

O TEOREMĂ ASUPRA SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE

de

D. V. IONESCU

Integrarea ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți conduce la o teoremă asupra sistemelor de ecuații liniare pe care o vom trata în această lucrare.

Pentru a se vedea aceasta să considerăm sistemul de ecuații diferențiale liniare, omogene și cu coeficienți constanți

$$y_1' = a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \dots + a_{1,n}y_n$$

$$y_2' = a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \dots + a_{2,n}y_n$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_n' = a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n$$

și să presupunem că ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - r & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - r & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0$$

are rădăcina $r_1 = 0$ multiplă de ordinul p , în acest caz se știe că sistemul de ecuații diferențiale, admite o soluție reprezentată prin ecuațiile

$$y_1 = \lambda_1^{(1)} x^{p-1} + \lambda_2^{(1)} x^{p-2} + \dots + \lambda_p^{(1)}$$

$$y_2 = \lambda_1^{(2)} x^{p-1} + \lambda_2^{(2)} x^{p-2} + \dots + \lambda_p^{(2)}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_n = \lambda_1^{(n)} x^{p-1} + \lambda_2^{(n)} x^{p-2} + \dots + \lambda_p^{(n)}$$

Unde coeficienții $\lambda_i^{(k)}$ sînt funcții liniare de p constante arbitrare.

Coeficienții $\lambda_i^{(k)}$ pot fi determinați prin identificare scriind că polinoamele $y_1, y_2, \dots, y_n$ verifică sistemul de ecuații diferențiale.

Va trebui să avem

$$\begin{aligned} (p-1)\lambda_1^{(k)}x^{p-2} + (p-2)\lambda_2^{(k)}x^{p-3} + \dots + \lambda_{p-1}^{(k)} = \\ = (a_{k,1}\lambda_1^{(1)} + a_{k,2}\lambda_1^{(2)} + \dots + a_{k,n}\lambda_1^{(n)})x^{p-1} \\ + (a_{k,1}\lambda_2^{(1)} + a_{k,2}\lambda_2^{(2)} + \dots + a_{k,n}\lambda_2^{(n)})x^{p-2} \\ + \dots \\ + (a_{k,1}\lambda_p^{(1)} + a_{k,2}\lambda_p^{(2)} + \dots + a_{k,n}\lambda_p^{(n)}) \end{aligned}$$

unde $k = 1, 2, \dots, n$.

Va rezulta că coeficienții $\lambda_1^{(j)}$ sînt dați de sistemul de ecuații liniare și omogene

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j}\lambda_1^{(j)} = 0$$

unde $k = 1, 2, \dots, n$.

Apoi coeficienții $\lambda_2^{(j)}$ sînt dați de sistemul de ecuații liniare neomogene

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j}\lambda_2^{(j)} = (p-1)\lambda_1^{(k)}$$

unde $k = 1, 2, \dots, n$.

În general coeficienții $\lambda_i^{(j)}$ sînt dați de sistemul de ecuații liniare neomogene

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j}\lambda_i^{(j)} = (p-i+1)\lambda_{i-1}^{(k)}$$

unde $k = 1, 2, \dots, n$.

Determinarea coeficienților $\lambda_i^{(k)}$ pune o problemă asupra sistemelor de ecuații liniare, pe care o prezentăm mai departe, independent de teoria ecuațiilor diferențiale liniare, care i-a dat naștere.

1. Să considerăm sistemul de ecuații liniare și omogene :

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n a_{k,j}x_j = 0$$

unde $k = 1, 2, \dots, n$ în care coeficienții $a_{k,j}$ și necunoscutele x_i sînt elemente dintr-un corp P . Vom presupune la început că rangul matricei

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

este $n-1$ și schimbînd la nevoie notațiile, putem presupune că determinantul

$$(3) \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

este diferit în zero.

În aceste condiții, sistemul (1) omogen avînd o soluție $x_1, x_2, \dots, x_n$ nebanală, să considerăm sistemul de ecuații liniare neomogene

$$(4) \quad \sum_{j=1}^n a_{k,j}y_j = x_k$$

unde $k = 1, 2, \dots, n$ și să demonstrăm.

