

- [6] Popoviciu T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*. *Mathematica, Cluj*, 10, 49–54 (1935).
- [7] — *Asupra formei restului în unele formule de aproximare ale analizei*. *Lucrările sesiunii generale științifice a Acad. R.P.R. din 2–12 iunie 1950*.
- [8] — *Folytonos függvények középértéktételeiről*. *Magyar Tud. Akad. III (Mat. és Fiz.) osztályának közleményeiből*, IV, no. 3, 353–356 (1954).
- [9] — *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*. *Mathematica*, 1 (24), fasc. 1, 95–142 (1959).
- [10] Voronovskaya E., *Détermination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les polynômes de M. Bernstein*. *C.R. Acad. Sci. U.R.S.S.*, 1932, 79–85.
- [11] Warga J., *On a Class of Iterative Procedures for solving Normal Systems of Ordinary Differential Equations*. *Journ. of Math. and Physics*, XXXI, no. 4, 223–243 (1953).
- Поступило 5.I.1960.

ELEMENTARE GEOMETRIE DER GERADENBÜSCHEL DER LOBATSCHESKI-BOLYAI'SCHEN EBENE. ERWEITERUNG DER LOBATSCHESKI-BOLYAI'SCHEN EBENE

von

EUGEN GERGELY

Cluj

Die Arbeit behandelt eine Erweiterung der Lobatschewski-Bolyai'schen Ebene, die $L-B$ -Ebene*) wird in einer projektiven Ebene eingebettet. Die Erweiterung erfolgt mit Hilfe der Geradenbüschel der $L-B$ Ebene und sie ergibt somit gleichzeitig auch die Elementargeometrie dieser Geradenbüschel.

Die Arbeiten, welche ähnliche Probleme behandeln, gehen in Allgemeinen aus den Ebenen-Darstellungen der $L-B$ Ebene aus, und so kümmern sie sich nicht viel um die Einbettungsebene, weil sie die Eigenschaften derselben bekannt voraussetzen und die Lehrsätze der $L-B$ Geometrie vorführen.

Eine Abhandlung von Hjelmslev beschäftigt sich mit der Frage der Erweiterung der Ebene, diese Erweiterung wird aber nicht mit Hilfe der Geradenbüschel durchgeführt.

Vorliegende Arbeit geht von der $L-B$ Ebene aus und indem sie elementaren Eigenschaften derselben benützt, zeigt sie, dass die Ebene sich in eine, mit der projektiven Ebene isomorphen Varietät einbetten lässt.

Bekanntlich kann man in der $L-B$ Ebene drei Arten von Geradenbüschel unterscheiden:

- a) die Gesamtheit der Geraden, welche durch einen im Endlichen befindlichen Punkt der Ebene gehen;
- b) die Gesamtheit der zueinander asymptotischen Geraden;
- c) die Gesamtheit der auf einer gegebenen Geraden senkrechten Geraden.

*) Die Lobatschewski-Bolyai'sche Ebene wird in vorliegender Arbeit mit $L-B$ bezeichnet.

Im Weiteren behandeln wir diejenige Varietät, welche die Geradenbündel der L - B Ebene zu Elementen hat und nennen diese Varietät die erweiterte L - B Ebene.

Wir ordnen zur Geradenbündel unter a) den tragenden Punkt zu und nennen denselben den reellen Punkt der Varietät.

Die Geradenbündel unter b) soll der asymptotische Punkt der Varietät heissen und die Geradenbündel unter c) der ideelle Punkt derselben.

Dieser Gedanke, welcher hier als Grundlage der Erweiterung dient, ist nicht neu in der Mathematik.

Betrachten wir die parallelen Geradenbündel der Euklidischen Geometrie als „Punkte einer erweiterten Varietät“, so erhalten wir die Ebene, erweitert durch die uneigentlichen, im Unendlichen liegenden Punkte. Allgemein kann man in einem geometrischen Raum irgendwelche Figuren als neue Elemente-Punkte einführen und die Eigenschaften der so erhaltenen Varietät untersuchen.

Natürlich werden wir die Relationen der neuen Elemente untereinander und die Relationen zwischen den neuen und alten Elementen so definieren müssen, dass die Eigenschaften der neuen Elemente, welche im Ausgangsraum bekannt sind, auch im Erweiterungsraum erhalten bleiben. Man kann dieselbe Erweiterung auf mehrere Arten durchführen, indem man Elementenmengen verwendet, welche zueinander in ein-eindeutiger Beziehung stehen. So erhalten wir zum Beispiel die Erweiterung, welche in vorliegender Arbeit durchgeführt wird, wenn wir als Elemente der Erweiterungsmenge die reellen Punkte der L - B Ebene, die zu gemeinsamen Achsen gehörigen Mengen der L -Linien und die Mengen der zu den Geraden der reellen Ebene gehörigen äquidistanten Linien nehmen und zwar so, dass die L -Linien, welche zur selben Achse gehören, als einziges Element betrachtet werden, ebenso die äquidistanten Linien, welche zur selben Geraden gehören.

