de la forme

(94) $$\int_a^b f(x)dx = C_0' f(a) + C_1' f(\xi_1') + \ldots + C_n' f(\xi_n') + R_n''.$$

Dans la formule (93) le reste R est nul lorsque la fonction $f(x)$ est remplacée par un polynome quelconque de degré $2n-1$ et dans la formule (94) le reste R est nul lorsque la fonction $f(x)$ est remplacée par un polynome quelconque de degré $2n$.

On sait que nous avons

(95) $$R_n' = \int_a^b \varphi_{2n}(x) f^{(2n)}(x)dx = \frac{(n!)^4}{[(2n)!]^3 (2n+1)} (2h)^{2n+1} f^{(2n)}(\xi'),$$

$$R_n'' = \int_a^b \varphi_{2n+1}(x) f^{(2n+1)}(x)\, dx = \frac{(n!)^3 (n+1)!}{2[(2n+1)!]^3} (2h)^{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi''),$$

où $\xi' \in (a, b)$ et $\xi'' \in (a, b)$.

En désignant par M_{2n}^0 et M_{2n+1}^0 les bornes supérieures de $|f^{(2n)}(x)|$ et $|f^{(2n+1)}(x)|$ dans l'intervalle $[a, b] \in$ nous avons

$$|R_n'| \leqq \rho_{2n}'(a, b), \quad |R''| \leqq \rho_{2n+1}''(a, b),$$

où

(96) $$\rho_{2n}'(a, b) = \frac{(n!)^4}{[(2n)!]^3 (2n+1)} (2h)^{2n+1} M_{2n}^0,$$

$$\rho_{2n+1}''(a, b) = \frac{(n!)^3 (n+1)!}{2[(2n+1)!]^3} (2h)^{2n+2} M_{2n+1}^0.$$

Nous pouvons faire une comparaison entre la borne supérieure $\rho(x_0 - (2n-1)h, \ldots, x_0 - h)$ donnée par la formule (92) et les bornes supérieures correspondantes $\rho_{2n}'(a, b)$ et $\rho_{2n+1}''(a, b)$ données par les formules (96).

En faisant $n = 2, 3, \ldots, 10$ dans les formules (95) et $n = 1, 2, \ldots, 5$ dans les formules (96), nous avons le tableau suivant de comparaison, où nous avons introduit une colonne, pour les rapports

$$\frac{\rho}{\rho_{2n}'} \quad \text{ou} \quad \frac{\rho}{\rho_{2n+1}''}:$$

(97)

n	$\rho(x_0-(2n-1)h, \ldots, x_0 - h)$	n	$\rho_{2n}(a, b)$	n	$\rho_{2n+1}''(a, b)$	$\frac{\rho}{\rho_{2n}'}$ ou $\frac{\rho}{\rho_{2n+1}''}$
2	$\frac{5}{12}(2h)^3 M_2$	1	$\frac{1}{24}(2h)^3 M_2^0$			$10 \frac{M_2}{M_2^0}$
3	$\frac{3}{8}(2h)^4 M_3$			1	$\frac{1}{216}(2h)^4 M_3^0$	$81 \frac{M_3}{M_3^0}$
4	$\frac{251}{720}(2h)^5 M_4$	2	$\frac{1}{4\,320}(2h)^5 M_4^0$			$1\,506 \frac{M_4}{M_4^0}$
5	$\frac{95}{288}(2h)^6 M_5$			2	$\frac{1}{72\,000}(2h)^6 M_5^0$	$23\,750 \frac{M_5}{M_5^0}$
6	$\frac{19\,087}{12.7!}(2h)^7 M_6$	3	$\frac{1}{2\,016\,000} \cdot (2h)^7 M_6^0$			$636\,233{,}3 \ldots \frac{M_6}{M_6^0}$
7	$\frac{36\,799}{3.8!}(2h)^8 M_7$			3	$\frac{1}{49\,392\,000} \cdot (2h)^8 M_7^0$	$15\,026\,528{,}3 \frac{M_7}{M_7^0}$
8	$\frac{1\,070\,017}{10!}(2h)^9 M_8$	4	$\frac{1}{1\,778\,112\,000} \cdot (2h)^9 M_8^0$			$524\,308\,330 \frac{M_8}{M_8^0}$
9	$\frac{2\,082\,753}{2.10!}(2h)^{10} M_9$			4	$\frac{1}{57\,610\,828\,800} \cdot (2h)^{10} M_9^0$	$16\,532\,893\,314 \frac{M_9}{M_9^0}$
10	$\frac{134\,211\,265}{12!}(2h)^{11} M_{10}$	5	$\frac{1}{1\,237\,732\,650.2^{11}} \cdot (2h)^{11} M_{10}^0$			$710\,246\,014\,380 \frac{M_{10}}{M_{10}^0}$

Les nombres de la dernière colonne qui croissent rapidement et atteignent 710246014380 nous montrent qu'il faut appliquer les formules de quadrature à noeuds extérieurs en progression arithmétique avec attention. Il est préférable de les remplacer par des formules de quadrature à noeuds intérieurs, par exemple, par les formules de quadrature de *Gauss*.

§ 5. Formules de quadrature à noeuds extérieurs et aux noeuds a, b symétriques par rapport au milieu de l'intervalle (a, b) et en progression arithmétique.

26. Nous considérerons maintenant des formules de quadrature à noeuds extérieurs et aux noeuds a, b symétriques par rapport au milieu de l'intervalle (a, b), en progression arithmétique qui s'obtiennent ordinairement en appliquant la formule d'interpolation de Bessel

Avec les notations du § précédent, les abscisses des noeuds sont

$$x_i = x_0 - (2i-1)h, \quad x_i' = x_0 + (2i-1)h, \tag{98}$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$, les noeuds sont distribués sur l'axe des x, comme dans la figure 12.

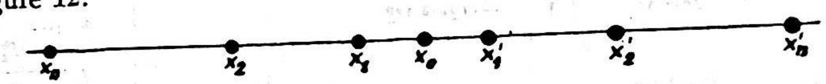


Fig. 12

Pour une fonction $f(x)$ de la classe C^{2n} dans l'intervalle $[x_n, x_n']$, nous avons la formule de quadrature

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_n f(x_n) + \tag{99}$$
$$+ A_1' f(x_1') + A_2' f(x_2') + \ldots + A_n' f(x_n') + \int_{x_n}^{x_n'} \varphi(x) f^{(2n)}(x)dx,$$

où la fonction $\varphi(x)$ a un signe constant dans l'intervalle (x_n, x_n').

Les noeuds étant symétriques par rapport au milieu de (a, b) nous avons $A_k = A_k'$, pour $k = 1, 2, \ldots, n$.

En effet, nous avons

$$A_k = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)(x-x_1')\ldots(x-x_n')}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)(x_k-x_1')\ldots(x_k-x_n')}dx,$$

$$A_k' = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_n)(x-x_1')\ldots(x-x_{k-1}')(x-x_{k+1}')\ldots(x-x_n')}{(x_k'-x_1)\ldots(x_k'-x_n)(x_k'-x_1')\ldots(x_k'-x_{k-1}')(x_k'-x_{k+1}')\ldots(x_k'-x_n')}dx.$$

En tenant compte des formules (98) et en faisant dans les intégrales précédentes le changement de variable

$$x = x_0 + \lambda h,$$

nous avons

$$A_k = \frac{(-1)^{n+k-1} h}{2^{2n-1}(k+n-1)!(n-k)!}\int_{-1}^{+1} [\lambda^2-1][\lambda^2-3^2]\ldots[\lambda^2-(2k-3)^2]\,.$$
$$.\,[\lambda^2-(2k+1)^2]\ldots[\lambda^2-(2n-1)^2](\lambda-2k+1)d\lambda,$$

$$A_k' = \frac{(-1)^{n+k} h}{2^{2n-1}(k+n-1)!(n-k)!}\int_{-1}^{+1} [\lambda^2-1][\lambda^2-3^2]\ldots[\lambda^2-(2k-3)^2]\,.$$
$$.\,[(\lambda^2-(2k+1)^2\ldots[\lambda^2-(2n-1)^2](\lambda+2k-1)d\lambda,$$

d'où il résulte que

$$A_k - A_k' = \frac{(-1)^{n+k-1} h}{2^{2(n-1)}(k+n-1)!\,(n-k)!}\int_{-1}^{+1} [\lambda^2-1]\ldots[\lambda^2-(2k-3)^2]\,.$$
$$.\,[\lambda^2-(2k+1)^2]\ldots[\lambda^2-(2n-1)^2]\lambda d\lambda.$$

L'intégrale du second membre est nulle et par suite $A_k = A_k'$. En ajoutant les dernières formules membre à membre nous déduisons l'expression du coefficient A_k,

$$A_k = \frac{(-1)^{n+k}(2k-1)h}{2^{2n-1}(k+n-1)!(n-k)!}\int_{-1}^{+1} [\lambda^2-1]\ldots[\lambda^2-(2k-3)^2]\,. \tag{100}$$
$$.\,[\lambda^2-(2k+1)^2]\ldots[\lambda^2-(2n-1)^2]d\lambda.$$

Les formules (62) et $A_k = A_k'$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$ montrent que *la courbe $y = \varphi(x)$ est symétrique par rapport à la droite $x = x_0$.*

La formule (99) peut donc s'écrire sous la forme

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = A_1[f(x_1) + f(x_1')] + A_2[f(x_2) + f(x_2')] + \ldots + \tag{101}$$
$$+ A_n[f(x_n) + f(x_n')] + \int_{x_n}^{x_n'} \varphi(x) f^{(2n)}(x)dx.$$

27. *Transformation de la formule de quadrature* (101). En procédant comme au nr. **23**, nous introduisons les différences successives de la fonction $f(x)$

$$
(102)\quad
\begin{aligned}
\Delta^{2p} f(x_{p+1}) &= f(x_{p+1}) - C_{2p}^1 f(x_p) + C_{2p}^2 f(x_{p-1}) - C_{2p}^3 f(x_{p-2}) + \dots + \\
&+ (-1)^p C_{2p}^p f(x_1) + (-1)^{p+1} C_{2p}^{p+1} f(x') + (-1)^{p+2} C_{2p}^{p+2} f(x_2') + \dots + \\
&+ (-1)^{2p-1} C_{2p}^{2p-1} f(x_{p-1}') + (-1)^{2p} C_{2p}^{2p} f(x_p') \\
\Delta^{2p} f(x_p) &= f(x_p) - C_{2p}^1 f(x_{p-1}) + C_{2p}^2 f(x_{p-2}) - C_{2p}^3 f(x_{p-3}) + \dots + \\
&+ (-1)^{p-1} C_{2p}^{p-1} f(x_1) + (-1)^p C_{2p}^p f(x_1') + (-1)^{p+1} C_{2p}^{p+1} f(x_2') + \dots + \\
&+ (-1)^{2p-1} C_{2p}^{2p-1} f(x_p') + (-1)^{2p} C_{2p}^{2p} f(x_{p+1}').
\end{aligned}
$$

En ajoutant ces formules membre à membre, on obtient

$$
\begin{aligned}
\Delta^{2p} f(x_{p+1}) + \Delta^{2p} f(x_p) &= [f(x_{p+1}) + f(x_{p+1}')] - (C_{2p}^1 - 1)[f(x_p) + f(x_p)] + \\
&+ (C_{2p}^2 - C_{2p}^1)[f(x_{p-1}) + f(x_{p-1}')] - (C_{2p}^3 - C_{2p}^2)[f(x_{p-2}) + f(x_{p+2}')] + \dots + \\
&+ (-1)^p (C_{2p}^p - C_{2p}^{p-1})[f(x_1) + f(x_1')]
\end{aligned}
$$

et en faisant $p = 1, 2, \dots$ nous aurons

$$
\begin{aligned}
\Delta^2 f(x_2) + \Delta^2 f(x_1) &= [f(x_2) + f(x_2')] - [f(x_1) + f(x_1')] \\
\Delta^4 f(x_3) + \Delta^4 f(x_2) &= [f(x_3) + f(x_3')] - 3[f(x_2) + f(x_2')] + 2[f(x_1) + f(x_1')] \\
\Delta^6 f(x_4) + \Delta^6 f(x_3) &= [f(x_4) + f(x_4)] - 5[f(x_3) + f(x_3')] + 9[f(x_2) + f(x_2')] - \\
&\qquad - 5[f(x_1) + f(x_1')] \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

De ces formules *il résulte qu'en général* $f(x_{p+1}) + f(x_{p+1}')$ *peut s'exprimer linéairement à l'aide de* $f(x_1) + f(x_1')$, $\Delta^2 f(x_2) + \Delta^2 f(x_1)$, $\Delta^4 f(x_3) + \Delta^4 f(x_2), \dots, \Delta^{2p} f(x_{2p+1}) + \Delta^{2p} f(x_{2p})$.

La formule de quadrature (101), devient donc

$$
(103)\quad
\begin{aligned}
\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx &= 2h\{B_0[f(x_1) + f(x')] + B_1[\Delta^2 f(x_2) + \Delta^2 f(x_1)] + \\
&+ B_2[\Delta^2 f(x_3) + \Delta^2 f(x_2)] + \dots + \\
&+ B_{n-2}[\Delta^{2(n-1)} f(x_n) + \Delta^{2(n-1)} f(x_{n-1})]\} + \int_{x_n}^{x_n'} \varphi(x) f^{(2n)}(x)dx.
\end{aligned}
$$

Nous allons maintenant déterminer les coefficients de cette formule. En remplaçant dans la formule (103) $f(x)$ par 1, on obtient

$$B_0 = \frac{1}{2}.$$

Pour calculer B_1, on remplace dans la formule (103), $f(x)$ par

$$f(x) = \frac{1}{2!}(x - x_1)(x - x_1').$$

Il est évident que $f(x) = 0$, $f(x_1') = 0$ et que les différences de $f(x)$ plus grandes que 2, sont nulles. D'après les formules (102) nous avons

$$\Delta^2 f(x_2) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_1') = f(x_2)$$

et

$$\Delta^2(x_1) = f(x_1) - 2f(x_1') + f(x_2') = f(x_2').$$

Mais

$$f(x_2) = \frac{1}{2!}(-2h)(-4h) = (2h)^2$$

$$f(x_2') = \frac{1}{2!}(4h)(2h) = (2h)^2$$

et par suite

$$2(2h)^3 B_1 = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{(x - x_1)(x - x_1')}{2} dx.$$

En faisant dans cette intégrale le changement de variable $x = x_0 + \lambda h$, nous aurons

$$B_1 = \frac{1}{2^5}\int_{-1}^{+1}(\lambda^2 - 1)d\lambda = -\frac{1}{24}.$$

En général, pour calculer B_j nous remplaçons dans la formule de quadrature (103), $f(x)$ par

$$f(x) = \frac{1}{(2j)!}(x - x_1) \dots (x - x_j)(x - x_1') \dots (x - x_j').$$

D'après les formules (102), nous avons

$$\Delta^{2p} f(x_{p+1}) = 0, \qquad \Delta^{2p} f(x_p) = 0.$$

pour $p \leq j - 1$. Nous avons aussi pour $p > j$ $\Delta^{2p} f(x_{p+1}) = \Delta^{2p} f(x_p) = 0$, $f(x)$ étant un polynome de degré $2j$. D'autre part, nous avons

$$\Delta^{2j} f(x_{j+1}) = f(x_{j+1}), \qquad \Delta^{2j} f(x_j) = f(x_{j+1}'),$$

et

$$f(x_{j+1}) = f(x_{j+1}') = (2h)^{2j}.$$

Nous aurons donc

$$2(2h)^{2j} B_j = \int_{x_0-h}^{x_0+h} (x - x_1) \dots (x - x_j)(x - x_1') \dots (x - x_j')dx.$$

et en faisant le changement de variable $x = x_0 + \lambda h$, nous aurons

(104) $$B_j = \frac{1}{2^{2j+2}(2j)!}\int_{-1}^{+1}[\lambda^2-1^2][\lambda^2-3^2]\dots[\lambda^2-(2j-1)^2]d\lambda.$$

En introduisant les nombres

(105) $$K_j = \frac{1}{2^{2j+1}(2j)!}\int_{-1}^{+1}(\lambda^2-1)(\lambda^2-3^2)\dots[\lambda^2-(2j-1)^2]d\lambda,$$

nous aurons

(106) $$B_j = \frac{1}{2}K_j.$$

Le reste dans la formule de quadrature (103) peut s'écrire sous la forme

$$R = f^{(2n)}(\xi)\int_{x_n}^{x_n'}\varphi(x)\,dx,$$

où $\xi \in (x_n, x_n')$. Pour calculer l'intégrale de second membre de la formule précédente, nous remplaçons dans la formule de quadrature (103) la fonction $f(x)$, par

$$f(x) = \frac{1}{(2n)!}(x-x_1)\dots(x-x_n)(x-x_1')\dots(x-x_n').$$

Nous aurons

$$\int_{x_n}^{x_n'}\varphi(x)dx = \frac{1}{(2n)!}\int_{x_0-h}^{x_0+h}(x-x_1)\dots(x-x_n)(x-x_1')\dots(x-x_n')dx$$

et en faisant le changement de variable $x = x_0 + \lambda h$, on obtient

$$\int_{x_n}^{x_n'}\varphi(x)dx = \frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_{-1}^{+1}(\lambda^2-1^2)\dots[\lambda^2-(2n-1)^2]d\lambda,$$

c'est-à-dire

$$\int_{x_n}^{x_n'}\varphi(x)dx = (2h)^{2n+1}K_n.$$

Nous avons donc

(107) $$R = (2h)^{2n+1}K_n f^{(2n)}(\xi),$$

où $\xi \in (x_n, x_n')$

La formule (103) peut donc s'écrire sous la forme définitive

(108) $$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = h\{[f(x_1)+f(x_1')] + K_1[\Delta^2 f(x_2)+\Delta^2 f(x_1)] + K_2[\Delta^4 f(x_3)+\Delta^4 f(x_2)] + \dots + K_{n-1}[\Delta^{(2n-1)}f(x_n)+\Delta^{(2n-1)}f(x_{n-1})]\} + (2h)^{2n+1}K_n f^{(2n)}(\xi),$$

où les nombres $K_1, K_2, \dots, K_n$ sont donnés par les formules (105). Nous avons obtenu la formule de quadrature (108), sans appliquer la formule d'interpolation de Bessel, comme on le fait ordinairement.