TEOREMA 1. Condiția necesară și suficientă ca sistemul de ecuații liniare neomogene (4) să fie compatibil este ca suma

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n M_{i,i} = 0$$

unde în general s-a notat cu $M_{i,i}$ minorul elementului $a_{i,i}$ din determinantul sistemului omogen (1).

Într-adevăr λ fiind un element nenul din corpul P , soluția sistemului (1) se poate scrie sub forma

$$(6) \quad x_k = (-1)^{k-1} \lambda M_{n,k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

și condiția necesară și suficientă ca sistemul de ecuații liniare (4) neomogen, să fie compatibil este ca determinantul caracteristic

$$(7) \quad D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} & x_1 \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n-1} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & x_n \end{vmatrix}$$

să fie nul. Desvoltînd determinantul D după elementele ultimei coloane, și ținînd seamă de formulele (6), avem

$$D = (-1)^{n-1} \lambda [M_{n,1} M_{1,n} + M_{n,2} M_{2,n} + \dots + M_{n,n} M_{n,n}]$$

Să considerăm acum suma

$$(8) \quad M = (-1)^{n-1} \lambda [M_{1,1} + M_{2,2} + \dots + M_{n,n}]$$

și să formăm diferența $D - M\delta$, unde după-formula (3) determinantul δ este egal cu $M_{n,n}$. Vom avea

$$(9) \quad D - M\delta = (-1)^n \lambda \left\{ \begin{vmatrix} M_{1,1} & M_{1,n} \\ M_{n,1} & M_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{2,2} & M_{2,n} \\ M_{n,2} & M_{n,n} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} M_{n-1,n-1} & M_{n-1,n} \\ M_{n,n-1} & M_{n,n} \end{vmatrix} \right\}$$

Însă se știe [1] că

$$\begin{vmatrix} M_{i,k} & M_{j,k} \\ M_{i,l} & M_{j,l} \end{vmatrix} = dM'$$

unde d este determinantul sistemului (1), iar M' este determinantul care se obține din d suprimând liniile de ordin i, j și coloanele de ordin k, l . Deoarece $d = 0$, toți determinanții din membrul al doilea al formulei (9) sînt nuli și prin urmare

$$(10) \quad D = M\delta$$

Ținînd seamă că $\delta \neq 0$ condiția necesară și suficientă ca D să fie nul este ca suma M să fie nulă și cu aceasta teorema 1 este demonstrată.

2. Să găsim acum condițiile de compatibilitate ale sistemului de ecuații liniare (4), neomogen, presupunînd că rangul matricei (2) este $r < n - 1$.

Schimbînd la nevoie notațiile, putem presupune că determinantul principal al sistemului de ecuații liniare (1) este

$$(11) \quad \delta' = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} \end{vmatrix} \neq 0$$

În acest caz, luînd

$$(12) \quad x_{r+1} = \delta' \lambda_{r+1}, x_{r+2} = \delta' \lambda_{r+2}, \dots, x_n = \delta' \lambda_n$$

unde $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n$ sînt elemente oarecare din corpul p , soluția sistemului (1) este dată de formulele

$$(13) \quad x_i = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,r+1}\lambda_{r+1} + \dots + a_{1,n}\lambda_n & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,i-1} & a_{r,r+1}\lambda_{r+1} + \dots + a_{r,n}\lambda_n & a_{r,i+1} & \dots & a_{r,r} \end{vmatrix}$$

unde $i = 1, 2, \dots, r$, la care se adaugă formulele (12).

Formulele (13) se mai scriu sub forma

$$(14) \quad x_i = (-1)^{r-i+1} \sum_{t=r+1}^n B_{i,t} \lambda_t$$

unde

$$B_{i,t} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,r} & a_{1,t} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,i-1} & a_{r,i+1} & \dots & a_{r,r} & a_{r,t} \end{vmatrix}$$

iar $i = 1, 2, \dots, r$.