Wir könnten auch daran denken, die L - B Ebene nur durch die asymptotischen Geradenbündel zu erweitern. Die so erhaltene Varietät besitzt auf Grund der Eigenschaften der L - B Ebene ein abschliessendes Element, welches von zweiter Ordnung ist in dem Sinne, dass zu einer jeden Geraden der Ebene zwei solche Elemente gehören. Diese Erweiterung ist aber weniger umfassend und spiegelt nicht die Eigenschaften der L - B Ebene, welche mit den superparallelen Geraden zusammenhängen. Die in dieser Arbeit durchgeführte Erweiterung bettet die L - B Ebene in eine umfassendere Varietät und es wird im Folgenden gezeigt, dass diese Varietät auf Grund entsprechender Definitionen, das Axiomensystem der projektiven Ebene befriedigt.

Die Zusammenhangsaxiome der erweiterten L - B Ebene

I. Ein Punkt der erweiterten L - B Ebene gehört zu einer reellen Geraden der Ebene, wenn die Gerade zu einem Geradenbündel gehört, welcher den Punkt vertritt.

II. Wir nennen Null-Gerade eines ideellen Punktes diejenige Gerade, welche senkrecht ist auf jedes Element des Geradenbündels, der den ideellen Punkt vertritt.

III. Wir nennen eigentliche ideelle Gerade die Gesamtheit derjenigen ideellen Punkte, deren Null-Geraden einen gemeinsamen Punkt besitzen.

IV. Asymptotische ideelle Gerade soll heissen die Gesamtheit derjenigen ideellen Punkte, deren Null-Geraden Elemente eines asymptotischen Geradenbündels sind. Auch den durch diesen Geradenbündel bestimmten Punkt betrachten wir als Element der asymptotischen ideellen Geraden.

SATZ 1. Jede reelle Gerade enthält zwei asymptotische Punkte und unendlich viele ideelle Punkte. Die reelle Gerade besitzt also einfach unendlich viele Punkte in der erweiterten Ebene.

Beweis. In der L - B Ebene kann man zur reellen Geraden durch jeden reellen Punkt, welcher nicht auf der Geraden liegt, zwei asymptotische Geraden ziehen. Zieht man durch sämtliche Punkte der nicht erweiterten Ebene solche asymptotische Geraden, so erhält man zwei asymptotische Geradenbündel und so gehört die gegebene Gerade zu zwei asymptotischen Geradenbündeln, mithin zu zwei asymptotischen Punkten, sie enthält also zwei asymptotische Punkte der erweiterten Ebene.

Auf die gegebene reelle Gerade kann man in der nicht erweiterten Ebene einfach unendlich viele Senkrechten ziehen. Eine jede solche Senkrechte ist eine, je einen ideellen Punkt vertretende Null-Gerade.

(Abb. 1) Die verschiedenen, auf die Gerade a senkrechten Geraden sind die Null-Geraden verschiedener ideellen Punkte. Die auf m_1 senkrechten Geraden sind — mit Ausnahme von a — auf keine einzige Gerade senkrecht, welche auf a senkrecht ist.

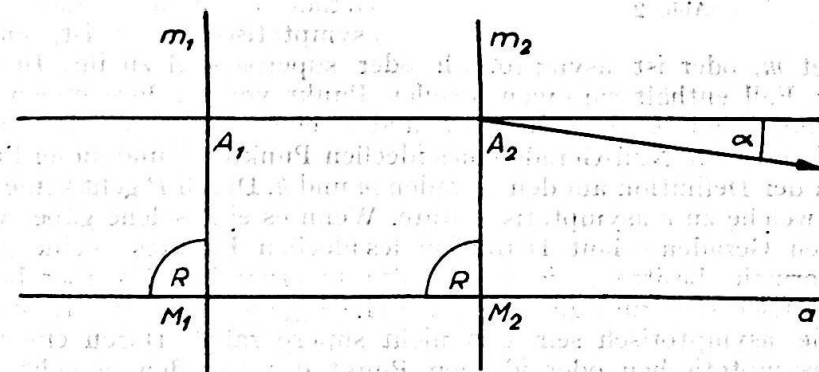


Abb. 1

Wenn sie nämlich auf eine solche m_2 Gerade senkrecht wären, dann wäre die Winkelsumme des Vierecks $A_1M_1M_2A_2$ gleich 2π , es wäre also die Euklidische Geometrie gültig. Die durch den Punkt A_2 durchgehende Gerade, welche auf m_1 senkrecht ist, ist verschieden von der Geraden, welche im Punkt A_2 auf m_2 senkrecht ist. Die beiden Geraden schliessen einen bestimmten Winkel miteinander ein, somit ist der zur m_1 Null-Geraden

den gehörige ideale Punkt verschieden vom zur m_2 Null-Geraden gehörigen ideellen Punkt.

m_1 und m_2 sind Superparallele der L - B Ebene, ihre einzige gemeinsame Normale ist die a Gerade, somit gehört zu derselben jeder ideelle Punkt, dessen vertretende Gerade auf a senkrecht ist. Umgekehrt gehören zu dieser Geraden laut Definition nur diejenigen ideellen Punkte, deren Null-Gerade auf sie senkrecht sind.

SATZ 2. Jede eigentliche ideelle Gerade und jede asymptotische ideelle Gerade enthält einfach unendlich viele ideelle Punkte.