Pour $j = 1, 2, 3, 4, 5$ la formule (105) donne

$$K_1 = -\frac{1}{12},\quad K_2 = \frac{11}{720},\quad K_3 = -\frac{191}{60480},\quad K_4 = \frac{2497}{3628800},\quad K_5 = -\frac{2\,459\,761}{2^{10}.6!\,21\,600}.$$

La formule de quadrature (108) peut donc s'écrire pour $n = 1, 2, 3, 4,$

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = h[f(x_1)+f(x_1')] - \frac{(2h)^3}{12}f''(\xi),$$

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = h\left\{[f(x_1)+f(x_1') - \frac{\Delta^2 f(x_2)+\Delta^2 f(x_1)}{12}\right\} + \frac{11(2h)^5}{720}f^{(IV)}(\xi),$$

(109) $$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = h\left\{[f(x_1)+f(x_1')] - \frac{\Delta^2 f(x_2)+\Delta^2 f(x_1)}{12} + \frac{11[\Delta^4 f(x_3)+\Delta^4 f(x_2)]}{720}\right\} - \frac{191(2h)^7}{60\,480}f^{(6)}(\xi),$$

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = h\left\{[f(x_1)+f(x_1')] - \frac{\Delta^2 f(x_2)+\Delta^2 f(x_1)}{12} + \frac{11[\Delta^4 f(x_3)+\Delta^4 f(x_2)]}{720} - \frac{191[\Delta^6 f(x_4)+\Delta^6 f(x_3)]}{60480}\right\} + \frac{2497(2h)^9}{3.628800}f^{(8)}(\xi),$$

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = h\left\{[f(x_1)+f(x_1')] - \frac{\Delta^2 f(x_2)+\Delta^2 f(x_1)}{12} + \frac{11\Delta^4 f(x_3)+\Delta^4 f(x_2)]}{720} - \frac{191[\Delta^6 f(x_4)+\Delta^6 f(x_3)]}{60\,480} + \frac{2497[\Delta^8 f(x_5)+\Delta^8 f(x_4)]}{3\,628\,800}\right\} - \frac{2\,459\,761(2h)^{11}}{2^{10}.6!\,21\,600}f^{(10)}(\xi).$$

Dans ces formules, le nombre ξ varie d'une formule à l'autre.

28. *Les coefficients $K_1, K_2, \ldots, K_n$ décroissent en valeur absolue.* En effet si l'on ajoute K_j et K_{j+1}, nous avons

$$K_{j+1} + K_j = \frac{1}{2^{2j+1}(2j)!}\int_{-1}^{+1}(\lambda^2 - 1^2)\ldots[\lambda^2 - (2j+1)^2]\left[\frac{\lambda^2 - (2j+1)^2}{4(2j+1)(2j+2)} + 1\right]d\lambda,$$

c'est à dire

$$K_{j+1} + K_j = \frac{1}{2^{2j+3}(2j+2)!}\int_{-1}^{+1}(\lambda^2 - 1^2)\ldots[\lambda^2 - (2j+1)^2][\lambda^2 + 12j^2 + $$
$$+ 20j + 7]d\lambda.$$

Le dernier facteur sous le signe $\int$ étant positif, on voit que la somme $K_{j+1} + K_j$ a le signe de K_j. Les coefficients $K_1, K_2, \ldots, K_n$ étant alternativement positifs et négatifs, nous avons $|K_{j+1}| < |K_j|$.

29. *Le reste dans la formule de quadrature* (108). En désignant par M_{2n} une borne supérieure de $|f^{(2n)}(x)|$ dans l'intervalle $[x_n, x'_n]$, nous avons

$$|R_n| \leqq \rho_{2n}(x_n, \ldots, x'_n),$$

où

$$\rho_{2n}(x_n, \ldots, x'_n) = (2h)^{2n+1}|K_n|M_{2n}.$$

Nous allons comparer la borne supérieure $\rho_{2n}(x_n, \ldots, x'_n)$ avec la borne supérieure du reste de la formule de quadrature (93) *de Gauss.*

En tenant compte de la première formule (96), nous aurons le tableau suivant

(110)

n	$\rho_{2n}(x_n, \ldots, x'_n)$	$\rho_{2n}(a, b)$	$\frac{\rho_{2n}}{\rho'_{2n}}$
1	$\frac{1}{12}(2h)^3 M_2$	$\frac{1}{24}(2h)^3 M_2^0$	$2\frac{M_2}{M_2^0}$
2	$\frac{11}{720}(2h)^5 M_4$	$\frac{1}{4\,320}(2h)^5 M_4^0$	$66\frac{M_4}{M_4^0}$
3	$\frac{191}{60\,480}(2h)^7 M_6$	$\frac{1}{2\,016\,000}(2h)^7 M_6^0$	$6366{,}6\ldots\frac{M_6}{M_6^0}$
4	$\frac{2\,497}{3\,628\,800}(2h)^9 M_8$	$\frac{L}{1\,778\,112\,000}(2h)^9 M_8^0$	$1\,223\,530\frac{M_8}{M_8^0}$
5	$\frac{2\,459\,761}{2^{10}.6!\,21\,600}(2h)^{11} M_{10}$	$\frac{1}{1\,237\,732\,650.2^{11}}(2h)^{11} M_{10}^0$	$391\,528\,613{,}7\ldots\frac{M_{10}}{M_{10}^0}$

Les nombres de la dernière colonne qui croissent rapidement et atteignent 391528613 pour $n = 5$, montrent nettement le désavantage des formules de quadrature à noeuds extérieurs.

Si l'on compare le tableau (110) avec le tableau (97) relativement aux formules de quadrature à noeuds en progression arithmétique à gauche on constate que *les formules de quadrature à noeuds extérieurs symétriques par rapport au milieu de l'intervalle, en progression arithmétique, sont préférables aux formules de quadrature à noeuds extérieurs à gauche en progression arithmétique.* Pour $n = 8$, dans tableau (97), dans la dernière colonne nous avons le nombre 524308330, tandis que dans le tableau (110) le nombre correspondant est 1223530.

§ 6. L'influence des noeuds intérieurs sur la forme de la courbe $y = \varphi(x)$.

30. Lorsque les noeuds sont extérieurs à l'intervalle d'intégration, la forme de la courbe $y = \varphi(x)$ est celle donnée dans la figure 1 si les noeuds sont répandus à gauche de a et à droite de b, ou celle de la fig. 3 si les noeuds sont tous à gauche de a; la forme de la courbe ne change pas si l'on ajoute aux noeuds extérieurs les extrémités de l'intervalle $[a, b]$ ou bien une seule extrémité de cet intervalle.

Nous allons étudier la forme de la courbe $y = \varphi(x)$, lorsqu'on ajoute aux noeuds extérieurs des noeuds intérieurs. Ce problème est trop compliqué dans le cas général. Nous nous contenterons d'un exemple sur une formule de quadrature relativement à l'intervalle $[a, a + h]$ lorsqu'on ajoute aux noeuds a et $a + h$ le noeud extérieur $a + 2h$ et le noeud intérieur $a + \lambda h$ où λ varie de 0 a 1.

Lorsque $\lambda = 1$, le noeud $a + h$ est double et la formule de quadrature corespondante est

$$(111)\quad \int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{h}{24}[7f(a) + 16f(a + h) - 18f'(a + h) + f(a + 2h)] +$$
$$+ \int_a^{a+2h} \varphi(x)f^{(IV)}(x)dx,$$

la fonction $\varphi(x)$ étant égale à $\varphi_1(x)$ dans l'intervalle $[a, a + h]$ et à $\varphi_2(x)$ dans l'intervalle $[a + h, a + 2h]$, où

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-a)^4}{4!} - \frac{7h}{24}\,\frac{(x-a)^3}{3!},$$

$$\varphi_2(x) = -\frac{h}{24}\,\frac{(x-a-2h)^3}{3!}.$$

La forme de la courbe $y = \varphi(x)$ est donnée dans la figure 13, le minimum de $\varphi(x)$ correspondant à $x = a + \frac{7h}{8}$.

Lorsque $\lambda = 0$, le noeud a est double et la formule de quadrature correspondante est

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{h}{48}\,[29f(a) + 6hf'(a) + 20f(a+h) - f(a+2h)] + \tag{112}$$
$$+ \int_a^{a+2h} \varphi(x) f^{(IV)}(x)\,dx,$$

la fonction $\varphi(x)$ étant égale à $\varphi_1(x)$ et à $\varphi_2(x)$ dans les intervalles $[a, a+h]$ et $[a+h, a+2h]$, où

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-a)^4}{4!} - \frac{29h}{48}\frac{(x-a)^3}{3!} + \frac{2h^2}{24}\frac{(x-a)^2}{2!},$$

$$\varphi_2(x) = -\frac{h}{48}\frac{(x-a-2h)^3}{3!}.$$

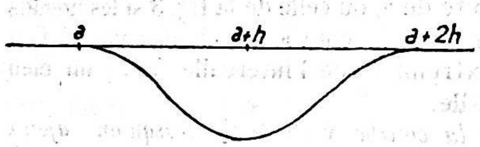


Fig. 13

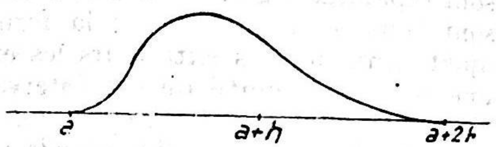


Fig. 14

La forme de la courbe este donnée dans la figure 14, le maximum de $\varphi(x)$ correspondant à $x = a+0,6\ldots h$

Lorsque $0 < \lambda < 1$, la formule de quadrature aux noeuds a, $a+\lambda h$, $a+h$, $a+2h$ est,

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{h}{24\lambda\,(\lambda-1)\,(\lambda-2)}\,[(10\lambda-3)\,(\lambda-1)\,(\lambda-2)\,f(a) + \tag{113}$$
$$+ 2\lambda\,(8\lambda-5)\,(\lambda-2) f(a+h) - \lambda\,(2\lambda-1)\,(\lambda-1)\,f\,(a+2h) +$$
$$+ 6f(a+\lambda h)] + \int_a^{a+2h} \varphi(x)\,f^{(IV)}(x)\,dx,$$

la fonction $\varphi(x)$ étant égale à $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ dans les intervalles $[a, a+\lambda h]$, $[a+\lambda h, a+h]$, $[a+2h]$ où

$$\varphi_1 = \frac{(x-a)^4}{4!} - \frac{10\lambda-3}{24\lambda}\,h\,\frac{(x-a)^3}{3!}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-a)^4}{4!} - \frac{10\lambda-3}{24\lambda}\,h\,\frac{(x-a)^3}{3!} - \frac{h}{24\lambda\,(\lambda-1)\,(\lambda-2)}\,\frac{(x-a-\lambda h)^3}{3!}$$

$$\varphi_3(x) = -\frac{h(2\lambda-1)}{24(\lambda-2)}\cdot\frac{(x-a-2h)^3}{3!}.$$

La discussion de la forme de la courbe $y = \varphi(x)$, revient à la construction des courbes $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $y = \varphi_3(x)$ dans les intervalles correspondants ; elles dependent du paramètre λ qui varie de 0 à 1.

La construction de la courbe $y = \varphi_1(x)$ se fait en tenant compte de la position du zéro de la dérivée $\varphi_1'(x)$ dans l'intervalle $[a, a+\lambda h]$. Nous avons

$$x_1 - a = \frac{10\lambda-3}{8\lambda}\,h,\quad x_1 - a - \lambda h = -h\,\frac{(4\lambda-3)(2\lambda-1)}{8\lambda}.$$

De cette façon on met en evidence les valeurs patriculières $\lambda = \frac{3}{10}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ $\lambda = \frac{3}{4}$. Lorsque λ varie de 0 à $\frac{3}{10}$, $\varphi_1(x)$ croît dans l'intervalle $[a, a+\lambda h]$. Lorsque, λ est compris entre $\frac{3}{10}$ et $\frac{1}{2}$ ou bien entre $\frac{3}{4}$ et 1, x_1 est dans l'intervalle $(a, a+\lambda h)$. Lorsque λ est compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$, x_1 est en dehors de l'intervalle $(a, a+\lambda h)$. Enfin lorsque λ prend la valeur $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{4}$, x_1 coïncide avec $a+\lambda h$.

De même, nous avons

$$\varphi_1(a+\lambda h) = \frac{\lambda^2 h^4}{144}\,(6\lambda^2 - 10\lambda + 3).$$

Le trinome du second membre a le zéro

$$\lambda_0 = \frac{5-\sqrt{7}}{6} = 0,392\ldots$$

compris entre 0 et 1.

Nous avons

$$\varphi_1\,(a+\lambda h) < 0 \quad \text{pour} \quad 0 < \lambda < \lambda_0$$
$$\varphi_1\,(a+\lambda h) = 0 \quad ,, \quad \lambda = \lambda_0$$
$$\varphi_1\,(a+\lambda h) < 0 \quad ,, \quad \lambda_0 < \lambda < 1.$$

Sans entrer en détails nous avons tracé dans la figure 15, la courbe $y = \varphi(x)$ en marquant par le signe $\times$ la position du noeud $a+\lambda h$. La forme de la courbe dépend de la position du point λ de l'intervalle $(0, 1)$ par rapport aux points $\frac{3}{10}$, λ_0, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ de cet intervalle.

Nous remarquons dans la figure 14 que la courbe $y = \varphi(x)$ est située au dessous de l'axe Ox, lorsque $\lambda=1$. Elle se déforme d'une manière continue lorsque λ decroît, le point de minimum de $\varphi(x)$, se déplaçant vers la gauche. Lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$, $\varphi_3(x) = 0$ ce qui est explicable à cause de la formule de Simpson. Lorsque λ decroît de $\frac{1}{2}$ à $\frac{3}{10}$, la courbe $y = \varphi(x)$ se déforme en traversant l'axe Ox. Lorsque $\lambda = \frac{3}{10}$, la courbe $y = \varphi(x)$ est située au

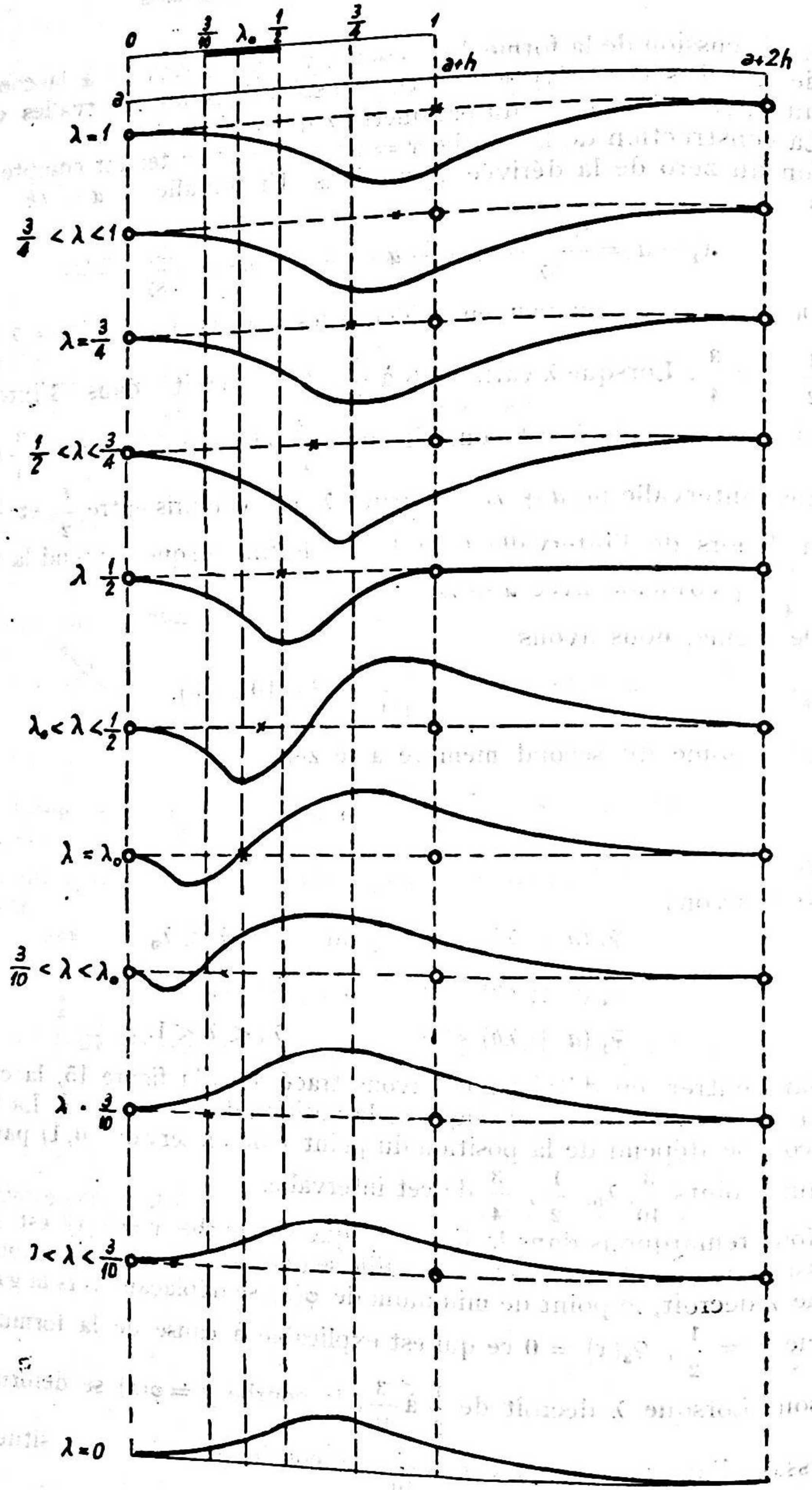


Fig. 15

dessus de l'axe Ox et lorsque λ decroît de $\frac{3}{10}$ à 0, elle se déforme en restant au dessus de l'axe Ox. Donc la courbe $y = \varphi(x)$ traverse l'axe Ox seulement pour $\frac{3}{10} < \lambda < \frac{1}{2}$.

