D. V. Ionescu, Representation as a double integral of the divided difference of order $(m, n)$ of a function of two variables. I,
*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1961, Volume 141, Number 5, 1026–1029

Доклады Академии наук СССР
1961. Том 141, № 5

МАТЕМАТИКА

Д. В. ИОНЕСКУ

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ ПОРЯДКА ($m$, $n$) ФУНКЦИИ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ДВОЙНЫМ ИНТЕГРАЛОМ. I

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 V 1961)*

1. Рассмотрим функцию $f(x)$ класса $C^n$ на интервале $[x_0, x_n]$ и возьмем в этом интервале узлы $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ таким образом, чтобы $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Мы доказали [1], что разделенная разность порядка $n$ в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$ может быть представлена определенным интегралом

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n;\ f] = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f^{(n)}(x)\,dx, \tag{1}$$

где функция $\varphi(x)$ совпадает на интервалах $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ с полиномами $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, определенными уравнениями

$$\varphi_i^{(n-1)}(x) = (-1)^n (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1});$$

$$\alpha_h = (-1)^{n+h} \frac{V(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n)}{V(x_0, x_1, \ldots, x_n)}, \tag{2}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, и граничными условиями

$$\varphi_1^{(k)}(x_0) = 0, \quad \varphi_{i+1}^{(k)}(x_i) = \varphi_i^{(k)}(x_i), \quad \varphi_n^{(k)}(x_n) = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1; \ k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Мы доказали, что функция $\varphi(x)$ положительна на интервале $(x_0, x_n)$. Формула (1), так же как и ее обобщение на случай кратных узлов, имеет важные приложения в численном анализе.

2. В настоящей заметке мы изложим кратко обобщение формулы (1) на случай функций двух переменных. Мы определим разделенную разность порядка $(m, n)$ от функции $f(x, y)$ на узлах $(x_i, y_k)$, где $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$, $y_0 < y_1 < \ldots < y_n$ $(m > n)$, при помощи формулы

$$\left[\begin{matrix} x_0, x_1, \ldots, x_m \\ y_0, y_1, \ldots, y_n \end{matrix};\ f\right] = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{i+k} \frac{V(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)}{V(x_0, x_1, \ldots, x_m)} \times$$
$$\times \frac{V(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)}{V(y_0, y_1, \ldots, y_n)} f(x_i, y_k). \tag{4}$$

Определим функцию $\Phi(x, y)$ в прямоугольнике $D\{x_0 \leqslant x \leqslant x_m,\ y_0 \leqslant y \leqslant y_n\}$ таким образом, чтобы

$$\left[\begin{matrix} x_0, x_1, \ldots, x_m \\ y_0, y_1, \ldots, y_n \end{matrix};f\right] = \iint_D \Phi(x, y) \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}\,dx\,dy, \tag{5}$$

где функция $f(x, y)$ непрерывна в $D$ вместе со своими частными производными

$$\partial^{2p-1} f / \partial x^p \partial y^{p-1}, \quad \partial^{2p-1} f / \partial x^{p-1} \partial y^p, \quad \partial^{2p} f / \partial x^p \partial y^p, \quad \partial^{2n+r} f / \partial x^{n+r} \partial y^n, \tag{6}$$

где $p = 1, 2, \ldots, n$; $r = 1, 2, \ldots, q$; $q = m - n$.

Чтобы прийти к формуле (5), мы установили две предварительные формулы и изучили потом граничную задачу для системы уравнений с частными производными.