Die Null-Geraden der Punkte einer eigentlichen ideellen Geraden bilden eine einfach unendlich viele Menge und da zu den verschiedenen Null-Geraden verschiedene ideelle Punkte gehören, ist der erste Teil des Satzes wahr.

Die Wahrheit des zweiten Teiles beweist die Tatsache, dass zu einem asymptotischen Geradenbüschel einfach unendlich viele Geraden gehören und zweien solchen verschiedenen Geraden, wenn man sie als Null-Gerade auffasst, verschiedene ideelle Punkte entsprechen.

(Abb. 2) Auf eine Gerade e des asymptotischen Geradenbüschels stellen wir eine senkrechte Gerade m . Jede Gerade, welche asymptotisch zu e ist, entweder

schneidet m , oder ist asymptotisch oder superparallel zu ihr. In diesem letzteren Fall enthält sie einen ideellen Punkt von m . Bezeichnen wir die Superparallele mit h , dann haben h und m eine einzige gemeinsame Normale. Diese ist die Null-Gerade eines ideellen Punktes P und dieser Punkt P liegt laut der Definition auf den Geraden m und h . Durch P geht keine andere Gerade, welche zu e asymptotisch wäre. Wenn es eine solche gäbe, würden die beiden Geraden — laut Definition des ideellen Punktes — eine gemeinsame Normale besitzen, sie wären also superparallel. Da aber beide zu e asymptotisch sind und die asymptotische Eigenschaft transitiv ist, müssten beide asymptotisch sein und nicht superparallel. Durch einen jeden reellen asymptotischen oder ideellen Punkt der Geraden m geht also je eine einzige, zu e asymptotische Gerade und da jede m in der erweiterten Ebene einfach unendlich viele Punkte besitzt, enthält die Menge der zu e asymptotischen Geraden einfach unendlich viele Elemente. Damit haben wir den zweiten Satz vollständig bewiesen.

SATZ 3. (Hilfsatz bezüglich der reellen Ebene).

Seien m und m_1 superparallele Geraden. Ihre gemeinsame Normale sei a . Unter den auf m senkrechten Geraden sind zwei asymptotisch zu m_1 , einfach unendlich viele schneiden m_1 und einfach unendlich sind superparallel zu m_1 .

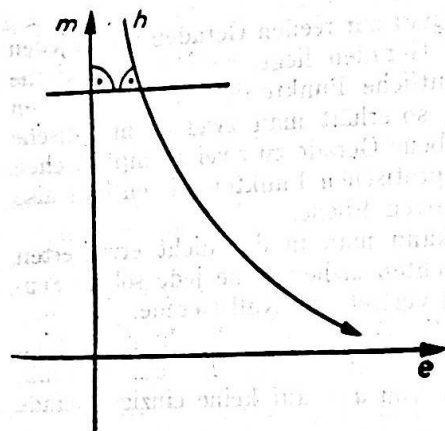


Abb. 2

(Abb. 3) Von jedem Punkt P der Geraden m_1 aus kann man eine und nur eine Senkrechte auf m ziehen. Ihren Fusspunkt nennen wir P' . Entfernt sich P' von e ins Unendliche, so hält P' , wie bekannt, gegen eine Grenzlage A und die in A auf m senkrechte Gerade a ist asymptotisch zu m_1 . Auf der anderen Seite von e gibt es einen Punkt B symmetrisch zu A . Die in diesem Punkt auf m senkrechte Gerade b ist ebenfalls asymptotisch zu m_1 , und zwar in entgegengesetzter Richtung zu a . Die auf m senkrechten Geraden, welche dieselbe ausserhalb des Abschnittes AB schneiden, sind superparallel zu m_1 und gehen somit durch je einen ideellen Punkt derselben.

SATZ 4. Zu einem jeden Punkt-paar der erweiterten L - B Ebene gehört eine Gerade dieser Ebene.

Folgende Fälle sind möglich:

- 1) beide Punkte sind reell,
- 2) ein reeller und ein asymptotischer Punkt,
- 3) ein reeller und ein ideeller Punkt,
- 4) zwei asymptotische Punkte,
- 5) ein asymptotischer und ein ideeller Punkt,
- 6) zwei ideelle Punkte.

Im 1) Fall ist der Satz wahr aufgrund der Verknüpfungsaxiome der nicht erweiterten L - B Ebene.

Im 2) Fall nehmen wir eine Gerade a des asymptotischen Geradenbüschels. Durch einen reellen Punkt der L - B Ebene geht eine einzige Gerade b des asymptotischen Geradenbüschels, welche zu a asymptotisch ist. Das ist die Gerade, welche die beiden Punkte, den reellen und den asymptotischen, enthält; sie ist eindeutig bestimmt und unabhängig von der Wahl von a im asymptotischen Geradenbüschel.

Wenn wir nämlich anstatt a von einer anderen Geraden c des Geradenbüschels ausgehen, $c \parallel a$, $a \parallel b$, infolgedessen $c \parallel b$, also ist die Gerade b durch den Punkt P auch zu c asymptotisch.