Il résulte que pour $0 < \lambda < \frac{3}{10}$ la fonction $\varphi(x)$ est positive dans l'intervalle $(a, a + 2h)$, tandis que pour $\frac{1}{2} < \lambda < 1$, la fonction $\varphi(x)$ est négative dans l'intervalle $(a, a + 2h)$. Nous déduisons que pour $0 < \lambda < \frac{3}{10}$ et $\frac{1}{2} < \lambda < 1$, nous pouvons écrire le reste de la formule de quadrature (113) sous la forme

$$R = f^{(\mathrm{IV})}(\xi) \int_a^{a+h} \varphi(x)\, dx, \tag{114}$$

où $\xi \in (a,\ a + 2h)$.

La formule (114) est valable aussi pour les formules de quadrature (111) et (112). Pour calculer l'intégrale du second membre de la formule (114) nous remplaçons la fontion $f(x)$ dans la formule de quadrature (113), ou (111), ou (112) par

$$f(x) = \frac{1}{4!}(x - a)(x - a - h)(x - a - 2h)(x - a - \lambda h)$$

et nous obtenons

$$\int_a^{a+2h} \varphi(x)\, dx = \frac{h^5}{1440}(7 - 15\lambda).$$

Le reste dans les formules de quadrature (111), (112). (113) pour $0 \leqq \lambda \leqq \frac{3}{10}$, $\frac{1}{2} \leqq \lambda \leqq 1$, peut s'écrire sous la forme

$$R = \frac{h^5}{1440}(7 - 15\lambda) f^{(\mathrm{IV})}(\xi). \tag{115}$$

Il résulte que si M_4 est une borne supérieure de $|f^{(4)}(x)|$ dans l'intervalle $[a,\ a + 2h]$, nous avons

$$|R| \leqq \rho(a, \ldots, a + 2h),$$

où

$$\rho(a, \ldots, a + 2h) = \frac{|7 - 15\lambda|}{1440} h^5 M_4.$$

La borne supérieure $\rho(a, \ldots, a+2h)$ décroît de $\frac{14h^5M_4}{2880}$ à $\frac{11h^4M_4}{2880}$ lorsque λ croît de 0 à $\frac{3}{10}$ et croît de $\frac{h^5M_4}{2880}$ à $\frac{16h^5M_4}{2880}$ lorsque λ croît de $\frac{1}{2}$ à 1.

Cas particuliers. Pour $\lambda = \frac{3}{10}$ la formule de quadrature (113) devient

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{714}\left[221f(a+h) - 7f(a+2h) + 500f\left(a+\frac{3h}{10}\right)\right] + \int_a^{a+2h} \varphi(x) f^{(IV)}(x)dx, \tag{116}$$

la fonction $\varphi(x)$ étant positive dans l'intervalle $(a, a+2h)$.

De même pour $\lambda = \frac{5}{8}$ la formule de quadrature (113) devient

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{h}{660}\left[143f(a) + 512f\left(a+\frac{5h}{8}\right) + 5f(a+2h)\right] + \int_a^{a+2h} \varphi(x) f^{(IV)}(x)\,dx. \tag{117}$$

la fonction $\varphi(x)$ étant négative dans l'intervalle $(a, a+2h)$.

Dans les formules de quadrature (116) et (117) les noeuds $a+\frac{3h}{10}$ et $a+\frac{5h}{8}$ sont doubles. Nous donnerons dans le § 8, l'explication de ces formules.

Remarque. La formule (115) met en évidence la valeur $\lambda = \frac{7}{15}$ comprise entre $\frac{3}{10}$ et $\frac{1}{2}$ pour laquelle le reste R de la formule de quadrature (113) est nul lorsque la fonction $f(x)$ est remplacée par un polynome du quatrième degré. Nous montrerons dans le § 8 que le noeud $a+\frac{7h}{15}$ doit être considéré double et que la formule de quadrature correspondante est,

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{h}{30912}\left[4600\,f(a) + 6118\,f(a+h) - 56\,f(a+2h) + 20250\,f\left(a+\frac{7h}{15}\right)\right] + \int_a^{a+2h} \psi(x) f^{(V)}(x)dx, \tag{118}$$

la fonction $\psi(x)$ ayant un signe constant dans l'intervalle $(a, a+2h)$

§ 7. Formules de quadrature à noeuds extérieurs et intérieurs du type de Gauss

31. Désignons par $p(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $[a, b]$ positive dans l'intervalle (a, b) pouvant s'annuler aux extrémités a, b et par $f(x)$ une fonction de la classe C^{n+m+2q} dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$, l'intervalle $[a, b]$ étant inclus dans l'intervalle (α, β). Prenons les noeuds $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ tels que $\alpha < x_n' < x_{n-1}' < \ldots < x_1' < a$ et les noeuds $x_1'', x_2'', \ldots, x_m''$ tels que $b < x_1'' < x_2'' < \ldots < x_m'' < \beta$. Nous voulons déterminer des noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_q$ tels que $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_q < b$ et établir une formule de quadrature de la forme

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx = A_1'\,f(x_1') + A_2'\,f(x_2') + \ldots + A_n'\,f(x_n') + A_1''\,f(x_1'') + A_2''\,f(x_2'') + \ldots + A_m''\,f(x_m'') + C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_q f(x_q) + R \tag{119}$$

pour laquelle le reste R soit nul lorsque la fonction $f(x)$ est remplacée par un polynome quelconque de degré $n+m+2q-1$. Nous voulons aussi étudier le reste R de cette formule.

La formule de quadrature (119) a été donnée pour la première fois par E. B. CHRISTOFFEL [5]. Des travaux récents consacrés à cette formule ont été faites par T. POPOVICIU [6]. D. D. STANCU [7], [8], a donné une généralisation de la formule de Christoffel.

Nous allons étudier en détail la formule de quadrature (119) ainsi que d'autres formules analogues ayant en vue une application importante à des formules de quadrature qu'on obtient ordinairement en partant de la formule d'interpolation de Stirling.

Nous attachons aux intervalles $[x_n', x_{n-1}'], \ldots, [x_1', a], [a, x_1], \ldots, [x_q, b], [b, x_1''], \ldots, [x_{m-1}'', x_m'']$ les intégrales $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x), \ldots, \varphi_{n+q+1}(x), \varphi_{n+q+2}(x), \ldots, \varphi_{n+m+q+1}(x)$ des équations différentielles

$$\varphi^{(n+m+2q)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n \\ p(x) & \quad ,, \quad i = n+1, \ldots, n+q+1 \\ 0 & \quad ,, \quad i = n+q+2, \ldots, n+m+q+1, \end{cases} \tag{120}$$

satisfaisant aux conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} \varphi_1(x_n') = 0,\ \varphi_1'(x_n') = 0, \ldots, \varphi_1^{(n+m+2q-2)}(x_n') = 0, \\ \varphi_2(x_{n-1}') = \varphi_1(x_{n-1}'),\ \varphi_2'(x_{n-1}') = \varphi_1'(x_{n-1}'), \ldots, \\ \varphi_2^{(n+m+2q-2)}(x_{n-1}') = \varphi_1^{(n+m+2q-2)}(x_{n-1}'), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x_1') = \varphi_{n-1}(x_1'),\ \varphi_n'(x_1') = \varphi_{n-1}'(x_1'), \ldots, \\ \varphi_n^{(n+m+2q-2)}(x_1') = \varphi_{n-1}^{(n+m+2q-2)}(x_1'), \end{cases} \tag{121}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi_{n+1}(a) = \varphi_n(a),\ \varphi'_{n+1}(a) = \varphi'_n(a),\ \ldots,\ \varphi_{n+1}^{(n+m+2q-2)}(a) = \\ &= \varphi_n^{(n+m+2q-2)}(a),\ \ \varphi_{n+1}^{(n+m+2q-1)}(a) = \varphi_n^{(n+m+2q-1)}(a), \\ &\varphi_{n+2}(x_1) = \varphi_{n+1}(x_1),\ \varphi'_{n+2}(x_1) = \varphi'_{n+1}(x_1),\ \ldots, \\ &\qquad \varphi_{n+2}^{(n+m+2q-2)}(x_1) = \varphi_{n+1}^{(n+m+2q-2)}(x_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_{n+q+1}(x_q) = \varphi_{n+q}(x_q),\ \varphi'_{n+q+1}(x_q) = \varphi'_{n+q}(x_q),\ \ldots, \\ &\qquad \varphi_{n+q+1}^{(n+m+2q-2)}(x_q) = \varphi_{n+q}^{(n+m+2q-2)}(x_q), \end{aligned}\right. \tag{122}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_{n+q+2}(b) = \varphi_{n+q+1}(b),\ \varphi'_{n+q+2}(b) = \varphi'_{n+q+1}(b),\ \ldots,\ \varphi_{n+q+1}^{(n+m+2q-2)}(b) = \\ &\quad = \varphi_{n+q+1}^{(n+m+2q-2)}(b),\ \varphi_{n+q+2}^{(n+m+2q-1)}(b) = \varphi_{n+q+1}^{(n+m+2q-1)}(b), \end{aligned} \tag{123}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi_{n+q+3}(x''_1) = \varphi_{n+q+2}(x''_1),\ \varphi'_{n+q+3}(x''_1) = \varphi'_{n+q+2}(x''_1),\ \ldots, \\ &\qquad\qquad \ldots,\ \varphi_{n+q+3}^{(n+m+2q-2)}(x''_1) = \varphi_{n+q+2}^{(n+m+2q-2)}(x''_1). \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_{n+q+m+1}(x''_{m-1}) = \varphi_{n+q+m}(x''_{m-1}),\ \varphi'_{n+q+m+1}(x''_{m-1}) = \\ &= \varphi'_{n+q+m}(x''_{m-1}), \ldots,\ \varphi_{n+q+m+1}^{(n+m+2q-2)}(x''_{m-1}) = \varphi_{n+q+m}^{(n+m+2q-2)}(x''_{m-1}) \\ &\varphi_{n+q+m+1}(x''_m) = 0,\ \varphi'_{n+q+m+1}(x''_m) = 0,\ \ldots,\ \varphi_{n+q+m+1}^{(n+m+2q-2)}(x''_m) = 0. \end{aligned}\right. \tag{124}$$

On obtient ainsi la formule de quadrature (119), dont les coefficients sont donnés par les formules

$$\left\{\begin{aligned} A'_n &= -\varphi_1^{(n+m+2q-1)}(x'_n) \\ A'_{n-1} &= \varphi_1^{(n+m+2q-1)}(x'_{n-1}) - \varphi_2^{(n+m+2q-1}(x'_{n-1}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A'_1 &= \varphi_{n+1}^{(n+m+2q-1}(x'_1) - \varphi_n^{(n+m+2q-1)}(x'_1) \end{aligned}\right. \tag{125}$$

$$\left\{\begin{aligned} C_1 &= \varphi_{n+1}^{(n+m+2q-1)}(x_1) - \varphi_n^{(n+m+2q-1)}(x_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_q &= \varphi_{n+q}^{(n+m+2q-1)}(x_q) - \varphi_{n+q+1}^{(x+m+2q-1)}(x_q), \end{aligned}\right. \tag{126}$$

$$\left\{\begin{aligned} A''_1 &= \varphi_{n+q+2}^{(n+m+2q-1)}(x''_1) - \varphi_{n+q+3}^{(n+m+2q-1)}(x''_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A''_{m-1} &= \varphi_{n+q+m}^{(n+m+2q-1)}(x''_{m-1}) - \varphi_{n+q+m+1}^{(n+m+2q-1)}(x''_{m-1}) \\ A''_m &= \varphi_{n+q+m+1}^{(n+m+2q-1)}(x''_m) \end{aligned}\right. \tag{127}$$

et le reste par la formule

$$R = (-1)^{n+m} \int_{x'_n}^{x''_m} \varphi(x) f^{(n+m+2q)}(x)\,dx, \tag{127'}$$

la fonction $\varphi(x)$ coïncidant successivement avec les fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+m+q+1}(x)$ dans les intervalles $[x'_n, x'_{n-1}], \ldots, [x''_{m-1}, x''_m]$.

32. *Détermination des fonctions* $\varphi_1(x), \ldots \varphi_{n+m+q+1}(x)$. Les n premières équations différentielles (120) et les conditions aux limites (121) donnent

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -\lambda_n \frac{(x-x'_n)^{n+m-2q-1}}{(n+m+2q-1)!}, \\ \varphi_2(x) &= -\lambda_n \frac{(x-x'_n)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} - \lambda_{n-1} \frac{(x-x'_{n-1})^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x) &= -\lambda_n \frac{(x-x'_n)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} - \lambda_{n-1} \frac{(x-x'_{n-1})^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} + \\ &\qquad \ldots - \lambda_1 \frac{(x-x'_1)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}, \end{aligned} \tag{128}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des constantes.

De même les m dernières équations différentielles (120) et les conditions aux limites (124) donnent

$$\begin{aligned} \varphi_{n+m+q+1}(x) &= \mu_m \frac{(x-x''_m)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}; \\ \varphi_{n+m+q}(x) &= \mu_m \frac{(x-x''_m)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} + \mu_{m-1} \frac{(x-x''_m)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n+q+2}(x) &= \mu_m \frac{(x-x''_m)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} + \mu_{m-1} \frac{(x-x''_{m-1})^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} + \cdots \\ &\qquad \ldots + \mu_1 \frac{(x-x''_1)^{n+m+3q-1}}{(n+m+2q-1)!}. \end{aligned} \tag{129}$$

où $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ sont des constantes.

Les équations différentielles (120) non homogènes et les conditions aux limites (122) donnent

$$
\varphi_{n+1}(x) = \int_a^x \frac{(x-s)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}p(s)ds - \lambda_1 \frac{(x-x'_1)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} - \dots
$$
$$
\dots - \lambda_n \frac{(x-x'_n)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}
$$
$$
\varphi_{n+2}(x) = \int_a^x \frac{(x-s)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}p(s)dx - \nu_1 \frac{(x-x_1)^{n+m+2q-1}}{(n+2m+2q-1)!} -
$$
$$
(130) \qquad - \lambda_1 \frac{(x-x'_1)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} - \dots - \lambda_n \frac{(x-x'_n)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}
$$
$$
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
$$
$$
\varphi_{n+q+1}(x) = \int_a^x \frac{(x-s)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}p(s)ds - \nu_1 \frac{(x-x_1)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} - \dots
$$
$$
\dots - \nu_q \frac{(x-x_q)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} - \lambda_1 \frac{(x-x'_1)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} - \dots
$$
$$
- \lambda_n \frac{(x-x'_n)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!},
$$

où $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$ sont des constantes.

En écrivant que les conditions aux limites (123) du point b sont satisfaites, nous aurons le système d'équations

$$
\mu_m(b-x''_m)^{n+m+2q-1} + \dots + \mu_1(b-x''_1)^{n+m+2q-1} =
$$
$$
= \int_a^b (b-s)^{n+m+2q-1}p(s)ds - \nu_1(b-x_1)^{n+m+2q-1} - \dots - \nu_q(b-x_q)^{n+m+2q-1} -
$$
$$
- \lambda_1(b-x'_1)^{n+m+2q-1} - \dots - \lambda_n(b-x'_n)^{n+m+2q-1},
$$
$$
\mu_m(b-x''_m)^{n+m+2q-2} + \dots + \mu_1(b-x''_1)^{n+m+2q-2} =
$$
$$
= \int_a^b (b-s)^{n+m+2q-2}p(s)ds - \nu_1(b-x_1)^{n+m+2q-2} - \dots - \nu_q(b-x_q)^{n+m+2q-2} -
$$
$$
- \lambda_1(b-x'_1)^{n+m+2q-2} - \dots - \lambda_n(b-x'_n)^{n+m+2q-2},
$$
$$
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
$$
$$
\mu_m + \dots + \mu_1 = \int_a^b p(s)ds - \nu_1 - \dots - \nu_q - \lambda_1 - \dots - \lambda_n,
$$

qui déterminent les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$ et les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_q$.