3. Допустим, что функции $\varphi(x, y)$, $f(x, y)$ непрерывны в прямоугольнике $\Delta\{x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant y \leqslant y_2\}$ вместе с частными производными от $\varphi$

$$\frac{\partial^r \varphi}{\partial x^r}, \quad \frac{\partial^{2p+q-1}\varphi}{\partial x^{p+q}\partial y^{p-1}}, \quad \frac{\partial^{2p+q-1}\varphi}{\partial x^{p+q-1}\partial y^{p}}, \quad \frac{\partial^{2p+q}\varphi}{\partial x^{p+q}\partial y^{p}}, \tag{7}$$

где $p = 1, 2, \ldots, n$; $r = 1, 2, \ldots, q$, и производными (6) от $f$. В этих условиях, полагая

$$(-1)^q \partial^p \varphi / \partial x^q = \psi \tag{8}$$

и обозначая

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(x_i, y_k) = \underset{m}{\overset{n}{f}}(i, k); \quad \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(x, y_k) = \underset{m}{\overset{n}{f}}(x, k); \quad \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(x_i, y) = \underset{m}{\overset{n}{f}}(i, y), \tag{8'}$$

мы доказали следующую формулу:

$$\iint\limits_{\Delta} \varphi \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}\, dx\, dy - (-1)^q \iint\limits_{\Delta} f \frac{\partial^{m+n}\varphi}{\partial x^m \partial y^n}\, dx\, dy =$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \Big[ \underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi}}(2,2) \underset{r}{\overset{r}{f}}(2,2) - \underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi}}(2,1) \underset{r}{\overset{r}{f}}(2,1) - \underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi}}(1,2) \underset{r}{\overset{r}{f}}(1,2) +$$

$$+ \underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi}}(1,1) \underset{r}{\overset{r}{f}}(1,1) \Big] + \sum_{r=0}^{n-1} \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big[ \underset{n-r}{\overset{n-r-1}{\psi}}(x, 1) \underset{r}{\overset{r}{f}}(x, 1) - \underset{n-r}{\overset{n-r-1}{\psi}}(x, 2) \underset{r}{\overset{r}{f}}(x, 2) \Big] dx +$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-1} \int\limits_{y_1}^{y_2} \Big[ \underset{n-r-1}{\overset{n-r}{\psi}}(1, y) \underset{r}{\overset{r}{f}}(1, y) - \underset{n-r-1}{\overset{n-r}{\psi}}(2, y) \underset{r}{\overset{r}{f}}(2, y) \Big] dy +$$

$$+ \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \int\limits_{y_1}^{y_2} \Big[ \underset{j}{\overset{0}{\varphi}}(2, y) \underset{m-j-1}{\overset{n}{f}}(2, y) - \underset{j}{\overset{0}{\varphi}}(1, y) \underset{m-j-1}{\overset{n}{f}}(1, y) \Big] dy. \tag{9}$$

4. Обозначим через $D_i^k$ прямоугольник, определенный неравенствами $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+k}$, $y_k \leqslant y \leqslant y_{k+1}$, и сопоставим с каждым прямоугольником $D_i^k$ функцию $\varphi_i^k(x, y)$, непрерывную в этом прямоугольнике вместе со своими частными производными (7).

Функциям $\varphi_i^k(x, y)$ при помощи формулы (8) соответствуют функции $\psi_i^k(x, y)$. Применяя к каждому прямоугольнику $D_i^k$ и к функциям $\varphi_i^k(x, y)$, $f(x, y)$ формулу (9) и складывая полученные выражения, мы найдем основную формулу настоящей работы:

$$\iint\limits_{D} \Phi(x, y) \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}\, dx\, dy - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \iint\limits_{D_i^k} \frac{\partial^{2n}\psi_i^k}{\partial x^n \partial y^n} f\, dx\, dy =$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} \sum_{t=0}^{n} A_{s,t,r} \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_s, y_t) + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{t=0}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} M_{i,t,r}(x, y_t) \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x, y_t)\, dx +$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} N_{s,k,r}(x_s, y) \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_s, y)\, dy +$$

$$+ \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} (-1)^j \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} P_{s,j,k}(x_s, y) \frac{\partial^{2n+q-j-1} f}{\partial x^{n+q-j-1} \partial y^n}(x_s, y)\, dy, \tag{10}$$