3) Fall (Abb. 4) Sei die Gerade a die Null-Gerade des ideellen Punktes, P der reelle Punkt. Von P aus kann man auf a eine und nur eine senkrechte Gerade ziehen. Diese Gerade geht aufgrund der Definition des ideellen Punktes durch den gegebenen ideellen Punkt und ist eindeutig bestimmt.

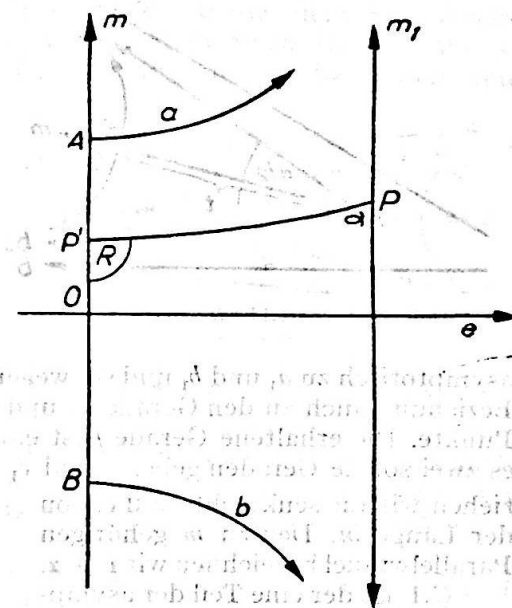


Abb. 3

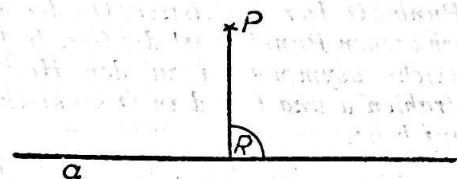


Abb. 4

4) Fall. Seien a bzw. b je eine Gerade der Geradenbüschel, welche die gegebenen asymptotischen Punkte A und B vertreten. a und b sind nicht asymptotisch zueinander, weil sie in diesem Fall zum selben asymptotischen Geradenbüschel gehören würden. Durch einen Punkt P der Ebene (Abb. 5) ziehen wir die zu den Geraden a bzw. b asymptotischen Geraden a_1 bzw. b_1 . Diese können nicht identisch sein, da a und b nicht asymptotisch sind und so schliessen a_1 und b_1 einen gewissen Winkel α ein, $\alpha < \pi$. Die Winkelhalbierende von a_1 und b_1 bezeichnen wir mit m , der Winkel zwischen a_1 und m ist $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$.

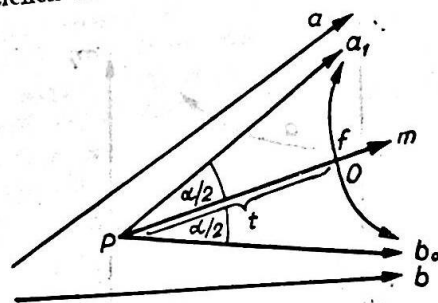


Abb. 5

Bezeichnen wir die Parallelwinkel – Entfernung mit t . Wir tragen nun t auf m von P aus bis O . Die im Punkt O auf m senkrechte Gerade f ist aufgrund der Konstruktion asymptotisch zu a_1 und b_1 und so, wegen der Transitivität der asymptotischen Beziehung auch zu den Geraden a und b , sie enthält also beide asymptotischen Punkte. Die erhaltene Gerade f ist eindeutig bestimmt. Nehmen wir an, dass es zwei solche Geraden gebe, c und c_1 (Abb. 6); vom Punkt Q der Geraden c_1 ziehen wir die Senkrechte auf c , von der Länge m . Den zu m gehörigen Parallelwinkel bezeichnen wir mit α .

QA ist der eine Teil der asymptotischen Geraden c_1 , ebenso QB ihr anderer Teil, $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $2\alpha < \pi$, QA

und QB können somit nicht dieselbe Gerade bilden. Unsere vorige Konstruktion ist also unabhängig von der Wahl von a , b und P .

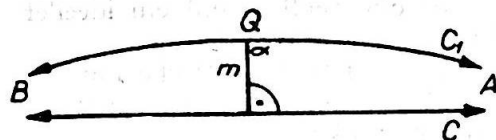


Abb. 6

SATZ 5. Ziehen wir durch einen beliebigen Punkt P der nicht erweiterten Ebene zu zwei Halbstrahlen a und b die asymptotischen Geraden c und d , und halbieren den Winkel α zwischen den Halbstrahlen c und d (Winkelhalbierende k). Bestimmen wir die Entfernung m aufgrund der Beziehung

$$\Pi(m) = \frac{\alpha}{2}. \text{ Diese Entfernung tragen wir auf } k \text{ von } P \text{ ausgehend bis zum Punkte } O. \text{ Der geometrische Ort der so erhaltenen Punkte } O \text{ ist die Gerade } f, \text{ welche asymptotisch zu den Halbstrahlen } a \text{ und } b \text{ und in } O \text{ senkrecht auf } k \text{ ist.}$$