Ce système peut encore s'écrire sous la forme suivante

$$
\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \mu_1 + \dots + \mu_m + \nu_1 + \dots + \nu_q = \int_a^b p(s)ds
$$
$$
\lambda_1 x'_1 + \dots + \lambda_n x'_n + \mu_1 x''_1 + \dots + \mu_m x''_m + \nu_1 x_1 + \dots + \nu_q x_q = \int_a^b p(s)s ds
$$
$$
(131) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
$$
$$
\lambda_1 x_1'^{\,n+m+2q-1} + \dots + \lambda_n x_n'^{\,n+m+2q-1} + \mu_1 x_1''^{\,n+m+2q-1} + \dots + \mu_m x_m''^{\,n+m+2q-1} +
$$
$$
+ \nu_1 x_1^{\,n+m+2q-1} + \dots + \nu_q x_q^{\,n+m+2q-1} = \int_a^b p(s)s^{n+m+2q-1}ds.
$$

L'interprétation des constantes $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots \mu_m, \nu_1, \dots \nu_q$. En dérivant $n+m+2q-1$ fois les fonctions $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n+m+q+1}(x)$ données par les formules (128), (129) et (130), nous avons

$$
(132) \qquad \begin{cases} \varphi_1^{(n+m+2q-1)}(x) = -\lambda_n \\ \varphi_2^{(n+m+2q-1)}(x) = -\lambda_n - \lambda_{n-1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n^{(n+m+2q-1)}(x) = -\lambda_n - \lambda_{n-1} - \dots - \lambda_1 \end{cases}
$$
$$
(133) \qquad \begin{cases} \varphi_{n+m+q+1}^{(n+m+2q-1)}(x) = \mu_m \\ \varphi_{n+m+q}^{(n+m+2q-1)}(x) = \mu_m + \mu_{m-1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{n+q+2}^{(n+m+2q-1)}(x) = \mu_m + \mu_{m-1} + \dots + \mu_1 \end{cases}
$$
$$
(134) \qquad \begin{cases} \varphi_{n+1}^{(n+m+2q-1)}(x) = \int_a^x p(s)ds - \lambda_1 - \dots - \lambda_n \\ \varphi_{n+2}^{(n+m+2q-1)}(x) = \int_a^x p(s)ds - \lambda_1 - \dots - \lambda_n - \nu_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{n+q+1}^{(n+m+2q-1)}(x) = \int_a^x p(s)ds - \lambda_1 - \dots - \lambda_n - \nu_1 - \nu_2 - \dots - \nu_q, \end{cases}
$$

d'où résultent les formules

$$
(135) \qquad \begin{aligned} &A'_n = \lambda_n, \; A'_{n-1} = \lambda_{n-1}, \dots, A'_1 = \lambda_1, \\ &A''_1 = \mu_1, \quad A''_2 = \mu_2, \dots, \quad A''_m = \mu_m, \\ &C_1 = \nu_1, \quad C_2 = \nu_2, \dots, \quad C_q = \nu_q. \end{aligned}
$$

En tenant compte des équations (135), on interprète les équations (131) de la façon suivante, elles expriment que le reste R de la formule de quadrature (119) est nul lorsqu'on remplace la fonction $f(x)$ par $1, x, \ldots, x^{n+m+2q-1}$.

Les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_q$. Prenons $n+m+q+1$ équations consécutives du système (131) et éliminons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ et $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q$, en faisant cette opération de toutes les manières possibles, nous obtenons les équations suivantes

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots 1 & 1 & \ldots 1 & 1 & \ldots 1 & \int_a^b p(s)ds \\ x'_1 & \ldots x'_n & x''_1 & \ldots x''_m & x_1 & \ldots x_q & \int_a^b p(s)sds \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1'^{n+m+q} & \ldots x_n'^{n+m+q} & x_1''^{n+m+q} & \ldots x_m''^{n+m+q} & x_1^{n+m+q} & \ldots x_q^{n+m+q} & \int_a^b p(s)s^{n+m+q}ds \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x'_1 & \ldots & x'_n & x''_1 & \ldots & x''_m & x_1 & \ldots & x_q & \int_a^b p(s)ds \\ x_1'^2 & \ldots & x_n'^2 & x_1''^2 & \ldots & x_m''^2 & \lambda_1^2 & \ldots & x_q^2 & \int_a^b p(s)sds \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1'^{n+m+q+1} & \ldots & & x_1''^{n+m+q+1} & \ldots & & x_1^{n+m+q+1} & \ldots & & \int_q^b p(s)s^{n+m+q+1}ds \end{vmatrix} = 0$$

. . . .

$$\begin{vmatrix} x_1'^{q-1} & \ldots & x_n'^{q-1} & x_1''^{q-1} & \ldots & x_m''^{q-1} & x_1^{q-1} & \ldots & x_b^{q-1} & \int_a^b p(s)s^{q-1}ds \\ x_1'^{q} & \ldots & x_n'^{q} & x_1''^{q} & \ldots & x_m''^{q} & x_1^{q} & \ldots & x_q^{q} & \int_a^b p(s)s^{q}ds \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1'^{n+m+2q-1} & \ldots & & x_1''^{n+m+2q-1} & \ldots & & x_1^{n+m+2q-1} & \ldots & & \int_a^b p(s)s^{n+m+2q-1}ds \end{vmatrix} = 0$$

En désignant en général par $V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l)$ le déterminant de Vandermonde des nombres distincts $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l$ on peut écrire les équations précédentes sous la forme

$$\int_a^b V(x'_1, \ldots, x'_n; x''_1, \ldots, x''_m; x_1, \ldots, x_q; s)p(s)ds = 0$$

$$\int_a^b V(x'_1, \ldots, x'_n; x''_1, \ldots, x''_m; x_1, \ldots, x_q; s)(x'_1 \ldots x'_n x''_1 \ldots x_m x_1 \ldots x_q s)p(s)ds = 0$$

. . . .

$$\int_a^b V(x'_1, \ldots, x'_n; x''_1, \ldots, x''_m; x_1, \ldots, x_q; s)(x'_1 \ldots x'_n x''_1 \ldots x''_m x_1 \ldots x_q s)^{q-1}p(s)ds = 0.$$

En désignant par $Q_q(s)$ le polynome ayant pour racines les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_q$ c'est à dire

$$Q_q(s) = (s - x_1)(s - x_2) \ldots (s - x_q),$$

nous pouvons écrire les équations précédentes sous la forme

$$\int_a^b p(s)(s - x'_1) \ldots (s - x'_n)(s - x_1) \ldots (s - x''_m)Q_q(s)ds = 0$$

$$\int_a^b p(s)(s - x'_1) \ldots (s - x'_n)(s - x''_1) \ldots (s - x''_m)\, s\, Q_q(s)\, ds = 0$$

. . . .

$$\int_a^b p(s)(s - x'_1) \ldots (s - x'_n)(s - x''_1) \ldots (s - x''_m)\, s^{q-1}Q_q(s)\, ds = 0,$$

ou

$$(136)\qquad \begin{aligned} &\int_a^b p_1(s)Q_q(s)ds = 0 \\ &\int_a^b p_1(s)sQ_q(s)ds = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\int_a^b p_1(s)s^{q-1}Q_q(s)ds = 0, \end{aligned}$$

où

$$p_1(s) = p(s)(s - x_1') \dots (s - x_n')(s - x_1'') \dots (s - x_m''). \tag{137}$$

On en déduit que les polynomes $Q_q(s)$ vérifient les équations

$$\int_a^b p_1(s) Q_q(s) Q_j(s) ds = 0 \tag{138}$$

pour tous les indices q et j, $q \neq j$. Cela veut dire que *la suite des polynomes $Q_j(s)$ est orthogonale relativement à la fonction $p_1(x)$ dans l'intervalle $[a,b]$*, où $j = 0, 1, \dots, q$.

La fonction $p_1(s)$ est continue dans l'intervalle $[a,b]$ et a le signe de $(-1)^m$ dans l'intervalle (a,b). Il résulte alors que le polynome $Q_q(x)$ a toutes les racines réelles, distinctes et comprises entre a et b.

Si l'on remplace dans la formule de quadrature la fonction $f(x)$ par le polynome

$$(x - x_1') \dots (x - x_n')(x - x_1'') \dots (x - x_m'') \left[\frac{Q_q(x)}{x - x_i}\right]^2$$

du $(n + m + 2q - 2)$ — ième degré, nous avons

$$\int_a^b p_1(s) \left[\frac{Q_q(s)}{s - x_i}\right]^2 ds = (x_i - x_1') \dots (x_i - x_n')(x_i - x_1'') \dots (x_i - x_m'')[Q_q'(x_i)]^2 C_i.$$

La fonction $p_1(s)$ ayant le même signe que le produit $(x_i - x_1'') \dots \dots (x_i - x_m'')$, on en déduit que *les coefficients C_i sont tous positifs*.

Le polynome $Q_q(x)$. On sait que si l'on pose

$$\gamma_h = \int_a^b p_1(s) s^h ds, \quad (h = 0, 1, 2, \dots), \tag{139}$$

alors le déterminant

$$\Delta_q = \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{q-1} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_q \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{q-1} & \gamma_q & \cdots & \gamma_{2q-2} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, et nous avons

$$Q_q(x) = \frac{(-1)^q}{\Delta_q} \begin{vmatrix} 1 & x & \dots x^{q-1} & x^q \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots \gamma_{q-1} & \gamma_q \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{q-1} & \gamma_q & \cdots \gamma_{2q-2} & \gamma_{2q-1} \end{vmatrix}. \tag{140}$$

33. *Détermination des coefficents A_i' et A_k'' de la formule de quadrature* (119). Remplaçons dans la formule de quadrature (119) la fonction $f(x)$ par le polynome

$$P_i(x) = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n')}{(x_i' - x_1') \dots (x_i' - x_{i-1}')(x_i' - x_{i+1}') \dots (x_i' - x_n')} \cdot \frac{(x - x_1'') \dots (x - x_m'')}{(x_i' - x_1'') \dots (x_i' - x_m'')} \cdot \frac{Q_q^2(x)}{Q_q^2(x_i')}, \tag{141}$$

où $Q_q(x)$ est le polynome (140). Le polynome $P_i(x)$ s'annule sur tous les noeuds sauf le noeud x_i' où il prend la valeur 1. Le degré du polynome $P_i(x)$ étant $n + m + 2q - 1$, le reste de la formule de quadrature (119) est nul et nous aurons

$$A_i' = \int_a^b p(x) P_i(x) dx. \tag{142}$$

Nous remarquons que *A_i' a le signe de* $(-1)^{i-1}$.

D'une manière analogue si nous remplaçons dans la formule de quadrature (119) la fonction $f(x)$ par le polynome

$$R_k(x) = \frac{(x - x_i') \dots (x - x_n')}{(x_k'' - x_1') \dots (x_k'' - x_n')} \cdot \frac{(x - x_1'') \dots (x - x_{k-1}'')(x - x_{k+1}'') \dots (x - x_m'')}{(x_k'' - x_1'') \dots (x_k'' - x_{k-1}'')(x_k'' - x_{k+1}'') \dots (x_k'' - x_m'')} \frac{Q_q^2(x)}{Q_q^2(x_k)}, \tag{143}$$

nous aurons

$$A_k'' = \int_a^b p(x) R_k(x) dx, \tag{144}$$

d'où il résulte que A_k'' *a le signe de* $(-1)^{k-1}$.

Donc les coefficients $A_1', \dots, A_n'$ sont alternativement positifs et négatifs, A_1' étant positif. De même, les coefficients A_k'' sont alternativement positifs et négatifs, A_1'' étant positif.

34. *Il n'est pas possible de choisir les noeuds x_i' et x_k'' de la formule de quadrature* (119), *tel que le reste R de cette formule soit nul lorsqu'on remplace la fonction $f(x)$ par un polynome quelconque de degré plus grand que $n + m + 2q - 1$.*

En effet, dans le cas contraire, la formule (119) devrait être vérifiée par un polynome de la forme

$$P(x) = (x - x_1')^{\alpha_1'} \dots (x - x_n')^{\alpha_n'} (x - x_1)^2 \dots (x - x_q)^2 (x_1'' - x)^{\alpha_1''} \dots (x_m'' - x)^{\alpha_m''}$$

où $\alpha_i' \geqq 1$ et $\alpha_k'' \geqq 1$, ce qui est impossible, le second membre de la formule (119) étant nul, tandis que le premier membre de cette formule est positif.

35. *Les polynomes $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ ainsi que les polynomes $\varphi_{n+q+2}(x), \dots, \varphi_{n+m+q+1}(x)$ donnés par les formules* (128) *et* (129) *ont le degré*

$n+m+2q-1$. D'après les formules (132), (133), (135) il faudra démontrer que *dans la formule de quadrature* (119), *les sommes*

$$
(145)\qquad
\begin{aligned}
B'_n &= A'_n,\\
B'_{n-1} &= A'_n + A'_{n-1}\\
&\dots\dots\dots\dots\\
B'_1 &= A'_n + A'_{n-1} + \dots + A'_1
\end{aligned}
$$

et les sommes

$$
(146)\qquad
\begin{aligned}
B''_m &= A''_m\\
B''_{m-1} &= A''_m + A''_{m-1}\\
&\dots\dots\dots\dots\\
B''_1 &= A''_m + A''_{m-1} + \dots + A''_1
\end{aligned}
$$

ne sont pas nulles.

Nous considérons pour cela le polynome d'interpolation $\psi_j(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes

$$
(147)\qquad
\begin{array}{llll}
\psi_j(x'_n) = 1, & \psi_j(x'_{n-1}) = 1, & \dots, & \psi_j(x'_{n-j+1}) = 1\\
\psi_j(x'_{n-j}) = 0, & \psi_j(x'_{n-j-1}) = 0, & \dots, & \psi_j(x'_1) = 0\\
\psi_j(x_1) = 0, & \psi_j(x_2) = 0, & \dots, & \psi_j(x_q) = 0\\
\psi'_j(x_1) = 0, & \psi'_j(x_2) = 0, & \dots, & \psi'_j(x_q) = 0\\
\psi_j(x''_1) = 0, & \psi_j(x''_2) = 0, & \dots, & \psi_j(x''_m) = 0
\end{array}
$$

et démontrons qu'il a le degré $n+m+2q-1$.

Pour cela nous appliquons le théorème de Rolle au polynome $\psi_j(x)$ et aux intervalles

$$[x'_n, x'_{n-1}], \dots, [x'_{n-j+2}, x'_{n-j+1}], [x'_{n-j}, x'_{n-j-1}], \dots, [x'_1, x_1]$$
$$[x_1, x_2], \dots, [x_{q-1}, x_q], [x_q, x''_1], \dots, [x''_{m-1}, x''_m].$$

Nous déduisons que la dérivée $\psi'_j(x)$ a au moins un zéro dans chacun de ces intervalles ouverts; en plus [illegible] les zéros $x_1, x_2, \dots, x_q$. Donc la derivée $\psi'_j(x)$ a $n+m+2q-2$ zéros réels et distincts. Le degré du polynome $\psi_j(x)$ est donc au plus $n+m+2q-1$. Supposons que le degré du polynome $\psi_j(x)$ soit plus petit que $n+m+2q-1$. Sa dérivée ayant $n+m+2q-2$ zéros distincts, est identiquement nulle et par suite le polynome $\psi_j(x)$ est une constante, ce qui est impossible parceque d'après la définition du polynome $\psi_j(x)$, il prend la valeur 1 pour certains noeuds et la valeur o pour d'autres noeuds. Donc le degré du polynome $\psi_j(x)$ est $n+m+2q-1$.

Le polynome $\psi_j(x)$ n'a pas d'autres zéros dans l'intervalle $[x'_1, x''_1]$ à part les zéros $x_1, \dots, x_q$ et peut être les zéros x'_1 et x''_1, car tout autre zéro de $\psi_j(x)$ augmenterait le nombre des zéros de $\psi'_j(x)$, ce qui est impossible, puisque le polynome $\psi_j(x)$ étant du degré $n+m+2q-1$, le nombre des zéros de $\psi'_j(x)$ ne peut pas dépasser $n+m+2q-2$.

Le polynome $\psi_j(x)$ a dans l'intervalle (x'_1, x''_1) et par suite dans l'intervalle $[a, b]$, en dehors des noeuds $x_1, x_2, \dots, x_q$, le signe de $(-1)^{n-j}$.

Pour le prouver, remarquons que la dérivée $\psi'_j(x)$ a un signe constant dans l'intervalle $[x'_{n-j+1}, x'_{n-j}]$ et que le premier zéro de $\psi'_j(x)$ à gauche de x'_{n-j+1} est dans l'intervalle $[x'_{n-j+2}, x'_{n-j+1}]$ tandis que le premier zéro de $\psi'_j(x)$ à droite de x'_{n-j} est dans l'intervalle (x'_{n-j}, x_{n-j+1}). On démontre facilement que la dérivée $\psi'_j(x)$ est négative dans l'intervalle $[x'_{n-j+1}, x'_{n-j}]$. Donc le polynome $\psi_j(x)$ décroît dans l'intervalle $[x'_{n-j+1}, x'_{n-j}]$, de 1 a 0 . Il est négatif dans l'intervalle (x'_{n-j}, x'_{n-j-1}), positif dans l'intervalle (x'_{n-j-1}, x'_{n-j-2}), ... et il a le signe de $(-1)^{n-j}$ dans l'intervalle (x_1, x_1).

Le polynome $\psi_j(x)$ a donc le signe de $(-1)^{n-j}$ dans l'intervalle (x_1, x''_1) et par suite dans l'intervalle $[a, b]$.

Si nous remplaçons dans la formule de quadrature (119) la fonction $f(x)$ par le polynome $\psi_j(x)$, alors nous aurons d'après les formules (147),

$$\int_a^b p(x)\,\psi_j(x)dx = A'_n + A'_{n-1} + \dots + A'_{n-j+1},$$

ce qui démontre que la somme $B'_{n-j+1} = A'_n + A'_{n-1} + \dots + A'_{n-j+1}$ est différente de zéro et a le signe de $(-1)^{n-j}$. Ceci est vrai pour $j = 1, 2, \dots, n$.

Nous avons ainsi démontré que les polynomes $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ ont le degré $n+m+2q-1$.

D'une manière analogue on démontre que le polynome d'interpolation $\theta_l(x)$ qui satisfait aux conditions

$$
(148)\qquad
\begin{array}{llll}
Q_l(x''_m) = 1, & Q_l(x''_{m-1}) = 1, & \dots, & Q_l(x''_{m-l+1}) = 1\\
Q_l(x''_{m-l}) = 0, & Q_l(x''_{m-l-1}) = 0, & \dots, & Q_l(x''_1) = 0\\
Q_l(x_1) = 0, & Q_l(x_2) = 0, & \dots, & Q_l(x_q) = 0\\
Q'_l(x_1) = 0, & Q'_l(x_2) = 0, & \dots, & Q'_l(x_q) = 0\\
Q_l(x'_1) = 0, & Q_l(x'_1) = 0, & \dots, & Q_l(x'_n) = 0
\end{array}
$$

est de degre $n+m+2q-1$ et a le signe de $(-1)^{m-l}$ dans l'intervalle (x'_1, x''_1) et par suite dans l'intervalle $[a, b]$.