где мы положили

$$A_{0,0,r}=\underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi_0^0}}(0,0);\quad A_{m,0,r}=-\underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi_{m-1}^0}}(m,0);$$

$$A_{s,0,r}=\underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi_s^0}}(s,0)-\underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi_{s-1}^0}}(s,0);$$

$$A_{0,t,r}=\underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi_0^t}}(0,t)-\underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi_0^{t-1}}}(0,t);\quad A_{m,t,r}=-\underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi_{m-1}^t}}(m,t)+\underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi_{m-1}^{t-1}}}(m,t);$$

$$A_{s,t,r}=\underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi_s^t}}(s,t)-\underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi_{s-1}^t}}(s,t)-\underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi_s^{t-1}}}(s,t)+\underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi_{s-1}^{t-1}}}(s,t);\tag{11}$$

$$A_{0,n,r}=-\underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi_0^{n-1}}}(0,n);\quad A_{m,n,r}=\underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi_{m-1}^{n-1}}}(m,n);$$

$$A_{s,n,r}=\underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi_{s-1}^{n-1}}}(s,n)-\underset{n-r-1}{\overset{n-r-1}{\psi_s^{n-1}}}(s,n);$$

$$M_{i,0,r}(x,y_0)=\underset{n-r}{\overset{n-r-1}{\psi_i^0}}(x,0);\quad M_{j,n,r}=-\underset{n-r}{\overset{n-r-1}{\psi_i^{n-1}}}(x,n);$$

$$M_{i,t,r}(x,y_t)=\underset{n-r}{\overset{n-r-1}{\psi_i^t}}(x,t)-\underset{n-r}{\overset{n-r-1}{\psi_i^{t-1}}}(x,t);\tag{12}$$

$$N_{0,k,r}(x_0,y)=\underset{n-r-1}{\overset{n-r}{\psi_0^k}}(0,y);\quad N_{m,k,r}=-\underset{n-r-1}{\overset{n-r}{\psi_{m-1}^k}}(m,y);$$

$$N_{s,k,r}(x_s,y)=\underset{n-r-1}{\overset{n-r}{\psi_s^k}}(s,y)-\underset{n-r-1}{\overset{n-r}{\psi_{s-1}^k}}(s,y);\tag{13}$$

$$P_{0,j,k}(x_0,y)=-\underset{j}{\overset{0}{\varphi_0^k}}(0,y);\quad P_{m,j,k}(x_m,y)=\underset{j}{\overset{0}{\varphi_{m-1}^k}}(m,y);$$

$$P_{s,j,k}(x_s,y)=\underset{j}{\overset{0}{\varphi_{s-1}^k}}(s,y)-\underset{j}{\overset{0}{\varphi_s^k}}(s,y),\tag{14}$$

$$(s=1,2,\ldots,m-1;\ t=1,2,\ldots,n-1),$$

где функция $\Phi(x,y)$ совпадает в каждом прямоугольнике $D_i^k$ с $\varphi_i^k(x,y)$.

5. Формула (10) приведет нас к рассмотрению граничной задачи:

Определить функции $\psi_i^k(x,y)$ уравнениями в частных производных

$$\partial^{2n}\psi_i^k/\partial x^n\partial y^n=0\tag{15}$$

в $D_i^k$ и граничными условиями так, чтобы в правой части формулы (10) оставались лишь значения функции $f(x,y)$ в узлах $(x_i,y_k)$.

Мы поставили следующие граничные условия: $N_{s,k,0}(x_s,\ y)=0$, $M_{i,t,0}(x,\ y_t)=0$, $A_{s,t,0}(x_s,y_t)=C_s^t$ для $s=0,1,\ldots,m-1$; $t=0,1,\ldots$ $\ldots,n-1$; $i=0,1,\ldots,m-1$; $k=0,1,\ldots,n-1$; $C_s^t$ — константы, которые мы определим ниже. Это приведет к уравнениям в частных производных

$$\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_i^k}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}=\sum_{\alpha=0}^{i}\sum_{\beta=0}^{k}C_\alpha^\beta.\tag{16}$$