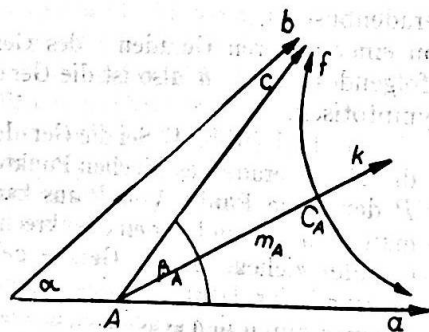


Abb. 7

Folgerung. 1: (Abb. 7) a und b sind zwei sich schneidende Halb-

strahlen, die den Winkel $\alpha < \pi$ miteinander bilden. A ist ein beliebiger Punkt von a und c ist die zu b asymptotische Gerade, welche durch A geht. Der Winkel β_A zwischen a und c ist kleiner als π , ihre Winkelhalbierende schliesst also mit beiden einen spitzen Winkel ein, $\Pi(m_A) = \frac{\beta_A}{2}$. Die Länge

m_A tragen wir auf k vom Punkte A aus, ihr Endpunkt sei C_A . Da die erhaltene geometrische Figur einen Spezialfall der Figur aus dem Satz 5 darstellt, – der beliebige Punkt befindet sich auf dem einen Halbstrahl – so folgt hieraus dass der geometrische Ort der Punkte C_A die gemeinsame asymptotische Gerade der Halbstrahlen a und b ist und sie ist senkrecht auf k in C_A .

Folgerung 2. (Abb. 8). Es sei c die gemeinsame asymptotische Gerade der Halbstrahlen a und b . Aus einem beliebigen Punkte C der Geraden c ziehen wir die Senkrechte d auf c . Die aus einem beliebigen Punkte der Geraden d gezogenen Asymptoten a_0 bzw. b_0 zu a bzw. b , schliessen mit d die gleichen Winkel ein.

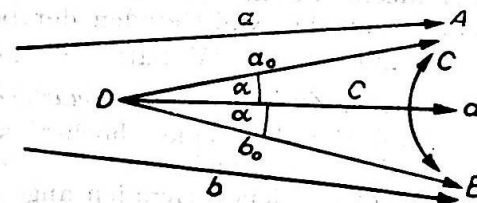


Abb. 8

Folgerung 3. Die Geraden eines asymptotischen Geradenbüschels enthalten, laut Definition, in der einen Richtung denselben asymptotischen Punkt, in der anderen Richtung hingegen durchlaufen sie alle asymptotischen Punkte.

In der Tat, wenn der Geradenbüschel den asymptotischen Punkt A bestimmt, ein anderer beliebiger asymptotischer Punkt sei B , dann gibt es eine einzige Gerade, welche sowohl A als auch B enthält und diese gehört, da sie A enthält, zum Geradenbüschel, welcher den Punkt A bestimmt.

5) Fall. Der eine Strahl des asymptotischen Geradenbüschels sei a , die Null-Gerade des ideellen Punktes sei b . Wir unterscheiden drei Unterfälle:

5₁) a und b sind asymptotisch;

5₂) a und b schneiden sich,

5₃) a und b sind superparallel.

Im Falle 5₁) befindet sich, laut Definition, der ideelle Punkt auf der asymptotischen ideellen Geraden, welche durch den asymptotischen Geradenbüschel bestimmt ist. Diese Gerade enthält auch den asymptotischen Punkt, sie ist somit die einzige Gerade, welche beide Punkte enthält.

Im Falle 5₂) ziehen wir von den Punkten der Geraden a Senkrechten auf die Gerade b . Die Fusspunkte auf der Geraden b konvergieren gegen einen Grenzpunkt, wenn der betreffende Punkt auf a sich ins Unendliche entfernt. Die durch den Grenzpunkt gehende Senkrechte ist die einzige Gerade, welche den ideellen Punkt und den asymptotischen Punkt enthält.

Im Falle 5₃) ist derselbe Gedankengang gültig.

6). Fall 6₁). Die Null-Geraden der gegebenen ideellen Punkte sind superparallel.

Die beiden Null-Geraden besitzen eine gemeinsame Normale und diese enthält, im Sinne der Definition, die beiden ideellen Punkte. Es gibt nur eine solche Gerade, weil die Gerade, welche die ideellen Punkte enthält, auf beide Null-Geraden senkrecht sein muss.

6.) Die Null-Geraden sind asymptotisch. Dann gehören diese Null-Geraden zu einem asymptotischen Geradenbüschel. Laut IV. Definition ist die zum Büschel gehörige eigentliche ideelle Gerade die beiden gegebenen Punkte enthaltende einzige Gerade.

Bemerkung. Es folgt aus den Vorhergehenden, dass eine Gerade, die zwei ideelle Punkte verbindet, dann und nur dann reelle Teile besitzen kann, wenn die Null-Geraden der beiden Punkte superparallel sind.

Damit ist der IV Satz vollständig bewiesen.

SATZ 6. Zu jedem Geradenpaar gehört ein und nur ein gemeinsamer Punkt.