Si nous remplaçons dans la formule de quadrature (119) la fonction $f(x)$ par le polynome $\theta_l(x)$, nous déduisons que

$$\int_a^b p(x)Q_l(x)dx = A''_m + A''_{m-1} + \dots + A''_{m-l+1},$$

d'où il résulte que la somme $B''_{m-l+1} = A''_m + A_{m-1} + \dots + A''_{m-l+1}$ est différente de zéro et a le signe de $(-1)^{m-l}$. Ceci est vrai pour $l = 1, 2, \dots, m$.

Nous avons ainsi démontré que les polynomes $\varphi_{n+q+2}(x), \ldots, \varphi_{n+m+q+1}(x)$ ont le degré $n + m + 2q - 1$.

36. *La forme de la courbe $y = \varphi(x)$ dans l'intervalle $[x'_n, x''_m]$.* La fonction $\varphi(x)$ qui coïncide dans les intervalles $[x'_n, x'_{n-1}], \ldots, [x_{m-1}, x''_m]$, avec les fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+m+q+1}(x)$ est continue ainsi que ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $n + m + 2q - 2$, comme il résulte des conditions aux limites (121), (122), (123) et (124). Nous allons démontrer le théorème suivant:

La fonction $\varphi(x)$ a un seul extremum dans l'intervalle (x_n, x''_m) qui est un maximum si n est pair ou un minimum si n est impair.

En effet, en procédant comme au nr. 7, supposons que la fonction $\varphi(x)$ ait deux extrema dans l'intervalle (x'_n, x''_m), et par suite que la dérivée $\varphi'(x)$ ait deux zéros ξ_1, ξ_2 dans l'intervalle (x'_n, x''_m). Tenant compte des conditions aux limites (121) et (124) il résulterait que la dérivée $\varphi^{(n+m+2q-2)}(x)$ ait $n + m + 2q - 1$ zéros dans l'intervalle (x'_n, x''_m) que nous désignons par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n+m+2q-1}$ en ordre croissant. Dans le premier intervalle $(x'_n, x'_{n-1}]$ il n'y a pas des points η parceque dans cet intervalle nous avons $\lambda_n \neq 0$.

Dans chacun des intervalles successives $(x'_{n-1}, x'_{n-2}), \ldots, (x'_1, a)$ il ne peut y avoir plus d'un point η, parceque les polynomes $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ ont le degré $n + m + 2q - 1$.

On voit de la même manière que dans l'intervalle $[x''_{m-1}, x''_m)$ il n'y a pas des points η et que dans chacun des intervalles successives $[x''_{m-3}, x''_{m-2}], \ldots, [b, x''_1)$ il ne peut y avoir plus d'un point η.

Il résulte que dans l'intervalle (a, b) il y a $2q + 1$ points η, à savoir les points $\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots, \eta_{n+2q}$.

Il est impossible que dans un intervalle (x_j, x_{j+1}) il y ait trois points η. En effet supposons que la dérivée $\varphi^{(n+m+2q-2)}(x)$ soit nulle en trois points η de l'intervalle (x_j, x_{j+1}).

La fonction $\varphi(x)$ étant continue dans cet intervalle ainsi que ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $n + m + 2q$, il résulterait que la dérivée $\varphi^{(n+m+2q-1)}(x)$ ait deux zéros dans l'intervalle (x_j, x_{j+1}) et que la dérivée $\varphi^{(n+m+2q)}(x)$ ait un zéro dans le même intervalle, ce qui est impossible parceque $\varphi^{(n+m+2q)}(x) = p(x) \neq 0$, dans l'intervalle (x_j, x_{j+1}).

Dans les intervalles $(x_1, x_2], (x_2, x_3], \ldots, (x_{q-1}, x_q]$ il y a donc au plus $2(q - 1)$ points η, d'où il résulte que dans les intervalles $(a, x_1]$, (x_q, b) il y a trois points η.

Nous avons vu plus haut qu'il est impossible que dans un des intervalles $(a, x_1]$, (x_q, b) il y ait trois points η.

Supposons alors que dans l'intervalle $(a, x_1]$ il y ait deux points η, à savoir η_n et η_{n+1}. Si nous considérons l'intervalle $(x'_1, x_1]$, nous remarquons que la fonction $\varphi(x)$ relativement à cet intervalle est continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n + m + 2q - 1$ d'après les conditions aux limites (122) au point a. La dérivée $\varphi^{(n+m+2q-2)}(x)$ ayant trois zéros

$\eta_{n-1}, \eta_n, \eta_{n+1}$ dans l'intervalle $(x'_1, x_1]$, en appliquant le théorème de Rolle, on en déduit que la dérivée $\varphi^{(n+m+2q-1)}(x)$ a deux zéros ζ_1 et ζ_2 dans l'intervalle (x'_1, x_1). Dans l'intervalle (x'_1, a) il n'y a aucun point ζ_1 ou ζ_2, puisqu'on a démontré que $\varphi_n(x)$ est un polynome du $(n + m + 2q - 1)$-ème degré. Donc les points ζ_1 et ζ_2 appartient à l'intervalle $[a, x_1)$ et par suite la dérivée $\varphi^{(n+m+2q)}(x)$ doit s'annuler en un point ζ de l'intervalle (ζ_1, ζ_2) et par suite de l'intervalle (a, x_1), ce qui est impossible parceque dans l'intervalle (a, x_1), nous avons $\varphi^{(n+m+2q)}(x) = p(x)$ et nous avons supposé que la fonction $p(x)$ est positive dans l'intervalle (a, b). Donc dans l'intervalle $(a, x_1]$ il n'y a qu'un point η. On démontre de la même manière que dans l'intervalle (x_q, b) il n'y a qu'un point η. Il reste donc un point η qui ne peut être placé nul part dans l'intervalle (x'_n, x''_m) ce qui montre que l'hypothèse que $\varphi'(x)$ ait deux zéros dans l'intervalle (x'_n, x''_m) mène à une contradiction et par suite elle doit être rejetée.

D'après le théorème de Rolle appliqué à la fonction $\varphi(x)$ et à l'intervalle (x'_n, x''_m) la dérivée $\varphi'(x)$ a au moins un zéro dans l'intervalle (x'_n, x''_m). Nous venons de démontrer que ce zéro est unique. La fonction $\varphi(x)$ a donc un seul extremum dans l'intervalle (x'_n, x''_m).

Pour la fonction $\varphi_1(x)$, nous avons

$$\varphi_1(x) = -A'_n \frac{(x - x'_n)^{n+m+2q-1}}{(n + m + 2q - 1)!}$$

et A'_n ayant le signe de $(-1)^{n-1}$, on voit que $\varphi_1(x)$ a le signe de $(-1)^n$ dans l'intervalle $(x'_n, x'_{n-1}]$. Il résulte que la fonction $\varphi(x)$ a un maximum si n est pair et un minimum si n est impair.

La forme de la courbe $y = \varphi(x)$ est donnée dans la figure 16 selon que n est pair on impair.

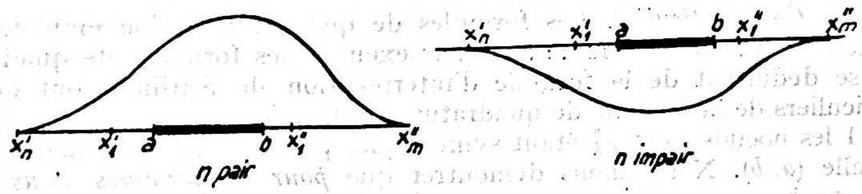


Fig. 16

37. *Le reste dans la formule de quadrature* (119). Nous avons vu au nr. 31, que le reste R de la formule de quadrature (119) est donné par la formule

$$R = (-1)^{n+m} \int_{x_n}^{x''_m} \varphi(x) f^{(n+m+2q)}(x)\, dx. \tag{149}$$

La fonction $\varphi(x)$ ayant un signe constant dans l'intervalle (x'_n, x''_m), on en déduit que le reste peut encore s'écrire sous la forme

$$R = (-1)^{n+m} f^{(n+m+2q)}(\xi) \int_{x'_n}^{x''_m} \varphi(x)\, dx,$$

où ξ est un point de l'intervalle (x'_n, x''_m).

Si nous remplaçons dans la formule (119) la fonction $f(x)$ par

$$f(x) = \frac{(x - x'_1) \dots (x - x'_n)(x - x''_1) \dots (x - x''_m) Q_q^2(x)}{(n + m + 2q)!}$$

et si l'on désigne par

$$(150) \qquad I = \frac{1}{(n+m+2q)!} \int_{x'_n}^{x''_m} (x - x'_1) \dots (x - x'_n)(x''_1 - x) \dots (x''_m - x) Q_q^2(x)\, dx$$

nous aurons,

$$\int_{x'_n}^{x''_m} \varphi(x) dx = (-1)^n I,$$

d'où il résulte que *le reste R de la formule de quadrature* (119) *peut s'écrire sous la forme*

$$(151) \qquad R = (-1)^m I f^{(n+m+2q)}(\xi),$$

où $\xi \in (x'_n, x''_m)$, *le nombre I ne dépendant que de la position des noeuds* x'_i *et* x''_k.

38. *Cas particulier.* Les formules de quadrature qu'on emploie dans les calculs pratiques, comme sont par exemple les formules de quadrature qui se déduisent de la formule d'interpolation de Stirling, sont des cas particuliers de la formule de quadrature (119) qu'on obtient pour $p(x) = 1$, $q = 1$ les noeuds x'_i et x''_k étant symétriques par rapport au milieu de l'intervalle (a, b). Nous allons démontrer que *pour ces formules nous avons* $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$.

En effet, l'équation déterminant le noeud x_1, est

$$\gamma_1 - \gamma_0 x = 0,$$

où γ_0 et γ_1 sont donnés par les formules (139). Cette équation peut encore s'écrire, sous la forme

$$\int_a^b (s - x'_1) \dots (s - x'_n)(s - x''_1) \dots (s - x''_m)(s - x) dx = 0.$$

En posant

$$(152) \qquad x'_i = x_0 - \lambda_i h, \quad x''_i = x_0 + \lambda_i h, \quad a = x_0 - h, \quad b = x_0 + h,$$

où $\lambda_i > 1$ et $h = \dfrac{b-a}{2}$, on peut écrire l'équation précédente sous la forme

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} [(s - x_0)^2 - \lambda_1^2 h^2] \dots [(s - x_0)^2 - \lambda_n^2 h^2][s - x_0 + x_0 - x] ds = 0.$$

En faisant le changement de variable $s - x_0 = uh$, cette équation devient

$$\int_{-1}^{+1} (u^2 - \lambda_1^2) \dots (u^2 - \lambda_n^2)[uh + (x_0 - x)] du = 0,$$

ou

$$h \int_{-1}^{+1} (u^2 - \lambda_1^2) \dots (u^2 - \lambda_n^2) u\, du + (x_0 - x) \int_{-1}^{+1} (u^2 - \lambda_1^2) \dots (u^2 - \lambda_n^2) du = 0.$$

Dans cette équation, la première intégrale est nulle et la seconde intégrale est différente de zéro, parceque le produit $(u^2 - \lambda_1^2) \dots (u^2 - \lambda_n^2)$ a un signe constant dans l'intervalle $(-1, +1)$. On en déduit que $x_1 = x_0$, c'est à dire $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$.

Dans le cas particulier considéré plus haut *les coefficients* A'_i, A''_i *sont égaux*, c'est à dire $A'_i = A''_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

En effet, d'après les formules (142), (144), (152) nous avons

$$A'_i = (-1)^{i-1} h \int_{-1}^{+1} \frac{(\lambda_1^2 - u^2) \dots (\lambda_{i-1}^2 - u^2)(\lambda_{i+1}^2 - u^2) \dots (\lambda_n^2 - u^2)\, u^2}{(\lambda_i^2 - x_1^2) \dots (\lambda_i^2 - \lambda_{i-1}^2)(\lambda_{i+}^2 - \lambda_i^2) \dots (\lambda_n^2 - \lambda_i^2)\lambda_i^2} (\lambda_i - u) du,$$

$$A''_1 = (-1)^{i-1} h \int_{-1}^{+1} \frac{(\lambda_1^2 - u^2) \dots (\lambda_{i-1}^2 - u^2)(\lambda_{i+1}^2 - u^2) \dots (\lambda_n^2 - u^2)\, u^2}{(\lambda_i^2 - \lambda_1^2) \dots (\lambda_i^2 - \lambda_{i-1}^2)(\lambda_{i+1}^2 - \lambda_i^2) \dots (\lambda_n^2 - \lambda_i^2)\lambda_i^2} (\lambda_i + u)\, du,$$

d'où il résulte que

$$(153) \qquad A'_i = A''_i = (-1)^{i-1} \frac{h}{\lambda_i} \int_{-1}^{+1} \frac{(\lambda_1^2 - u^2) \dots (\lambda_{i-1}^2 - u^2)(\lambda_{i+1}^2 - u^2) \dots (\lambda_n^2 - u^2)}{(\lambda_i^2 - \lambda_1^2) \dots (\lambda_i^2 - \lambda_{i-1}^2)(\lambda_{i+1}^2 - \lambda_i^2) \dots (\lambda_n^2 - \lambda_i^2)} u^2 du.$$

Donc, il résulte de la formule de quadrature (119), le cas particulier

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} A_i' \,[f(x_0 - \lambda_i h) + f(x_0 + \lambda_i h)] + C_1 f(x_0) + \int_{x_0-\lambda_n h}^{x_0+\lambda_n h} \varphi(x) f^{(2n+2)}(x)\,dx, \tag{154}$$

les coefficients A_i' étant donnés par les formules (153) où $i = 1, 2, \ldots, n$.

Le reste R de la formule de quadrature (154), peut se mettre sous la forme

$$R = (-1)^n I f^{(2n+2)}(\xi), \tag{155}$$

où $\xi \in (x_n', x_n'')$, et

$$I = \frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\int_{x_n'}^{x_n''} (x - x_1') \ldots (x - x_n')(x_1'' - x) \ldots (x_n'' - x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx. \tag{156}$$

En désignant par M_{2n+2} une borne supérieure de $|f^{(2n+2)}(x)|$ dans l'intervalle $[x_n', x_n'']$, nous aurons

$$|R| \leqq \rho(x_n', \ldots, x_n''), \tag{157}$$

où la borne supérieure $\rho(x_n', \ldots, x_n'')$ de $|R|$ est définie par la formule

$$\rho(x_n', \ldots, x_n'') = I M_{2n+2}. \tag{158}$$

Les formules (156) et (158) montrent que *si l'on prend les noeuds $x_i'^*$ et x_n^* symétriques par rapport au milieu de l'intervalle (a, b) et tels que $x_i'^* \leqq x_i'$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, alors la borne supérieure $\rho^*(x_n'^*, \ldots, x_n''^*)$ croît*, c'est à dire $\rho^*(x_n'^*, \ldots, x_n''^*) \geqq \rho(x_n', \ldots, x_n'')$.

Cela veut dire que nous n'avons aucun intérêt à déplacer les noeuds x_i' et x_i'' vers la gauche et vers la droite, parceque dans ce cas la borne supérieure de la valeur absolue du reste R de la formule de quadrature (154) croît.

Dans un travail sur une extension des formules de quadrature de Gauss, nous avons démontré la formule de quadrature

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= A_0[f(a) + f(b)] + A_1[f'(a) - f'(b)] + \ldots + \\ &+ A_{n-1}[f^{(n-1)}(a) + (-1)^{n-1} f^{(n-1)}(b)] + Cf\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_a^b \varphi(x) f^{(2n+2)}(x)\,dx\end{aligned} \tag{159}$$

qu'on peut considérer comme un cas limite de la formule de quadrature (154) lorsque les noeuds x_i' tendent vers a et lorsque les noeuds x_i'' tendent vers b.

Le reste de la formule de quadrature (159) peut s'écrire sous la forme

$$R_0 = (-1)^n I_0 f^{(2n+2)}(\xi_0),$$

où $\xi_0 \in (a, b)$, et

$$I_0 = \frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\int_a^b (x-a)^n (b-x)^n \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx.$$

Nous avons

$$|R_0| \leqq \rho_0(a, b),$$

où

$$\rho_0(a, b) = I_0 M_{2n+2}^0. \tag{160}$$

M_{2n+2}^0 étant une borne supérieure de $|f^{(2n+2)}(x)|$ dans l'intervalle (a, b). Nous avons

$$I > I_0, \quad M_{2n+2} \geqq M_{2n+2}^0,$$

et par suite

$$\rho(x_n', \ldots, x_n) > \rho_0(a, b).$$

Donc la borne supérieure de la valeur absolue du reste de la formule de quadrature (154) *définie par la formule* (158) *est plus grande que la borne supérieure de la valeur absolue du reste de la formule de quadrature* (159) *définie par la formule* (160).