Далее мы добавим граничные условия $N_{s,k,r}(x_s, y) = 0$, $M_{i,t,r}(x, y_t) = 0$; $A_{s,t,r}(x_s, y_t) = 0$ для $s = 0, 1, \ldots, m-1$; $t = 0, 1, \ldots, n-1$; $i = 0, 1, \ldots, m-1$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$; $r = 1, 2, \ldots, n-1$, что приводит к

$$\psi_i^k(x, y) = \frac{1}{[(n-1)!]^2} \sum_{\alpha=0}^{i} \sum_{\beta=0}^{k} C_\alpha^\beta (x - x_\alpha)^{n-1} (y - y_\beta)^{n-1}. \tag{17}$$

Чтобы определить функции $\varphi_i^k(x, y)$, интегрируют уравнения

$$\partial^q \varphi_i^k / \partial x^q = (-1)^q \psi_i^k, \tag{18}$$

где $\psi_i^k$ даны формулами (17) с граничными условиями $P_{s,j,k}(x_s, y) = 0$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$; $s = 0, 1, \ldots, m-1$; $j = 0, 1, \ldots, q-1$, что дает

$$\varphi_i^k(x, y) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-1)!\,(n-1)!} \sum_{\alpha=0}^{i} \sum_{\beta=0}^{k} C_\alpha^\beta (x - x_\alpha)^{m-1} (y - y_\beta)^{n-1}. \tag{19}$$

6. Вводя новые константы $A_{m,t,0} = C_m^t$, $A_{s,n,0} = C_s^n$, $A_{m,n,0} = C_m^n$ для $t = 0, 1, \ldots, n-1$; $s = 0, 1, \ldots, m-1$, видим, что все константы $C_\alpha^\beta$ определены новыми граничными условиями $M_{i,n,r}(x, y_n) = 0$, $N_{m,k,r}(x_m, y) = 0$, $P_{m,j,k}(x_m, y) = 0$ для $i = 0, 1, \ldots, m-1$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$; $j = 0, 1, \ldots, q-1$; $r = 1, 2, \ldots, n-1$. В этом случае формула (10) сводится к

$$\iint_D \Phi(x, y) \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} dx\,dy = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} C_i^k f(x_i, y_k), \tag{20}$$

и константы $C_i^k$ определяются уравнениями:

$$\sum_{\alpha=0}^{m} C_\alpha^k x_\alpha^s = 0, \qquad \sum_{\beta=0}^{n} C_i^\beta y_\beta^t = 0 \; (s = 0, 1, \ldots, m-1;\; t = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{21}$$

Из первых уравнений (21) получаем

$$C_i^k = (-1)^i V(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)\, \lambda_k \tag{22}$$

для $i = 0, 1, \ldots, m$; $k = 0, 1, \ldots, n$, где $\lambda_k$ — постоянные. Записывая, что все остальные уравнения (21) удовлетворены, мы получаем уравнения для определения $\lambda_k$:

$$\sum_{\beta=0}^{n} \lambda_\beta y_\beta^t = 0 \quad (t = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{23}$$

Находим

$$\lambda_k = (-1)^k \lambda V(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n), \tag{24}$$

и, выбирая $\lambda = \dfrac{1}{V(x_0, x_1, \ldots, x_m)\, V(y_0, y_1, \ldots, y_n)}$, окончательно

$$C_i^k = (-1)^{i+k} \frac{V(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)}{V(x_0, x_1, \ldots, x_m)} \frac{V(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)}{V(y_0, y_1, \ldots, y_n)},$$

а это доказывает, что правая часть формулы (20) совпадает с разделенной разностью порядка $(m, n)$ в узлах $(x_i, y_k)$ функции $f(x, y)$. Таким образом, формула (5) доказана.

В следующей заметке мы докажем, что функция $\Phi(x, y)$ формулы (5), которая обращается в нуль на сторонах прямоугольника $D$, имеет постоянный знак внутри этого прямоугольника.

Клуж
Румынская Народная Республика

Поступило
25 IV 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. V. Ionescu, Cuadraturi numerice, Bucuresti, 1957, cap. III.