Zwei Gerade können höchstens einen gemeinsamen Punkt besitzen. Wenn sie zwei gemeinsame Punkte hätten, würden die beiden Punkte zweien verschiedenen Geraden angehören, was gemäss IV. Satz unmöglich ist. Wir müssen also nur zeigen, dass zwei Gerade wenigstens einen gemeinsamen Punkt haben:

- a) zwei, sich in einem reellen Punkt scheidenden Geraden haben diesen Punkt gemeinsam;
- b) zu zwei reellen asymptotischen Geraden gehört der asymptotische Punkt des durch die Geraden bestimmten asymptotischen Geradenbüschels;
- c) reelle superparallele Geraden. Zwei solche Geraden besitzen eine und nur eine gemeinsame Normale. Zu dieser Normalen, als Null-Gerade aufgefasst, gehört ein ideeller Punkt, welcher der gemeinsame Punkt der beiden gegebenen Geraden ist;
- d) reelle und eigentlich ideelle Gerade. Zu den Null-Geraden der Punkte der eigentlich ideellen Geraden gehört ein einziger reeller Punkt P . Von diesem fallen wir die Senkrechte auf die gegebene reelle Gerade. Eine solche Senkrechte gibt es eine einzige auch dann, wenn der gemeinsame Punkt P auf der reellen Geraden liegt. Diese Senkrechte ist die Null-Gerade eines ideellen Punktes und derselbe liegt, laut Definition, auf beiden gegebenen Geraden;

- e) eine reelle und eine asymptotische ideelle Gerade;

e_1) einer der asymptotischen Punkte der reellen Geraden sei identisch mit dem asymptotischen Punkt der asymptotischen ideellen Geraden; dieser Punkt ist also gemeinsam für beide Geraden.

e_2) die reelle Gerade gehöre nicht zum Geradenbüschel des asymptotischen Punktes.

(Abb. 9) b sei die gegebene reelle Gerade; a eine solche Ge-

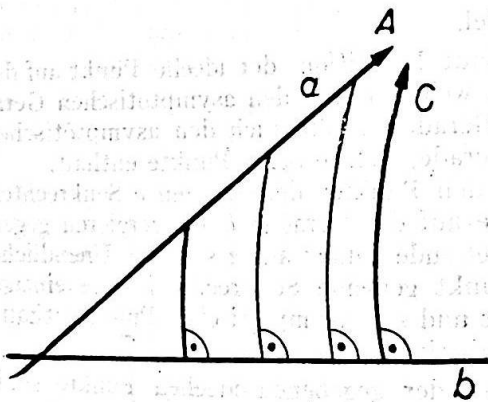


Abb. 9

rade des zum asymptotischen Punkt A gehörenden Geradenbüschels, welche b schneidet. Eine solche gibt es immer, es gibt ja immer eine Gerade, welche irgendeinen Punkt von b und A enthält. Die von den Punkten der Geraden a auf b gezogenen Senkrechten besitzen in der Richtung von A eine Grenzlage, eine auf b senkrechte Gerade, die A enthält. Der ideelle Punkt, welcher zu c , als Null-Gerade aufgefasst, gehört, liegt auf beiden gegebenen Geraden.

Folgerung. Unter den Geraden eines gegebenen Geradenbüschels gibt es eine und nur eine, die auf einer gegebenen Geraden senkrecht ist. Mit anderen Worten: auf eine gegebene reelle Gerade kann man von einem asymptotischen Punkt eine und nur eine Senkrechte ziehen.

Diese Folgerung stellt nur einen anderen Ausdruck für die Tatsache dar, dass eine reelle und eine asymptotische ideelle Gerade nur einen gemeinsamen Punkt besitzen.

f) Zwei asymptotische ideelle Geraden.

Zu beiden Geraden gehört je ein asymptotischer Punkt, wir nennen sie A und B . Die reelle Gerade, welche die Punkte A und B verbindet, ist die Null-Gerade eines ideellen Punktes. Dieser liegt im Sinne der Definitionen, auf beiden asymptotischen ideellen Geraden.

g) Zwei eigentlich ideelle Geraden.

Beide Geraden enthalten je einen reellen Punkt, nämlich den tragenden Punkt der Null-Geraden, die zu den Punkten der gegebenen Geraden gehören. Fasst man die die zwei reelle Punkte verbindende reelle Gerade als Null-Gerade auf, so ist der zu dieser gehörende ideelle Punkt ein gemeinsamer Punkt der gegebenen Geraden.

h) Eine asymptotische ideelle und eine eigentlich ideelle Gerade.

Die asymptotische ideelle Gerade enthält einen asymptotischen Punkt A und die Null-Geraden der Punkte der eigentlich ideellen Geraden haben einen reellen Punkt C gemeinsam. Fasst man die die Punkte C und A verbindende Gerade als Null-Gerade auf, so gehört zu derselben ein ideeller Punkt, die im Sinne der Definitionen auf beiden gegebenen Geraden liegt.

Es gilt mithin der

SATZ 7. Die Menge der Geradenbüschel der L - B Ebene, d. h. die Punkte und Geraden der erweiterten L - B Ebene genügen den Verknüpfungsaxiomen der projektiven Ebene.

Anordnungsfragen

Die erweiterte L - B Ebene besitzt projektiven Zusammenhang, und so können wir in dieser Ebene im allgemeinen Sinne nicht von der Grundrelation „zwischen“ reden, sondern nur von der Punktepaar-Trennung der projektiven Ebene.