Exemple. Nous avons la formule de quadrature

$$\begin{aligned}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = \frac{h}{1350}\{189[f(x_0-2h)+f(x_0+2h)] - 34[f(x_0-3h)] + \\ + f(x_0+3h)] + 2390 f(x_0)\} + \int_{x_0-3h}^{x_0+3h} \varphi(x) f^{(6)}(x)\,dx\end{aligned} \tag{161}$$

et nous avons

$$R = \frac{167}{180} h^7 f^{(6)}(\xi),$$

c'est-à-dire

$$|R| \leqslant \rho(x_2', \ldots, x_2''),$$

où

$$\rho(x_2', \ldots, x_2'') = \frac{167}{180} h^7 M_6.$$

La formule correspondante du type de la formule (159) est

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{30}\left\{7[f(a) + f(b)] + \frac{b-a}{2}[f'(a) - f'(b)] + 16 f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\} + \int_a^b \varphi(x) f^{(6)}(x)\,dx,$$

dont le reste est

$$R_0 = \frac{1}{4725} h^7 f^{(6)}(\xi_0),$$

et nous avons

$$|R_0| \leqq \rho_0(a, b),$$

où

$$\rho_0(a, b) = \frac{1}{4725} h^7 M_6^0.$$

Nous avons la formule de comparaison

(162) $$\frac{\rho(x_2', \ldots, x_2'')}{\rho_0(a, b)} = \frac{167}{180} . 4725 \frac{M_6}{M_6^0} \geqq 4383{,}75.$$

Si nous considérons la formule de quadrature de Gauss

(163) $$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{18}[5f(x_1) + 8f(x_2) + 5f(x_3)] + \int_a^b \varphi(x) f^{(6)}(x)dx,$$

dont le reste peut s'écrire sous la forme

$$R = \frac{1}{15\,750} h^7 f^{(6)}(\xi_1),$$

où $\xi_1 \in (a, b)$; nous avons

$$|R| \leqq \rho_1(a, b),$$

où

$$\rho_1(a, b) = \frac{1}{15750} h^7 M_6^0.$$

Nous avons la formule de comparaison

(164) $$\frac{\rho(x_2', \ldots, x_2'')}{\rho_1(a, b)} = \frac{167}{180} . 15750 \frac{M_6}{M_6^0} \geqq 14\,612{,}5.$$

Les formules (162), (164) montrent que la formule de quadrature (163) de Gauss est préférable à la formule de quadrature (161) à noeuds extérieurs et au noeud double $\frac{a+b}{2}$, parceque le rapport (164) des bornes supérieures de la valeur absolue des restes est très grand et dépasse le nombre $14612{,}5 \frac{M_6}{M_6^0}$.

39. *Le cas* $m = 0$. Nous considérerons des formules de quadrature de la forme (119), à noeuds extérieurs seulement à gauche de a et nous dirons

que de telles formules correspondent au cas $m = 0$. Nous aurons donc la formule de quadrature,

(165) $$\int_a^b p(x)f(x)dx = A_1'f(x_1') + A_2'f(x_2') + \ldots + A_n'f(x_n') +$$

$$+ C_1f(x_1) + C_2f(x_2) + \ldots + C_qf(x_q) + (-1)^n \int_{x_n'}^b \varphi(x) f^{(n+2q)}(x)dx,$$

où la fonction $\varphi(x)$ coïncide dans les intervalles $[x_n', x_{n-1}'], \ldots, [x_q, b]$ avec les intégrales $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+q+1}(x)$ des équations différentielles

$$\varphi_i^{(n+2q)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leqq n \\ p(x) & \text{si } i > n, \end{cases}$$

qui satisfont aux conditions aux limites

$$\varphi_1(x_n') = 0, \quad \varphi_1'(x_n') = 0, \ldots, \varphi_1^{(n+2q-2)}(x) = 0,$$

$$\varphi_2(x_{n-1}') = \varphi_1(x_{n-1}'), \; \varphi_2'(x_{n-1}') = \varphi_1'(x_{n-1}'), \ldots, \varphi_2^{(n+2q-2)}(x_{n-1}') = \varphi_1^{(n+2q-2)}(x_{n-1}'),$$

. . . .

$$\varphi_n(x_1') = \varphi_{n-1}(x_1'), \; \varphi_n'(x_1') = \varphi_{n-1}'(x_1'), \ldots, \varphi_n^{(n+2q-2)}(x_1') = \varphi_{n-1}^{(n+2q-2)}(x_1'),$$

$$\varphi_{n+1}(a) = \varphi_n(a), \; \varphi_{n+1}'(a) = \varphi_n'(a), \ldots, \varphi_{n+1}^{(n+2q-2)}(a) = \varphi_n^{(n+2q-2)}(a),$$

$$\varphi_{n+1}^{(n+2q-1)}(a) = \varphi_n^{(n+2q-1)}(a),$$

$$\varphi_{n+2}(x_1) = \varphi_{n+1}(x_1), \; \varphi_{n+2}'(x_1) = \varphi_{n+1}'(x_1), \ldots, \varphi_{n+2}^{(n+2q-2)}(x_1) = \varphi_{n+1}^{(n+2q-2)}(x_1),$$

. . . .

$$\varphi_{n+q+1}(x_q) = \varphi_{n+q}(x_q), \; \varphi_{n+q+1}'(x_q) = \varphi_{n+q}'(x_q), \ldots,$$

$$\varphi_{n+q+1}^{(n+2q+2)}(x_q) = \varphi_{n+q}^{(n+2q-2)}(x_q),$$

$$\varphi_{n+q+1}(b) = 0, \; \varphi_{n+q+1}'(b) = 0, \ldots, \varphi_{n+q+1}^{(n+2q-2)}(b) = 0, \; \varphi_{n+q+1}^{(n+2q-1)}(b) = 0.$$

On démontre comme au nr. **38** que les noeuds $x_1, \ldots, x_q$ sont les racines réelles, distinctes et comprises entre a et b du polynome $S_q(x)$ où la suite des polynomes $S_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots$ est orthogonale dans l'intervalle $[a, b]$ relativement à la fonction

$$p_2(x) = p(x)(x - x_1') \ldots (x - x_n')$$

continue dans l'intervalle $[a, b]$ et qui a un signe constant dans l'intervalle (a, b); nous avons

$$\int_a^b p_2(x) S_j(x) S_q(x) dx = 0$$

pour $j \neq k$.

On démontre qu'en posant

$$\gamma_h = \int_a^b p_2(s) s^h ds \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots),$$

nous avons

$$S_q(x) = \frac{(-1)^q}{\Delta_q} \begin{vmatrix} 1 & x & \ldots & x^{q-1} & x^q \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_{q-1} & \gamma_q \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{q-1} & \gamma_q & \ldots & \gamma_{2q-2} & \gamma_{2q-1} \end{vmatrix},$$

où

$$\Delta_q = \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_{q-1} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_q \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{q-1} & \gamma_q & \ldots & \gamma_{2q-2} \end{vmatrix}.$$

Dans la formule de quadrature tous les coefficients C_i sont positifs et les coefficients A_i changent alternativement leurs signes, le coefficient A_1' étant positif.

On démontre que la fonction $\varphi(x)$ est positive dans l'intervalle (x_n, b), si n est pair et négative si n est impair, d'où il résulte qu'on peut écrire le reste de la formule de quadrature (165) sous la forme

$$R = (-1)^n f^{(n+2q)}(\xi) \int_{x_n'}^b \varphi(x) dx = I f^{(n+2q)}(\xi), \tag{166}$$

où $\xi \in (x_n', b)$ et

$$I = \frac{1}{(n+2q)!} \int_a^b p(x)(x - x_1') \ldots (x - x_n') S_q^2(x) dx. \tag{167}$$

Exemple. Nous avons la formule de quadrature

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x) dx = \frac{h}{3999}\left[1612 f(x_0 - 2h) - 473 f(x_0 - 3h) + 6859 f\left(x_0 + \frac{5h}{19}\right)\right] + \int_{x_0-h}^{x_0+h} \varphi(x) f^{(4)}(x) dx \tag{168}$$

où le noeud intérieur $x_0 + \frac{5h}{19}$ est double

Pour cette formule le reste R, est donné par la formule

$$R = \int_{x_0-3h}^{x_0+h} \varphi(x) f^{(4)}(x) dx = f^{(4)}(\xi) \int_{x_0-3h}^{x_0+h} \varphi(x) dx = \frac{251}{1710} h^5 f^{(4)}(\xi),$$

où ξ est un nombre de l'intervalle $(x_0 - 3h, x_0 + h)$.

Nous avons

$$|R| \leqq \rho(x_0 - 3h, \ldots, x_0 + h),$$

où

$$\rho(x_0 - 3h, \ldots, x_0 + h) = \frac{251}{1710} h^5 M_4.$$

Si nous considérons la formule de quadrature (48) dont les noeuds sont intérieurs, une borne supérieure de la valeur absolue du reste R est donnée par la formule (49).

$$\rho'(x_0 - h, x_0 + h) = \frac{0{,}07679}{90} h^5 M_4^0.$$

En comparant les deux bornes supérieures $\rho(x_0 - 3h, \ldots, x_0 + h)$ et $\rho'(x_0 - h, x_0 + h)$, nous avons

$$\frac{\rho(x_0 - 3h, \ldots, x_0 + h)}{\rho'(x_0 - h, x_0 + h)} = \frac{251 \cdot 90}{1710 \cdot 0{,}07679} \frac{M_4}{M_4^0} > 172$$

ce qui montre la supériorité de la formule de quadrature à noeuds intérieurs (48).

§ 8. Formules de quadrature à noeuds extérieurs, aux noeuds a, b et à noeuds intérieurs du type de Gauss.

40. En faisant les même hypothèses sur les fonctions $p(x)$ et $f(x)$ qu'au nr. 31, prenons dans l'intervalle $[\alpha, a]$ les noeuds $a, x_1', \ldots, x_{n-1}'$ tels que $x_{n-1}' < x_{n-2}' \ldots < a$ et dans l'intervalle $[b, \beta]$ les noeuds $b, x_1'', \ldots, x_{m-1}''$ tels que $b < x_1'' < \ldots < x_{m-1}''$.

On démontre comme au nr. **31**, qu'on a la formule de quadrature de la forme

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) f(x) dx &= A_0' f(a) + A_1' f(x_1') + \ldots + A_{n-1}' f(x_{n-1}') + \\ &+ A_0'' f(b) + A_1'' f(x_1'') + \ldots + A_{m-1}'' f(x_{m-1}'') + \\ &+ C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_q f(x_q) + \\ &+ (-1)^{n+m} \int_{x_{n-1}'}^{x_{m-1}''} \varphi(x) f^{(n+m+2q)}(x) dx, \end{aligned} \tag{169}$$

dans laquelle les noeuds doubles $x_1, \ldots, x_q$ sont les racines réelles, distinctes et comprises entre a et b du polynome $T_q(x)$ où les polynomes $T_j(x)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, q$ forment une suite orthogonale dans l'intervalle $[a, b]$ relativement à la fonction

$$p_3(x) = p(x)(x-a)(x-x_1') \ldots (x-x_{n-1}')(x-b)(x-x_1'') \ldots (x-x_{m-1}'')$$

continue dans l'intervalle $[a, b]$ et qui a un signe constant dans l'intervalle (a, b).

La fonction $\varphi(x)$ coïncide dans les intervalles $[x'_{n-1}, x'_{n-2}], \ldots, [x''_{m-2}, x''_{m-1}]$ avec les intégrales $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+m+q-1}(x)$ des équations différentielles

$$\varphi_i^{(n+m+2q)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ p(x) & \text{si } i = n, n+1, \ldots, n+q \\ 0 & \text{si } i = n+q+1, \ldots, n+m+q-1 \end{cases}$$

qui satisfont les conditions aux limites

$$\varphi_1(x'_{n-1}) = 0, \quad \varphi_1'(x'_{n-1}) = 0, \ldots, \varphi_1^{(n+m+2q-2)}(x'_{n-1}) = 0$$

$$\varphi_2(x'_{n-2}) = \varphi_1(x'_{n-2}), \quad \varphi_2'(x'_{n-2}) = \varphi_1'(x'_{n-2}), \ldots,$$
$$\varphi_2^{(n+m+2q-2)}(x'_{n-2}) = \varphi_1^{(n+m+2q-2)}(x'_{m-2})$$

. . . .

$$\varphi_{n-1}(x'_1) = \varphi_{n-2}(x'_1), \quad \varphi'_{n-1}(x'_1) = \varphi'_{n-2}(x'_1), \ldots,$$
$$\varphi_{n-1}^{(n+m+2q-2)}(x'_1) = \varphi_{n-2}^{(n+m+2q-2)}(x'_1)$$

$$\varphi_n(a) = \varphi_{n-1}(a), \quad \varphi'_n(a) = \varphi'_{n-1}(a), \ldots, \varphi_n^{(n+m+2q-2)}(a) = \varphi_{n-1}^{(n+m+2q-2)}(a)$$

$$\varphi_{n+1}(x_1) = \varphi_n(x_1), \quad \varphi'_{n+1}(x) = \varphi'_n(x_1), \ldots, \varphi_{n+1}^{(n+m+2q-2)}(x_1) = \varphi_n^{(n+m+2q-2)}(x_1)$$

. . . .

$$\varphi_{n+q}(x_q) = \varphi_{n+q-1}(x_q), \quad \varphi'_{n+q}(x_q) = \varphi'_{n+q-1}(x_q), \ldots,$$
$$\varphi_{n+q}^{(n+m+2q-2)}(x_q) = \varphi_{n+q-1}^{(n+m+2q-2)}(x_q)$$

$$\varphi_{n+q+1}(b) = \varphi_{n+q}(b), \quad \varphi'_{n+q+1}(b) = \varphi'_{n+q}(b), \ldots,$$
$$\varphi_{n+q+1}^{(n+m+2q-2)}(b) = \varphi_{n+q}^{(n+m+2q-2)}(b)$$

$$\varphi_{n+q+2}(x''_1) = \varphi_{n+q+1}(x''_1), \quad \varphi'_{n+q+2}(x''_1) = \varphi'_{n+q+1}(x''_1), \ldots,$$
$$\varphi_{n+q+2}^{(n+m+2q-2)}(x''_1) = \varphi_{n+q+1}^{(n+m+2q-2)}(x''_1)$$

. . . .

$$\varphi_{n+m+q-1}(x''_{m-2}) = \varphi_{n+m+q-2}(x''_{m-2}), \quad \varphi'_{n+m+q-1}(x''_{m-2}) = \varphi'_{n+m+q-2}(x''_{m-2}), \ldots,$$
$$\varphi_{n+m+q-1}^{(n+m+2q-2)}(x''_{m-2}) = \varphi_{n+m+q-2}^{(n+m+2q-2)}(x''_{m-2})$$

$$\varphi_{n+m+q-1}(x''_{m-1}) = 0 \quad \varphi'_{n+m+q-1}(x''_{m-1}) = 0, \ldots, \varphi_{n+m+q-1}^{(n+m+2q-2)}(x''_{m-1}) = 0$$

Les coefficients A'_i, A''_i, C_i de la formule de quadrature (169) sont déterminés par les formules

$$\begin{cases} A'_{n-1} = & - \varphi_1^{(n+m+2q-1)}(x'_{n-1}) \\ A'_{n-2} = \varphi_1^{(n+m+2q-1)}(x'_{n-2}) & - \varphi_2^{(n+m+2q-1)}(x'_{n-2}) \\ \ldots & \ldots \\ A'_1 = \varphi_{n-2}^{(n+m+2q-1)}(x_1) & - \varphi_{n-1}^{(n+m+2q-1)}(x'_1) \\ A'_0 = \varphi_{n-1}^{(n+m+2q-1)}(a) & - \varphi_n^{(n+m+2q-1)}(a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A''_0 = \varphi_{n+q}^{(n+m+2q-1)}(b) & - \varphi_{n+q+1}^{(n+m+2q-1)}(b) \\ A''_1 = \varphi_{n+q+1}^{(n+m+2q-1)}(x''_1) & - \varphi_{n+q+2}^{(n+m+2q-1)}(x''_1) \\ \ldots & \ldots \\ A''_{m-2} = \varphi_{n+m+q+2}^{(n+m+2q-1)}(x''_{m-2}) & - \varphi_{n+m+q-1}^{(n+m+2q-1)}(x''_{m-2}) \\ A''_{m+1} = \varphi_{n+m+q-1}^{(n+m+2q-1)}(x''_{m-1}) & \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \varphi_n^{(n+m+2q-1)}(x_1) - \varphi_{n+1}^{(n+m+2q-1)}(x_1) \\ \ldots \\ C_q = \varphi_{n+q-1}^{(n+m+2q-1)}(x_q) - \varphi_{n+q}^{(n+m+2q-1)}(x_q). \end{cases}$$

Les coefficients A'_i et A''_i sont alternativement positifs et négatifs A'_0 et A''_0 étant positifs ; les coefficients C_i sont positifs.

On démontre comme au nr. **35** que les fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ et $\varphi_{n+q+1}(x), \ldots, \varphi_{n+m+q-2}(x)$ sont des polynomes du $(n+m+2q-1)$ — ème degré. A l'aide de cette propriété on démontre comme au nr. **35** que la fonction $\varphi(x)$ a un signe constant dans l'intervalle (x'_{n-1}, x''_{m-1}), elle est positive si n est pair et négative si n est impair.

Il s'en suit que le reste R de la formule (169) peut s'écrire sous la forme

$$R = (-1)^{n+m} f^{(n+m+2q)}(\xi) \int_{x'_{n-1}}^{x''_{m-1}} \varphi(x)\,dx = (-1)^m I f^{(n+m+2q)}(\xi) \tag{170}$$

où $\xi \in (x'_{n-1}, x''_{m-1})$ et

$$I = \frac{1}{(n+m+2q)!} \int_a^b p(x)(x-a)(b-x)(x-x'_1) \ldots (x-x'_{n-1})(x''_1 - x) \ldots (x''_{m-1} - x) T_q^2(x)\,dx, \tag{171}$$

d'où il résulte que

$$|R| \leq \rho(x'_{n-1}, \ldots, x''_{m-1}),$$

où
$$\rho(x'_{n-1}, \ldots, x''_{m-1}) = IM_{n+m+2q},$$

M_{n+m+2q} étant une borne supérieure de $|f^{(n+m+2q)}(x)|$ dans l'intervalle (x'_{n-1}, x''_{m-1}).