Așa fiind revenim la sistemul de ecuații liniare (4), neomogen în care $x_1, x_2, \dots, x_n$ sînt date da formulele (14) și (12). Să vedem cum trebuie alese necunoscutele $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n$ nu toate nule, astfel ca sistemul de ecuații liniare (4) să fie compatibil. Pentru aceasta să formăm determinanții caracteristici

$$D_s = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} & x_r \\ a_{s,1} & \dots & a_{s,r} & x_s \end{vmatrix}$$

unde $s = r + 1, \dots, n$.

Ținînd seama de formulele (14) și (12), putem scrie

$$D_s = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} & (-1)^r \sum_{t=r+1}^n B_{1,t} \lambda_t \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,r} & (-1)^{r-1} \sum_{t=r+1}^n B_{2,t} \lambda_t \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} & (-1) \sum_{t=r+1}^n B_{r,t} \lambda_t \\ a_{s,1} & \dots & a_{s,r} & \sum_{t=r+1}^n \delta'_{s,t} \lambda_t \end{vmatrix}$$

unde s-a notat

$$\delta_{s,t} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s = t \\ 0 & \text{dacă } s \neq t \end{cases}$$

Mai putem scrie

$$(15) \quad D_s = \sum_{t=r+1}^n \Delta_{s,t} \lambda_t,$$



unde

$$\Delta_{s,1} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} & (-1)^r B_{1,t} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,r} & (-1)^{r-1} B_{2,t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} & -B_{r,t} \\ a_{s,1} & \dots & a_{s,r} & \delta' \delta_{s,t} \end{vmatrix}$$

Să considerăm determinantul

$$(16) \quad A^{(s,t)} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} & a_{1,t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} & a_{r,t} \\ a_{s,1} & \dots & a_{s,r} & a_{s,t} \end{vmatrix}$$

care fiind de ordinul $n+1$ este nul și să notăm cu $M_{i,k}^{(s,t)}$ minorul corespunzător lui $a_{i,k}$ în determinantul $A^{(s,t)}$.

Să dezvoltăm determinantul $\Delta_{s,t}$ după elementele ultimei lui coloane. Cu notațiile introduse vom avea

$$\Delta_{s,t} = M_{s,1}^{(s,t)} M_{1,t}^{(s,t)} + M_{s,2}^{(s,t)} M_{2,t}^{(s,t)} + \dots + M_{s,r}^{(s,t)} M_{r,t}^{(s,t)} + \delta_{s,t} M_{s,t}^{(s,t)} M_{s,t}^{(s,t)}$$

Să considerăm și suma $M^{(s,t)}$, definită de

$$(17) \quad M^{(s,t)} = M_{1,1}^{(s,t)} + M_{2,2}^{(s,t)} + \dots + M_{r,r}^{(s,t)} + \delta_{s,t} M_{s,t}^{(s,t)}$$

și să observăm că avem identitatea

$$(18) \quad \delta' M^{(s,t)} - \Delta_{s,t} = \begin{vmatrix} M_{1,1}^{(s,t)} & M_{1,t}^{(s,t)} \\ M_{s,1}^{(s,t)} & M_{s,t}^{(s,t)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_{2,2}^{(s,t)} & M_{2,t}^{(s,t)} \\ M_{s,2}^{(s,t)} & M_{s,t}^{(s,t)} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} M_{r,r}^{(s,t)} & M_{r,t}^{(s,t)} \\ M_{s,r}^{(s,t)} & M_{s,t}^{(s,t)} \end{vmatrix}$$

Ținând seama de identitatea deja citită și de faptul că determinantul (16) este nul, toți determinanții din membrul al doilea al formulei (18) sînt nuli și prin urmare,

$$(19) \quad \Delta_{s,t} = \delta' M^{(s,t)}$$

astfel că determinantul caracteristic D_s este dat de formula (15) și putem scrie

$$(20) \quad D_s = \delta' \sum_{t=r+1}^n M^{(s,t)} \lambda_t$$

Condiția necesară și suficientă ca sistemul (4) să fie compatibil este ca toți determinanții caracteristici D_s să fie nuli, adică să avem

$$(21) \quad D_s = 0 \quad (s = r+1, r+2, \dots, n)$$

sau

$$(21') \quad \sum_{t=r+1}^n M^{(r+1,t)} \lambda_t = 0, \sum_{t=r+1}^n M^{(r+2,t)} \lambda_t = 0, \dots, \sum_{t=r+1}^n M^{(n,t)} \lambda_t = 0$$