SATZ 8. In der erweiterten L - B Ebene kann man zu drei verschiedenen, in einer Geraden liegenden Punkten immer bzw. auf unendlich vieler Weise — einen vierten Punkt derselben Geraden angeben, welcher zusammen mit einem der gegebenen Punkte, das andere Punktepaar in der Weise trennt (in Sinne der noch anzugebenden Definition) dass die erhaltene Punktepaar-Trennung die Trennungsaxiome der projektiven Ebene befriedigt.

Bemerkung. Im reellen Teil der erweiterten $L-B$ Ebene ist die „zwischen“ Relation bekanntlich gültig und so gilt auch die Trennungsrelation aufgrund der zwischen den beiden Punkten und ausserhalb der beiden Punkte liegenden Punkten.

Die Definition der Trennungsrelation.

T_1 . Die gegenseitige Lage der Punkte einer reellen Geraden der projektiven Ebene kann man auf üblicher Weise durch die gegenseitige Lage der Punkte eines Kreises darstellen.

In unserem Falle nehmen wir auf dem Kreis zwei beliebige Punkte. Diese mögen die asymptotische Punkte der Geraden darstellen. Die Punkte des durch dieselben bestimmten einen Kreisbogens seien die Vertreter der reellen Punkte, die Punkte des anderen Kreisbogens diejenige der ideellen Punkte. Die so erhaltene Trennungsrelation diene zur Definition der Punktepaar-Trennung der erweiterten $L-B$ Ebene auf dem, die reellen Punkte enthaltenden Geraden-Abschnitt. Zur Trennung der ideellen Punkte vierer der Geraden verwenden wir die Trennungsrelationen der Null-Geraden.

Die „zwischen“ Relation können wir auch für die ideellen Punkte der reellen Geraden definieren. Seien I_1, I_2, I_3 , die ideellen Punkte, i_1, i_2, i_3 die zu ihnen gehörigen Null-Geraden. Wir sagen, dass I_2 zwischen I_1 und I_3 liegt, wenn i_2 zwischen i_1 und i_3 liegt im Sinne der „zwischen“ Relation der reellen $L-B$ Ebene.

T_2 . Eigentliche ideelle Gerade.

Zwei Punktepaare der Geraden trennen sich gegenseitig, wenn die den Punkten entsprechenden Null-Geraden — welche einen gemeinsamen reellen Punkt haben — sich gegenseitig paarweise trennen.

T_3 . Asymptotische ideelle Geraden.

Zwei ideelle Punktepaare trennen sich gegenseitig, wenn die entsprechenden Null-Geraden sich im Sinne der Geometrie der reellen $L-B$ Ebene gegenseitig paarweise trennen.

Unter der gegebenen vier Punkten sei der eine der asymptotische Punkt A . Seien a_1 und a_3 die Null-Geraden zweier ideellen Punkte der Geraden. Nehmen wir „zwischen“ a_1 und a_3 eine beliebige zu den beiden asymptotischen Gerade. Fassen wir diese als Null-Gerade eines ideellen Punktes auf, so trennt dieser die a_1 und a_3 entsprechenden ideellen Punkte vom asymptotischen Punkt A .

Wie leicht ersichtlich, erfüllt der so definierte Trennungsbegriff die Trennungsaxiomen der projektiven Ebene.

Wir wollen uns, weil komplizierter, mit dem Projektionsaxiom besonders beschäftigen. Seien die Punkte A, B und C, D zwei Punktepaare einer Geraden und A', B', C', D' die entsprechenden Punkte, wenn man sie von einem gegebenen Punkte aus auf eine andere Geraden projiziert. Wenn die Punktepaare A, B und C, D sich gegenseitig trennen, so trennen sich auch die Punktepaare A', B', C', D' .

In der erweiterten $L-B$ Ebene geht durch zwei Punkte eine und nur eine Gerade und zwei Geraden schneiden sich immer. Wir erhalten also immer vier verschiedene Projektionspunkte. Da die Trennungsdefinitionen

aufgrund der Trennungsrelationen der reellen Teile der Ebene gegeben wurden und die Projektion im reellen Teil die Trennung bezüglich Punkte-reihen wie auch der Geradenbüschel aufrecht erhält, so bleibt diese Trennungsrelation auch in der erweiterten Ebene gültig.

Im Falle der Projektierung ideeller Punkte benötigen wir eine Ausdehnung der Definition für auf reellen Geraden gezogene Senkrechten. Zieht man von einem reellen Punkt aus die Senkrechte auf eine gegebene Gerade so geht jene durch den ideellen Punkt, welcher durch die gegebene Gerade, als Null-Gerade aufgefasst, definiert wird. Die Verallgemeinerung dieses Vorgehens: wir verstehen unter einer Geraden, die von irgendeinem Punkt P der erweiterten Ebene aus auf eine gegebene Gerade senkrecht ist, diejenige Gerade welche den Punkt P mit demjenigen ideellen Punkt verbindet, welcher durch die gegebene Gerade als Null-Gerade bestimmt wird.

Im Sinne der gegebenen Definitionen sind also alle Sätze gültig in der erweiterten $L-B$ Ebene, die sich aus den Verknüpfungs und Trennungsaxiomen der projektiven Ebene ergeben. In unserer Ebene gilt also auch der Pasch'sche Satz bezüglich des projektiven Dreiecks (in der reellen Ebene: das Pasch'sche Axiom), welches bekanntlich in der projektiven Ebene für das projektive Dreieck auf Grund der Verknüpfungs und Trennungsaxiome beweisbar ist.