41. *Formules de quadrature aux noeuds a, b et à noeuds extérieurs à droite de b et à noeuds intérieurs du type de Gauss.* On démontre comme au nr. **40**, la formule de quadrature

$$\begin{aligned}(172)\qquad \int_a^b p(x)f(x)dx = A'_0 f(a) + A''_0 f(b) + A''_1 f(x''_1) + \ldots +\\ + A''_{m-1} f(x''_{m-1}) + C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_q f(x_q) +\\ + (-1)^{m+1}\int_a^{x''_{m-1}} \varphi(x) f^{(m+2q+1)}(x)dx,\end{aligned}$$

où les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_q$ double sont les racines réelles, distinctes et comprises entre a et b du polynome $U_q(x)$, où la suite de polynomes $U_j(x)$, $j=0,1,\ldots,q$ est orthogonale dans l'intervalle $[a, b]$ relativement à la fonction

$$p_4(x) = p(x)(x-a)(x-b)(x-x''_1) \ldots (x-x''_{m-1}),$$

continue dans l'intervalle $[a, b]$ et qui a un signe constant dans l'intervalle (a, b).

La fonction $\varphi(x)$ de la formule de quadrature (172) coïncide dans les intervalles $[a, x_1], \ldots, [x''_{m-2}, x''_{m-1}]$ avec les intégrales des équations différentielles

$$\varphi_i^{(m+2q+1)}(x) = \begin{cases} p(x) & \text{si } i = 1, 2, \ldots, q+1\\ 0 & \text{si } i = q+2, \ldots, q+m,\end{cases}$$

qui satisfont aux conditions aux limites

$$\begin{array}{llll}
\varphi_1(a) = 0, & \varphi'_1(a) = 0, & \ldots, & \varphi_1^{(m+2q-1)}(a) = 0\\
\varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1), & \varphi'_2(x_1) = \varphi'_1(x_1), & \ldots, & \varphi_2^{(m+2q-1)}(x_1) = \varphi_1^{(m+2q-1)}(x_1)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\varphi_{q+1}(x_q) = \varphi_q(x_q), & \varphi'_{q+1}(x_q) = \varphi'_q(x_q), & \ldots, & \varphi_{q+1}^{(m+2q-1)}(x_q) = \varphi_q^{(m+2q-1)}(x_q)\\
\varphi_{q+2}(b) = \varphi_{q+1}(b), & \varphi'_{q+2}(b) = \varphi'_{q+1}(b), & \ldots, & \varphi_{q+2}^{(m+2q-1)}(b) = \varphi_{q+1}^{(m+2q-1)}(b)\\
\varphi_{q+3}(x''_1) = \varphi_{q+2}(x''_1), & \varphi'_{q+3}(x''_1) = \varphi'_{q+2}(x''_1), & \ldots, & \varphi_{q+3}^{(m+2q-1)}(x''_1) = \varphi_{q+2}^{(m+2q-1)}(x''_1)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$\varphi_{q+m}(x''_{m-2}) = \varphi_{q+m-1}(x''_{m-2}),\ \varphi'_{q+m}(x''_{m-2}) = \varphi'_{q+m-1}(x''_{m-1}), \ldots,$$
$$\varphi_{q+m}^{(m+2q-1)}(x''_{m-2}) = \varphi_{q+m-1}^{(m+2q-1)}(x''_{m-2})$$
$$\varphi_{q+m}(x''_{m-1}) = 0, \qquad \varphi'_{q+m}(x''_{m-1}) = 0, \ldots, \qquad \varphi_{q+m}^{(m+2q-1)}(x''_{m-1}) = 0.$$

Les coefficients A'_0, A''_i, C_i de la formule (172) sont donnés par les formules

$$A'_0 = -\varphi_1^{(m+2q)}(a)$$
$$\begin{cases} C_1 = \varphi_1^{(m+2q)}(x_1) - \varphi_2^{(m+2q)}(x_1)\\ \cdots\\ C_q = \varphi_q^{(m+2q)}(x_q) - \varphi_{q+1}^{(m+2q)}(x_q)\end{cases}
\qquad
\begin{cases} A''_0 = \varphi_{q+1}^{(m+2q)}(b) - \varphi_{q+2}^{(m+2q)}(b)\\ A''_1 = \varphi_{q+2}^{(m+2q)}(x''_1) - \varphi_{q+3}^{(m+2q)}(x''_1)\\ \cdots\\ A''_{m-2} = \varphi_{q+m-1}^{m+2q}(x''_{m-2}) - \varphi_{q+m}^{(m+2q)}(x''_{m-2})\\ A''_{m-1} = \varphi_{q+m}^{(m+2q)}(x''_{m-1}).\end{cases}$$

On démontre que *les coefficients A'_0 et A''_0 sont positifs et que le coefficient A''_i a le signe de $(-1)^i$, pour $i=2, \ldots, m-1$.*

On démontre que les fonctions $\varphi_{q+2}(x), \ldots, \varphi_{q+m}(x)$ sont des polynomes du $(m+2q)$ — ième degré. On démontre ensuite que la fonction $\varphi(x)$ est négative dans l'intervalle (a, x''_{m-1}) d'où il résulte que le reste R de la formule (172) peut se mettre sous la forme

$$(173)\qquad R = (-1)^{m+1}\int_a^{x''_{m-1}} \varphi(x) f^{(m+2q+1)}(x)dx = (-1)^m I f^{(m+2q+1)}(\xi),$$

où $\xi \in (a, x''_{m-1})$ et

$$(173')\qquad I = \frac{1}{(m+2q+1)!}\int_a^b p(x)(x-a)(b-x)(x''_1 - x) \ldots (x''_{m-1} - x)U_q^2(x)dx.$$

Exemple. Pour $m=2$, $q=1$, $b=a+h$, $x''_1 = a+2h$ l'équation que détermine le noeud x_1 est

$$\gamma_1 - \gamma_0 x = 0,$$

où

$$\gamma_0 = \int_a^{a+h} (x-a)(x-a-h)(x-a-2h)dx = \frac{h^4}{4}$$

$$\gamma_1 = \int_a^{a+h} (x-a)(x-a-h)(x-a-2h)\,x dx = \frac{h^4}{4}\left(a + \frac{7h}{15}\right).$$

On trouve $x_1 = a + \frac{7h}{15}$ et la formule de quadrature correspondante est

$$(118)\qquad \int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{-h}{30912}\left[4600f(a) + 6118f(a+h) - 56f(a+2h) + \right.$$
$$\left. + 20250 f\left(a + \frac{7h}{15}\right)\right] - \int_a^{a+h} \varphi(x) f^{(5)}(x)dx,$$

où le noeud $x_1 = a + \frac{7h}{15}$ est double.

Le reste de cette formule peut s'écrire sous la forme

$$R = \frac{11h^6}{108000} f^{(5)}(\xi), \tag{174}$$

où $\xi \in (a, a+2h)$.

On retrouve ainsi la formule de quadrature (118) du § 6, avec le reste écrit sous la forme (174).

42. *Formule de quadrature au noeud a, à noeuds extérieurs à droite de b et à noeuds intérieurs du type de Gauss.* On établit comme au nr. **40**, la formule de quadrature

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = A'_0 f(a) + A''_1 f(x''_1) + \ldots + A''_{m-1} f(x''_{m-1}) + \tag{175}$$

$$+ C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_q f(x_q) + (-1)^m \int_a^{x''_{m-1}} \varphi(x) f^{(m+2q)}(x) dx,$$

où les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_q$ doubles, sont les racines réelles, distinctes et comprises entre a et b du polynome $V_q(x)$, où la suite de polynomes $V_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, q$ est orthogonale dans l'intervalle $[a, b]$, relativement à la fonction

$$p_5(x) = p(x)(x-a)(x-x''_1) \ \ldots \ (x - x''_{m-1}),$$

continue et qui a le même signe dans l'intervalle (a, b).

La fonction $\varphi(x)$ de la formule de quadrature (175) coïncide dans les intervalles $[a, x_1], \ldots, [x''_{m-2}, x''_{m-1}]$ avec les intégrales $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{q+m}(x)$ des équations différentielles

$$\varphi_i^{(m+2q)}(x) = \begin{cases} p(x) & \text{si } i = 1, 2, \ldots, q+1 \\ 0 & \text{si } i = q+2, \ldots, q+m \end{cases}$$

et satisfont aux conditions aux limites

$$\varphi_1(a) = 0, \quad \varphi'_1(a) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_1^{(m+2q-2)}(a) = 0$$

$$\varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1), \quad \varphi'_2(x_1) = \varphi'_1(x_1), \quad \ldots, \quad \varphi_2^{(m+2q-2)}(x_1) = \varphi_1^{(m+2q-2)}(x_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_{q+1}(x_q) = \varphi_q(x_q), \quad \varphi'_{q+1}(x_q) = \varphi'_q(x_q), \quad \ldots, \quad \varphi_{q+1}^{(m+2q-2)}(x_q) = \varphi_q^{(m+2q-2)}(x_q)$$

$$\varphi_{q+2}(b) = \varphi_{q+1}(b), \quad \varphi'_{q+2}(b) = \varphi'_{q+1}(b), \quad \ldots, \quad \varphi_{q+2}^{(m+2q-2)}(b) = \varphi_{q+1}^{(m+2q-2)}(b)$$

$$\varphi_{q+3}(x''_1) = \varphi_{q+2}(x_1), \quad \varphi'_{q+3}(x''_1) = \varphi'_{q+2}(x''_1), \quad \ldots, \quad \varphi_{q+3}^{(m+2q-2)}(x''_1) = \varphi_{q+2}^{(m+2q-2)}(x''_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_{q+m}(x''_{m-2}) = \varphi_{q+m-1}(x''_{m-2}), \quad \varphi'_{q+m}(x''_{m-2}) = \varphi'_{q+m-1}(x''_{m-2}), \quad \ldots,$$

$$\varphi_{q+m}^{(m+2q-2)}(x''_{m-2}) = \varphi_{q+m-1}^{(m+2q-2)}(x''_{m-2})$$

$$\varphi_{q+m}(x''_{m-1}) = 0, \quad \varphi'_{q+m}(x''_{m-1}) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{q+m}^{(m+2q-2)}(x''_{m-1}) = 0.$$

Les coefficients A'_0, A''_i, C_i de la formule de quadrature (175) sont donnés par les formules

$$\begin{cases} A'_0 = -\varphi_1^{(m+2q-1)}(a) \\ A''_1 = \varphi_{q+2}^{(m+2q-1)}(x''_1) - \varphi_{q+3}^{(m+2q-1)}(x''_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A''_{m-2} = \varphi_{q+m-1}^{(m+2q-1)}(x''_{m-1}) - \varphi_{q+m}^{(m+2q-1)}(x''_{m-1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \varphi_1^{(m+2q-1)}(x_1) - \varphi_2^{(m+2q-1)}(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_q = \varphi_2^{(m+2q-1)}(x_q) - \varphi_{q+1}^{(m+2q-1)}(x_q). \end{cases}$$

On démontre que le *coefficient A'_0 est postif et que le coefficient A''_i a le signe de $(-1)^i$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$.*

On démontre que les fonctions $\varphi_{q+2}(x), \ldots, \varphi_{q+m}(x)$ sont des polynomes du $(m + 2q - 1)$ — ème degré, d'où il résulte que la fonction $\varphi(x)$ est négative dans l'intervalle (a, x''_{m-1}).

Le reste de la formule de quadrature (175) peut s'écrire sous la forme

$$R = (-1)^m \int_a^{x''_{m-1}} \varphi(x) f^{(m+2q)}(x) dx = (-1)^m I f^{(m+2q)}(\xi), \tag{176}$$

où $\xi \in (a, x''_{m-1})$ et

$$I = \frac{-1}{(m+2q)!} \int_a^b p(x)(x-a)(x''_1 - x) \ \ldots \ (x''_{m-1} - x) V_q^2(x) dx. \tag{276'}$$

Exemple. Pour $m=2$, $q=1$, $b=a+2h$, le noeud x_1 est déterminé par l'équation

$$\gamma_1 - \gamma_0 x = 0,$$

où

$$\gamma_0 = \int_a^{a+h} (x-a)(x-a-2h) dx = -\frac{2h^3}{3}$$

$$\gamma_1 = \int_a^{a+h} (x-a)(x-a-2h) x dx = -\frac{2h^3}{3} a - \frac{5h^4}{12}.$$

On en déduit que $x_1 = a + \frac{5h}{8}$ et la formule de quadrature correspondante est

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{h}{660}\left[143f(a) + 512f\left(a + \frac{5h}{8}\right) + 5f(a+2h)\right] + \tag{117}$$

$$+ \int_a^{a+2h} \varphi(x) f^{(4)}(x)dx,$$

où le noeud $x_1 = a + \frac{5h}{8}$ est double.

Le reste de cette formule peut s'écrire sous la forme

$$R = -\frac{19h^5}{480} f^{(4)}(\xi). \tag{177}$$

On retrouve la formule (117), avec le reste écrit sous la forme (177).

43. *Formules de quadrature au noeud b, à noeuds extérieurs à droite de b et à noueds intérieurs du type de Gauss.* On établit comme au nr. **40**, la formule de quadrature

$$\int_a^b p(x)\, f(x)\, dx = A''_0 f(b) + A''_1 f(x''_1) + \ldots + A''_{m-1} f(x''_{m-1}) + \tag{178}$$

$$+ C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_q f(x_q) + (-1)^m \int_a^{x''_{m-1}} \varphi(x) f^{(m+2q)}(x)dx,$$

où les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_q$ doubles, sont les racines réelles distinctes et comprises entre a et b du polynome $W_q(x)$, où la suite des polynome $W_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots,$ est orthogonale dans l'intervalle $[a, b]$ relativement à la fonction

$$p_6(x) = p(x)\,(x - b)\,(x - x''_1) \ldots (x - x''_{m-1}),$$

continue dans l'intervalle $[a, b]$ et qui a le même signe dans l'intervalle (a, b).

La fonction $\varphi(x)$ de la formule (178) coïncide dans les intervalles $[a, x_1], \ldots, [x''_{m-2}, x''_{m-1}]$ avec les intégrales $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{q+m}(x)$ des équations différentielles

$$\varphi_i^{(m+2q)}(x) = \begin{cases} p(x) & \text{si } i = 1, 2, \ldots, q+1 \\ 0 & \text{si } i = q+2, \ldots, q+m, \end{cases}$$

qui satisfont aux conditions aux limites

$$\begin{array}{llll}
\varphi_1(a) = 0, & \varphi'_1(a) = 0, & \ldots, \varphi_1^{(m+2q-2)} = 0, & \varphi_1^{(m+2q-1)}(a) = 0 \\
\varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1), & \varphi'_2(x_1) = \varphi'_1(x_1), & \ldots, \varphi_2^{(m+2q-2)}(x_1) & = \varphi_1^{(m+2q-2)}(x_1) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\varphi_{q+1}(x_q) = \varphi_q(x_q), & \varphi'_{q+1}(x_q) = \varphi'_q(x_q), & \ldots, \varphi_{q+1}^{(m+2q-2)}(x_q) & = \varphi_q^{(m+2q-2)}(x_q) \\
\varphi_{q+2}(b) = \varphi_{q+1}(b), & \varphi'_{q+2}(b) = \varphi'_{q+1}(b), & \ldots, \varphi_{q+2}^{(m+2q-2)}(b) & = \varphi_{q+1}^{(m+2q-2)}(b) \\
\varphi_{q+3}(x''_1) = \varphi_{q+2}(x''_1), & \varphi'_{q+3}(x''_1) = \varphi'_{q+2}(x''_1), & \ldots, \varphi_{q+3}^{(m+2q-2)}(x''_1) & = \varphi_{q+2}^{(m+2q-2)}(x''_1) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

$$\varphi_{q+m}(x''_{m-2}) = \varphi_{q+m-1}(x''_{m-2}), \varphi'_{q+m}(x''_{m-2}) = \varphi'_{q+m-1}(x''_{m-2}), \ldots,$$
$$\varphi_{q+m}^{(m+2q-2)}(x''_{m-2}) = \varphi_{q+m-1}^{(m+2q-2)}(x''_{m-2})$$

$$\varphi_{q+m}(x''_{m-1}) = 0, \varphi'_{q+m}(x''_{m-1}) = 0, \ldots, \varphi_{q+m}^{(m+2q-2)}(x_{m-1}) = 0.$$

Les coefficients A''_i et C_i de la formule de quadrature (178) sont donnés par les formules

$$\left\{\begin{array}{l}
A''_0 = \varphi_{q+1}^{(m+2q-1)}(b) - \varphi_{q+2}^{(m+2q-1)}(b) \\
A''_1 = \varphi_{q+2}^{(m+2q-1)}(x''_1) - \varphi_{q+3}^{(m+2q-1)}(x''_1) \\
\ldots \\
A''_{m-2} = \varphi_{q+m-1}^{(m+2q-1)}(x''_{m-2}) - \varphi_{q+m}^{(m+2q-1)}(x''_{m-2}) \\
A''_{m-1} = \varphi_{q+m}^{(m+2q-1)}(x''_{m-1})
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
C_1 = \varphi_1^{(m+2q-1)}(x_1) - \varphi_2^{(m+2q-1)}(x_1) \\
\ldots \\
C_q = \varphi_q^{(m+2q-1)}(x_q) - \varphi_{q+1}^{(m+2q-1)}(x_q).
\end{array}\right.$$

On démontre que le coefficient A''_i a le signe de $(-1)^i$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$ et que les coefficients C_i sont positifs.