Dacă determinantul acestui sistem

$$(22) \quad \Delta = \begin{vmatrix} M^{(r+1,r+1)} & M^{(r+1,r+2)} & \dots & M^{(r+1,n)} \\ M^{(r+2,r+1)} & M^{(r+2,r+2)} & \dots & M^{(r+2,n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M^{(n,r+1)} & M^{(n,r+2)} & \dots & M^{(n,n)} \end{vmatrix}$$

este diferit de zero, sistemul (21') are numai soluția banală $\lambda_{r+1} = 0, \dots, \lambda_n = 0$, care conduce la soluția banală a sistemului (1), $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$. Aceasta este însă imposibil căci în sistemul (4) s-a considerat o soluție $x_1, x_2, \dots, x_n$ nebanală a sistemului (1).

Dacă însă determinantul Δ este nul, atunci se pot alege elementele $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ nu toate nule care să verifice sistemul de ecuații (21'). Aceste elemente vor conduce prin formulele (14) și (12) la o soluție nebanală a sistemului (1), $x, x_2, \dots, x_n$, pentru care sistemul de ecuații (4) neomogen este compatibil. Avem prin urmare.

TEOREMA 2. Fie $M^{(s,t)}$ sumele, definite de formulele (17), în legătură cu determinanții (16), iar Δ determinantul (22). Atunci:

1°. dacă $\Delta \neq 0$ sistemul neomogen (4) este incompatibil cînd $x_1, x_2, \dots, x_n$ este o soluție nebanală a sistemului omogen (1).

2°. dacă $\Delta = 0$, se pot alege soluții $x_1, x_2, \dots, x_n$ ale sistemului omogen (1), nebanale astfel ca sistemul neomogen (4) să fie compatibil.

3. Să dăm o nouă formă teoremei 2. pentru aceasta vom da o nouă expresie determinantului Δ .

Rangul matricie (2) fiind r și determinantul (11) fiind diferit de zero, se pot determina elementele $\lambda_{s,t}$ din corpul P , unde $s = 1, 2, \dots, r$ și $t = r+1, \dots, n$ astfel ca să avem

$$(23) \quad a_{i,t} = \sum_{j=1}^r a_{i,j} \lambda_{j,t}$$

unde $i = 1, 2, \dots, n$ și $t = r+1, \dots, n$.

Întroducînd elementele $\lambda_{s,t}$ vom avea

$$M_{1,1}^{(s,t)} = \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2,t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r,2} & \dots & a_{r,r} & a_{r,t} \\ a_{s,2} & \dots & a_{s,r} & a_{s,t} \end{vmatrix}$$

adică

$$(24) \quad M_{1,1}^{(s,t)} = (-1)^{r-1} \lambda_{1,t} \begin{vmatrix} a_{2,1} & \dots & a_{2,r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} \\ a_{s,1} & \dots & a_{s,r} \end{vmatrix}$$

La fel se arată că

$$(24') \quad M_{2,2}^{(s,t)} = (-1)^{r+2} \lambda_{2,t} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} \\ a_{3,1} & \dots & a_{3,r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} \\ a_{s,1} & \dots & a_{s,r} \end{vmatrix}$$

$$(24'') \quad M_{r,r}^{(s,t)} = \lambda_{r,t} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{r-1,1} & \dots & a_{r-1,r} \\ a_{s,1} & \dots & a_{s,r} \end{vmatrix}$$

$$(24''') \quad M_{s,t}^{(s,t)} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} \end{vmatrix}$$

Determinanții din membri ai doilea al formulelor (24), (24') și (24'') sînt minorii ultimei coloane din determinantul (16). Rezultă că suma (17) se scrie

$$M^{(s,t)} = - \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} & \lambda_{1,t} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} & \lambda_{r,t} \\ a_{s,1} & \dots & a_{s,r} & -\delta_{s,t} \end{vmatrix}$$