Auf den Geraden der erweiterten Ebene lässt sich die lineare Umgebung in bekannter Weise einführen und somit auch die Topologie der Geraden der erweiterten Ebene.

Die Erweiterung des Lobatschewski-Bolyai Raumes

Im Folgenden benötigen wir die Erweiterung des $L-B$ Raumes. Die betreffenden Fragen werden wir aber nur in dem Masse behandeln, in welchem diese für die Erweiterung der $L-B$ Ebene notwendig sind.

Auch im $L-B$ Raum untersuchen wir drei Arten von Geradenbündel und fassen diese als Punkte des erweiterten $L-B$ Raumes auf. Diese Geradenbündel sind:

- a) die Gesamtheit der durch einen reellen Punkt des Raumes gehenden Geraden, diese ist die den reellen Punkt vertretende Menge;
- b) die Gesamtheit der zu einer Geraden in gegebener Richtung asymptotischen Geraden. Diese definieren einen asymptotischen Punkt;
- c) die Gesamtheit der auf einer Ebene senkrechten Geraden. Diese definieren einen ideellen Punkt. Die Ebene heisst die Nullebene des ideellen Punktes.

Definitionen. Wir nennen eigentliche ideelle Ebene die Gesamtheit derjenigen ideellen Punkte, deren Nullebenen sämtlich durch einen reellen Punkt gehen. Asymptotische ideelle Ebene soll die Gesamtheit derjenigen ideellen Punkte heissen, deren Nullebenen sämtlich durch einen asymptotischen

Punkt gehen, das ist die Nullebenen enthalten wenigstens eine, den asymptotischen Punkt definierende Gerade. Zu den Punkten der Ebene rechnen wir den asymptotischen Punkt selber zu.

Eigentliche ideelle Gerade sind:

- a) die gemeinsame Punkte zweier eigentlichen ideellen Ebenen,
- b) die gemeinsame Punkte einer eigentlichen ideellen und einer asymptotischen ideellen Ebene,
- c) die gemeinsamen Punkte zweier asymptotischen ideellen Ebenen.

Asymptotische ideelle Gerade:

die gemeinsamen Punkte einer asymptotischen ideellen Ebene und einer Ebene, welche durch irgendeine Gerade des den asymptotischen Punkt vertretenden asymptotischen Geradenbüschels geht.

Im auf dieser Weise definierten erweiterten Raume sind die Verknüpfungssaxiomen des projektiven Raumes gültig. Der Beweis verläuft auf genau derselben Weise, wie im Falle der erweiterten Ebene. Jede solche Erweiterung des Raumes ist, für eine in ihm enthaltene Ebene mit reellen Punkten, mit der vorhin behandelten Erweiterung der L - B Ebene identisch. Dieses folgt aus der gleichen Art der Erweiterungsdefinitionen.

Die Stetigkeitseigenschaften der erweiterten L - B Ebene

Mit Hilfe des erweiterten L - B Raumes können wir in der erweiterten L - B Ebene die Gültigkeit der Desargues'schen Satzes zeigen, da der Beweis dieses Satzes die Verknüpfungseigenschaften des Raumes benötigt.

Hiernach ist in der erweiterten Ebene das vollständige Viereck definiert und ebenso auch der harmonische Punktvierer.

Nach diesen besitzt infolge der Trennungsaxiome und des projektiven Charakters der Geraden, das Dedekind'sche Stetigkeitsaxiom für den reellen Teil der Ebene einen wohldefinierten Sinn und Gültigkeit, ebenso die Dedekind'sche Stetigkeitseigenschaft für die erweiterte Ebene.

In dieser Weise kann man in der erweiterten Ebene genau so wie in der reellen L - B Ebene mit Hilfe der harmonischen Punkte die projektiven Koordinaten definieren zuerst auf den Geraden, und dann in der ganzen Ebene.

Zusammenfassung

Auf Grund der Vorhergehenden können wir folgenden Satz formulieren:

SATZ 9. Die Elemente der erweiterten L - B Ebene genügen sämtlichen Axiomen der projektiven Ebene, das heisst wir haben die L - B Ebene in die Menge der durch Geradenbüschel definierten Punkte eingebettet und diese Menge ist mit der projektiven Ebene isomorph.

Die Menge der asymptotischen Punkte hat eine ausgezeichnete Rolle in der erweiterten Ebene.

In vorliegender Arbeit sind wir also, auf Grund der Elementareigenschaften der L - B Ebene zu Ergebnissen gelangt, welche zum Beispiel die Kleinsche Behandlungsweise von der projektiven Ebene ausgehend realisiert.

LITERATUR

- [1] Klein F., *Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie*. Berlin, 1928.
- [2] Костин В. И., *Основания геометрий*. Moscov, 1948.
- [3] Efimov N. V., *Geometria superioară*. Editura tehnică, București, 1952.
- [4] Liebmann H., *Nichteuklidische Geometrie*. Berlin und Leipzig, 1912.

Eingegangen am 10. II. 1960.