On démontre que les fonctions $\varphi_{q+2}(x), \ldots, \varphi_{q+m}(x)$ sont des polynomes du $(m+2q)$ —ème degré, ce qui permet de démonter que la fonction $\varphi(x)$ a le même signe dans l'intervalle (a, x''_{m-1})

On en déduit que le reste de la formule de quadrature (178) peut s'écrire sous la forme

$$R = (-1)^m \int_a^{x''_{m-1}} \varphi(x) f^{(m+2q)}(x)dx = (-1)^m I f^{(m+2q)}(\xi), \tag{179}$$

où $\xi \in (a, x''_{m-1})$ et

(180) $$I = \frac{1}{(m+2q)!}\int_a^b p(x)(b-x)(x''_1 - x) \ldots (x''_{m-1} - x) W_q^2(x)\,dx.$$

Exemple. Pour $m = 2$, $q = 1$, $b = a + h$, $x''_1 = a + 2h$, le noeud x_1 est déterminé par l'équation

$$\gamma_1 - \gamma_0 x = 0,$$

où

$$\gamma_0 = \int_a^{a+h} (x - a - h)(x - a - 2h)\,dx = \frac{5h^3}{6},$$

$$\gamma_1 = \int_a^{a+h} (x - a - h)(x - a - 2h)\,x dx = \frac{5h^3}{6}a + \frac{h^4}{4}.$$

On en déduit que $x_1 = a + \frac{3}{10}h$ et la formule de quadrature correspondante est

(116) $$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{h}{714}\left[221 f(a+h) - 7f(a+2h) + 500 f\left(a + \frac{3h}{16}\right)\right] + \int_a^{a+h} \varphi(x) f^{(4)}(x)\,dx.$$

Le reste de cette formule de quadrature peut s'écrire sous la forme

(181) $$R = \frac{11h^5}{300} f^{(4)}(\xi).$$

On retrouve ainsi la formule de quadrature (116) où le reste est mis sous la forme (181).

§ 9. Formules de quadrature aux noeuds a, b, $\frac{a+b}{2}$ et à noeuds extérieurs symétriques par rapport au milieu de (a, b) en progression arithmétique de raison $h = \frac{b-a}{2}$.

44. Supposons que dans la formule de quadrature (169) nous avons $p(x) = 1$, $q = 1$, et que les noeuds x'_i et x''_i sont symétriques par rapport au milieu x_0 de l'intervalle (a, b), c'est à dire.

(182) $$x'_i = x_0 - \lambda_i h, \quad x''_i = x_0 + \lambda_i h,$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

On démontre comme au nr. **38**, *que le noeud intérieur* $x_1 = \frac{a+b}{2}$ *est double, et que les coefficients* A'_i, A''_i *de la formule* (168) *sont égaux.*

Dans ce cas la formule (169) peut s'écrire sous la forme

(183) $$\int_a^b f(x)dx = A_0[f(a) + f(b)] + A_1[f(x'_1) + f(x''_1)] + \ldots + A_{n-1}[f(x'_{n-1}) + f(x''_{n-1})] + Cf\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_{x'_{n-1}}^{x''_{n-1}} \varphi(x) f^{(2n+2)}(x)\,dx.$$

Dans cette formule la fonction $\varphi(x)$ est positive ou négative dans l'intervalle (x'_{n-1}, x''_{n-1}) selon que n est pair ou impair.

45. *Le cas des noeuds* $x_0, x'_1, x'_2, \ldots$ *en progression aritmétique.* Nous désignerons les noeuds par

$$x_k = x_0 + kh,$$

où $k = 0, 1, 2, \ldots, n, -1, -2, \ldots, -n$, et $x_{-1} = a$, $x_1 = b$. La formule (183) devient

(183′) $$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)dx = A_0[f(x_{-1}) + f(x_1)] + A_1[f(x_{-2}) + f(x_2)] \ldots + A_{n-1}[f(x_{-n}) + f(x_n)] + Cf(x_0) + \int_{x_{-n}}^{x_n} \varphi(x) f^{(2n+2)}(x)\,dx.$$

En introduisant les différences d'ordre pair nous avons

$$\Delta^2 f(x_{-1}) = f(x_1) - 2f(x_0) + f(x_{-1})$$
$$\Delta^4 f(x_{-2}) = f(x_2) - 4f(x_1) + 6f(x_0) - 4f(x_{-1}) + f(x_{-2})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^{2k} f(x_{-k}) = f(x_k) - C^1_{2k} f(x_{k-1}) + \ldots - C^{2k-1}_{2k} f(x_{-k+1}) + f(x_{-k}).$$

De ces formules on en déduit que $f(x_1) + f(x_{-1})$ s'exprime linéairement à l'aide de $f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_{-1})$, que $f(x_2) + f(x_{-2})$, s'exprime linéairement à l'aide de $f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_{-1})$, $\Delta^4 f(x_{-2})$, … et qu'en général $f(x_k) + f(x_{-k})$, s'exprime linéairement à l'aide de $f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_{-1})$, …, $\Delta^{2k} f(x_{-k})$.

La formule de quadrature (183′) peut alors s'écrire sous la forme

(183″) $$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)dx = B_0 f(x_0) + B_1 \Delta^2 f(x_{-1}) + \ldots + B_n \Delta^{2n} f(x_{-n}) + \int_{x_{-n}}^{x_n} \varphi(x) f^{(2n+2)}(x)\,dx$$

On détermine les coefficients $B_0, B_1, \ldots, B_n$ de la manière suivante: on remplace dans la formule de quadrature (183'') $f(x)$ par 1 et l'on obtient $B_0 = 2h$, ensuite pour déterminer en général B_k, on remplace dans la formule de quadrature (183'') $f(x)$ par

$$f(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)(x - x_{-1}) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{-k+1}).$$

Il est évident que nous avons $f(x_0) = 0, \Delta^2 f(x_{-1}) = 0, \ldots, \Delta^{2(k-1)} f(x_{-k+1}) = 0$ et que nous avons $\Delta^{2(k+1)} f(x_{k+1}) = 0, \ldots$ le degré du polynome $f(x)$ étant $2k$. La formule (183'') nous donnera alors

$$B_k \Delta^{2k} f(x_{-k}) = \int_{x_{-1}}^{x_1} (x - x_0)^2(x - x_1)(x - x_{-1}) \ldots (x - x_k)(x - x_{-k})dx$$

En remarquant que

$$\Delta^{2k} f(x_{-k}) = (2k)!\, h^{2k}.$$

et en faisant dans l'intégrale le changement de variable $x - x_0 = uh$, nous aurons.

$$(2k)!\, h^{2k} B_k = h^{2k} h \int_{-1}^{+1} u^2(u^2 - 1) \ldots [u^2 - (k-1)^2]du =$$

$$= 2h^{2k+1} \int_0^1 u^2(u^2 - 1^2) \ldots [u^2 - (k-1)^2]du,$$

d'où il résulte que si nous posons

$$L_k = \frac{1}{(2k)!} \int_0^1 u^2(u^2 - 1^2) \ldots [u^2 - (k-1)^2]du, \tag{184}$$

nous aurons

$$B_k = 2hL_k$$

et la formule (183'') devient

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)dx = 2h[f(x_0) + L_1\Delta^2 f(x_{-1}) + L_2\Delta^4 f(x_{-2}) + \ldots \tag{183'''}$$

$$+ L_n \Delta^{2n} f(x_{-n})] + \int_{x_{-n}}^{x_n} \varphi(x) f^{(2n+2)}(x)\, dx.$$

Le reste de cette formule peut s'écrire sous la forme

$$R = f^{(2n+2)}(\xi) \int_{x_{-n}}^{x_n} \varphi(x)dx$$

et l'on calcule l'intégrale du second membre en remplaçant la fonction $f(x)$ par

$$f(x) = \frac{(x - x_0)^2(x - x_1)(x - x_{-1}) \ldots (x - x_n)(x - x_{-n})}{(2n+2)!}.$$

Nous aurons

$$\int_{x_{-n}}^{x_n} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{[2(n-1)]!} \int_{x_{-1}}^{x_1} (x - x_0)^2 (x - x_1)(x - x_{-1}) \ldots (x - x_n)(x - x_{-n})\, dx,$$

c' est à dire

$$\int_{x_{-n}}^{x_n} \varphi(x)dx = 2h^{2n+3} L_{n+1}.$$

La formule de quadrature (183''') dévient finalement

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)dx = 2h[f(x_0) + L_1\Delta^2 f(x_{-1}) + L_2\Delta^4 f(x_{-2}) + \ldots + \tag{185}$$

$$+ L_n \Delta^{2n} f(x_{-n})] + 2h^{2n+3} L_{n+1} f^{(2n+2)}(\xi).$$

Nous avons ici une formule de quadrature qu'on obtient ordinairement en appliquant la formule d'interpolation de Stirling.

Nous avons

$$L_1 = \frac{1}{6},\quad L_2 = -\frac{1}{180},\quad L_3 = \frac{1}{1512},\quad L_4 = -\frac{23}{226800},\quad L_5 = \frac{263}{14\,968\,800},$$

d'où il résulte d'après la formule (185) que pour $n = 1, 2, 3, 4$ nous avons

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\, dx = 2h\left[f(x_0) + \frac{1}{6}\Delta^2 f(x_{-1})\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\, dx = 2h\left[f(x_0) + \frac{1}{6}\Delta^2 f(x_{-1}) - \frac{1}{180}\Delta^4 f(x_{-2})\right] + \frac{h^7}{756} f^{(6)}(\xi)$$

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\, dx = 2h\left[f(x_0) + \frac{1}{6}\Delta^2 f(x_{-1}) - \frac{1}{180}\Delta^4 f(x_{-2}) + \frac{1}{1512}\Delta^6 f(x_{-3})\right] -$$

$$- \frac{23\, h^9}{113400} f^{(8)}(\xi)$$

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\, dx = 2h\left[f(x_0) + \frac{1}{6}\Delta^2 f(x_{-1}) - \frac{1}{180}\Delta^4 f(x_{-2}) + \frac{1}{1512}\Delta^6 f(x_{-3}) -\right.$$

$$\left. - \frac{23}{226800}\Delta^8 f(x_{-4})\right] + \frac{263\, h^{11}}{7\,484\,400} f^{(10)}(\xi).$$

Pour le reste de la formule de quadrature (185) nous avons

$$|R| \leqq \rho(x_{-n}, \ldots, x_n), \tag{186}$$

où

$$\rho(x_{-n}, \ldots, x_n) = 2\,|L_{n+1}|\,h^{2n+3}\,M_{2n+2}, \tag{187}$$

M_{2n+2} étant une borne supérieure de $|f^{(2n+2)}(x)|$ dans l'intervllae $[x_{-n}, x_n]$.

Nous pouvons comparer la borne supérieure $\rho(x_{-n}, \ldots, x_n)$ donnée par la formule (187) avec la borne supérieure de la valeur absolue du reste des formules de quadrature de Gauss donnée par la formule

$$\rho(a, b) = \frac{[(n+1\,!)]^4\, 2^{2n+3}}{[(2n+2)!]^3(2n+3)}\, h^{2n+3} M^0_{2n+2}.$$

Nous avons le tableau

(188)

n	$\rho(x_{-n}, \ldots, x_n)$	$\rho(a, b)$	$\dfrac{\rho(x_{-n}, \ldots, x_n)}{\rho(a, b)}$
1	$\dfrac{h^5}{90} M_4$	$\dfrac{h^5}{135} M^0_4$	$\dfrac{3}{2}\,\dfrac{M_4}{M^0_4}$
2	$\dfrac{h^7}{756} M_6$	$\dfrac{h^7}{15\,750} M^0_6$	$\dfrac{875}{42}\,\dfrac{M_6}{M^0_6} = 20{,}8 \ldots \dfrac{M_6}{M^0_6}$
3	$\dfrac{23h^9}{113\,400} M_8$	$\dfrac{h^9}{3\,472\,875} M^0_8$	$\dfrac{5\,635}{8}\,\dfrac{M_8}{M^0_8} = 704{,}375\,\dfrac{M_8}{M^0_8}$
4	$\dfrac{263h^{11}}{7\,484\,400} M_{10}$	$\dfrac{h^{11}}{1\,237\,732\,650} M^0_{10}$	$\dfrac{26\,792\,074}{616}\,\dfrac{M_{10}}{M^0_{10}} = 43493{,}6 \ldots \dfrac{M_{10}}{M^0_{10}}$

Les nombres de la dernière colonne de ce tableau augmentent rapidement et montrent que les formules de quadrature à noeuds intérieurs du type de Gauss sont préférables aux formules de quadrature qui proviennent de la formule d'interpolation de Stirling.

46. *Comparaison entre les bornes supérieures de la valeur absolue du reste des formules de quadrature que l'on obtient en appliquant les formules d'interpolation de Newton à gauche, de Bessel et de Stirling.*

Nous avons donné dans ce travail comme application des formules générales de quadrature à noeuds extérieurs, les formules de quadrature (90), (108) et (185) qu'on obtient ordinairement en appliquant les formules d'interpolation de Newton à gauche de Bessel et de Stirlng. En étudiant les restes de ces formules et en comparant les bornes supérieures des valeurs absolues de ces restes avec les bornes supérieures des vaieurs absolues des restes des formules de quadratures de Gauss correspondantes, nous arrivons aux conclusions suivantes.

Pour les formules (90), (108) et (185) les bornes supérieures des valeurs absolues des restes sont

$$\begin{aligned} &\rho_N(x_0 - (4x+3)h, \ldots, x_0 - h) = (2h)^{2n+3} J_{2n} M_{2n+2} \\ &\rho_B(x_{n+1}, \ldots, x'_{n+1}) = (2h)^{2n+3}\,|K_{n+1}|\,M_{2n+2} \\ &\rho_S(x_{-n}, \ldots, x_n) = (2h)^{2n+3}\,|L_{n+1}|\,M_{2n+2}. \end{aligned} \tag{189}$$

D'autre part la valeur absolue du reste de la formule de Gauss correspondante est

$$\rho_G(a, b) = \frac{(n\,!)^4}{[(2n)\,!]^3\,(2n+1)}\,(2h)^{2n+1} M^0_{2n}.$$

Avec ces formules nous pouvons faire un tableau de comparaison des valeurs de $\dfrac{\rho_N}{\rho_G}$, $\dfrac{\rho_B}{\rho_G}$, $\dfrac{\rho_S}{\rho_G}$ pour $n = 1, 2, 3, 4$. Nous aurons

(190)

n	$\dfrac{\rho_N}{\rho_G}$	$\dfrac{\rho_B}{\rho_G}$	$\dfrac{\rho_S}{\rho_G}$
1	$1\,506\,\dfrac{M_4}{M^0_4}$	$66\,\dfrac{M_4}{M^0_4}$	$1{,}5\,\dfrac{M_4}{M^0_4}$
2	$636\,233{,}3\,\dfrac{M_6}{M^0_6}$	$6\,366{,}6\,\dfrac{M_6}{M^0_6}$	$20{,}8\,\dfrac{M_6}{M^0_6}$
3	$524\,308\,330\,\dfrac{M_8}{M^0_8}$	$1\,223\,530\,\dfrac{M_8}{M^0_8}$	$704{,}375\,\dfrac{M_8}{M^0_8}$
4	$710\,246\,014\,380\,\dfrac{M_{10}}{M^0_{10}}$	$391\,528\,613{,}7\,\dfrac{M_{10}}{M^0_{10}}$	$43\,493{,}6\,\dfrac{M_{10}}{M^0_{10}}$

Les nombres de la dernière colonne étant plus petits que ceux de la première et de la seconde colonne, nous déduisons que la formule de quadrature (185) est préférable aux formules de quadrature (90) et (108).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ionescu D. V., *Cuadraturi numerice*. Ed. tehnică, București 1957. Cap. I, § 8; Cap. II, § 5; Cap. I, § 6.

[2] — ibid p. 49.

[3] — ibid p. 136.

[4] Микеладзе Ш. Е., *Численные методы математического анализа*. Москва 1953, 328.

[5] Christoffel E. B., *Über die Gaussische Quadratur und eine Veralgemeinerung derselben*. Journ. f reine u. angew. Math., 55, 61–82 (1858).

[6] Popoviciu T., *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*. Studii și cercetări științifice, Iași, 6, 29–57 (1955).

[7] Stancu D. D., *Generalizarea formulei de cuadratură a lui Gauss-Cristoffel*. Studii și cercetări științifice, Iași, 8, 1–18 (1957).

[8] — *O metodă pentru construirea de formule de cuadratură de grad înalt de exactitate*. Comunicările Acad. R. P. R., 8, 349–358 (1958).

Reçu le 26. II. 1960.

MATHEMATICA VOL. 2 (25), 1, 1960, pp. 143–147

SUR L'INTERPOLATION GÉNÉRALISÉE

par

ELENA MOLDOVAN

à Cluj

1. Le but de ce travail est la définition d'un procédé d'interpolation dans un espace abstrait et l'extension des propriétés qui sont connues pour l'interpolation avec des polynomes, à ce cas général.

Considérons un espace linéaire normé*) V et un sous-espace S de V. Soit U un opérateur linéaire**), dont V est le domain de définition et il en est aussi le domain des valeurs.

Définition 1. *S s'appelle un sous-espace d'interpolation par rapport à l'opérateur U si les conditions suivantes ont lieu :*

$$1^\circ \text{ pour chaque } v \in V, \text{ on a } U[v] \in S$$

$$2^\circ \text{ si l'on a } v \in S, \text{ alors } U[v] = v.$$

Soi $\mathcal{U}$ un ensemble d'opérateurs linéaires, qui sont définis sur V et ont leurs valeurs dans V.

Définition 2. *S s'appelle un sous-espace d'interpolation par rapport à l'ensemble $\mathcal{U}$, si les conditions 1°–2° de la définition 1 ont lieu pour chaque élément $U \in \mathcal{U}$.*

Il y a un grand nombre de procédés d'interpolation qui sont compris dans la définition 2. Pour en donner des exemples il suffit de considérer l'espace C des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ et son sous-espace L_n engendré par le système $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, linéaire indépendent sur $[a, b]$. Il existe donc au moins n points distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans l'intervalle $[a, b]$, ainsi que le déterminant

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

*) On emploi pour la norme d'un élément $v \in V$, la notation $\|v\|$.

**) additive et homogène