Aplicînd teorema lui Sylvester [2], [3] deducem că

$$(25) \quad \Delta = (-1)^{n-r} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} \end{vmatrix} \Delta'$$

unde

$$(26) \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} & \lambda_{1,r+1} & \lambda_{1,r+2} & \dots & \lambda_{1,n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} & \lambda_{r,r+1} & \lambda_{r,r+2} & \dots & \lambda_{r,n} \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{r+2,1} & \dots & a_{r+2,r} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{r,1} & \dots & a_{n,r} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Deducem astfel că condiția ca determinantul Δ să fie nul se reduce la condiția ca determinantul Δ' să fie nul.

Prin urmare enunțul teoremei 2 se poate modifica înlocuind determinantul Δ prin determinantul Δ' dat de formula (26).

4. Teoremele 1 și 2 care-și au originea în integrarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți au, astfel o mare generalitate după cum s-a arătat mai sus.

Catedra de funcții diferențiale

BIBLIOGRAFIE

1. A. G. Kuroș, *Curs de algebră superioară*. Ed. Tehn. București p. 103.
2. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, гл. II. Москва, 1953.
3. D. V. Ionescu, *Forma canonică a unui determinant și aplicațiile ei*, „Studii și cercetări de matematică, Cluj”, tom. X, p. 33-45 (1959).

ОДНА ТЕОРЕМА О СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИИ

(Краткое содержание)

Доказываются две теоремы: относительно системы однородных (1) и относительно системы неоднородных уравнений (4), в которых правая часть $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является нетривиальным решением системы (1). Предполагается, что a_{ik} и x_i являются элементами тела P .

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием совместности системы (4) является то, чтобы сумма (4) была равна нулю, M_{ik} будучи минором a_{ik} в determinante системы (1).

Теорема 2. Пусть будут $M^{(s,t)}$ суммами, определенными формулами (17) относительно детерминантов (16) и Δ детерминант (22).

Тогда

1°, если $\Delta \neq 0$ и если $x_1, x_2, \dots, x_n$ является нетривиальным решением однородной системы (1), тогда неоднородная система (4) является несовместной.

2°, если $\Delta = 0$, тогда можно подобрать такое нетривиальное решение однородной системы (1), чтобы неоднородная система (4) была совместной.

Ранг матрицы (2) будучи r и детерминант (11) будучи отличным от нуля, можно подобрать элементы $\lambda_{s,t}$ при помощи уравнения (23). Используя элементы $\lambda_{s,t}$ в теореме (2), можно заменить детерминант Δ детерминантом Δ' , данным формулой (26).

UN THÉORÈME SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES
(Résumé)

Dans ce travail, on démontre deux théorèmes sur le système d'équations linéaires (1), homogène, et le système d'équations linéaires (4), non homogène, où dans les seconds nombres $x_1, x_2, \dots, x_n$ il y a une solution du système (1), qui n'est pas banale. On suppose que les a_{ik} et les x_i sont des éléments d'un corps P .

Premier théorème. La condition nécessaire et suffisante pour que le système (4) soit compatible, est que la somme (5) soit nulle, M_{ik} étant le mineur de a_{ik} dans le déterminant du système (1).

Second théorème. Soient $M^{(s,l)}$ les sommes définies par les formules (17) relativement aux déterminants (16) et Δ le déterminant (22). Alors :

1. si $\Delta \neq 0$, le système non homogène (4) est incompatible lorsque $x_1, x_2, \dots, x_n$ est une solution du système homogène (1), qui n'est pas banale.
2. si $\Delta = 0$, on peut choisir la solution $x_1, x_2, \dots, x_n$ du système homogène (1) qui n'est pas banale, telle que le système non homogène (4) soit compatible.

Le rang de la matrice (2) étant r et le déterminant (11) étant différent de zéro, on peut choisir les éléments $\lambda_{s,i}$ par les équations (23). A l'aide des éléments $\lambda_{s,i}$ on peut remplacer dans l'énoncé du second théorème le déterminant Δ par le déterminant Δ donné par la formule (26).