D. V. Ionescu, Representation as a double integral of the divided difference of order (m, n) of a function of two variables. II,
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1961, Volume 141, Number 6, 1294–1297

Доклады Академии наук СССР
1961. Том 141, № 6

МАТЕМАТИКА

Д. В. ИОНЕСКУ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ ПОРЯДКА (m, n) ОТ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ДВОЙНЫМ ИНТЕГРАЛОМ. II

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 V 1961)

1. В предыдущей заметке ([1]) мы доказали, что разделенная разность порядка (m, n) функции $f(x, y)$ в узлах (x_i, y_k), где $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$; $y_0 < y_1 < \ldots < y_n$, может быть представлена формулой

$$\begin{bmatrix} x_0, x_1, \ldots, x_m; & f \\ y_0, y_1, \ldots, y_n & \end{bmatrix} = \iint\limits_D \Phi(x, y) \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} dx\, dy, \tag{1}$$

где D — прямоугольник, определенный неравенствами $x_0 \leqslant x \leqslant x_m$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_n$, и функция $\Phi(x, y)$ совпадает в каждом прямоугольнике D_i^k, определенном неравенствами $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$, $y_k \leqslant y \leqslant y_{k+1}$, с функцией $\varphi_i^k(x, y)$, определенной формулой

$$\varphi_i^k(x, y) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-1)!\,(n-1)!} \sum_{\alpha=0} \sum_{\beta=0}^{k} C_\alpha^\beta (x - x_\alpha)^{m-1} (y - y_\beta)^{n-1}; \tag{2}$$

коэффициенты C_α^β даются формулой

$$C_\alpha^\beta = (-1)^{\alpha+\beta} \frac{V(x_0, x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_m)}{V(x_0, x_1, \ldots, x_m)} \frac{V(y_0, y_1, \ldots, y_{\beta-1}, y_{\beta+1}, \ldots, y_n)}{V(y_0, y_1, \ldots, y_n)}. \tag{3}$$

Разложения

$$\frac{1}{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_m)} = \sum_{\alpha=0}^{m} \frac{A_\alpha}{x - x_\alpha},$$

$$\frac{1}{(y - y_0)(y - y_1) \ldots (y - y_n)} = \sum_{\beta=0}^{n} \frac{B_\beta}{y - y_\beta} \tag{4}$$

показывают, что можно написать также

$$C_\alpha^\beta = (-1)^{m+n} A_\alpha B_\beta. \tag{5}$$

В настоящей заметке мы докажем, что функция $\Phi(x, y)$, обращающаяся в нуль на сторонах прямоугольника D, имеет постоянный знак внутри этого прямоугольника.

2. Рассмотрим функции $\varphi_i^k(x, y)$, связанные с прямоугольниками D_i^k, заключенными между прямыми $y = y_k$ и $y = y_{k+1}$, и изучим функции от x, $\chi_i(x) = \varphi_i^k(x, y)$, где y имеет фиксированное значение из интервала $(y_k, y_{k+1}]$, если $k = 0, 1, \ldots, n-2$, или из интервала (y_{n-1}, y_n), если $k = n-1$. Доказывается, что функции $\chi_i(x)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\chi_0^{(j)}(x_0) = 0, \quad \chi_i^{(j)}(x_i) = \chi_{i-1}^{(j)}(x_i), \quad \chi_{m-1}^{(j)}(x_m) = 0 \tag{6}$$

для $i = 1, 2, \ldots, m-1$ и $j = 0, 1, \ldots, m-2$.

Точно так же функции от y $\theta_k(y) = \varphi_i^k(x, y)$, где x имеет фиксированное значение из интервала $(x_i, x_{i+1}]$, если $i = 0, 1, \ldots, m-2$, или из интервала (x_{m-1}, x_m), если $i = m-1$, удовлетворяют граничным условиям

$$\theta_0^{(j)}(y_0) = 0, \quad \theta_k^{(j)}(y_k) = \theta_{k-1}^{j}(y_k), \quad \theta_{n-1}^{(j)}(y_n) = 0 \tag{7}$$

для $k = 1, 2, \ldots, n-1$ и $j = 0, 1, \ldots, n-2$.

3. Мы положим, что производная $\chi_i^{(m-1)}(x)$ не обращается в нуль в интервале (x_0, x_m). Эта производная есть константа по отношению к x, и мы имеем

$$\chi_i^{(m-1)}(x) = \frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_i}{(n-1)!} [B_0 (y - y_0)^{n-1} + B_1 (y - y_1)^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + B_k (y - y_k)^{n-1}]. \tag{8}$$

Мы доказали [2], что $A_0 + A_1 + \ldots + A_i \neq 0$, и нам остается доказать, что сумма

$$h_k = B_0 (y - y_0)^{n-1} + B_1 (y - y_1)^{n-1} + \ldots + B_k (y - y_k)^{n-1} \tag{9}$$

не равна нулю для $k = 0, 1, \ldots, n-1$, где y имеет фиксированное значение из интервала $(y_k, y_{k+1}]$, если $k = 0, 1, \ldots, n-2$, или из (y_{n-1}, y_n), если $k = n-1$. Мы предполагаем, что $n > 1$.

Рассматривая разложение

$$\frac{(y - Y)^{n-1}}{(Y - y_0)(Y - y_1)\ldots(Y - y_n)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{B_j'}{Y - y_j}, \tag{10}$$

можно написать

$$h_k = B_0' + B_1' + \ldots + B_k'. \tag{11}$$

Вводя функцию

$$f(Y) = \frac{(y - Y)^{n-1}}{(Y - y_0)(Y - y_1)\ldots(Y - y_k)}, \tag{12}$$

мы доказываем, что

$$h_k = -[y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n; f], \tag{13}$$

и, в силу известной теоремы, имеем

$$h_k = -\frac{f^{(n-k-1)}(\bar{Y})}{(n-k-1)!}, \tag{14}$$

где $y_{k+1} < \bar{Y} < y_n$.

4. Мы имеем

$$f^{(n-k-1)}(Y) = (-1)^n (n-k-1)! \sum_{i=0}^{k} A_i \frac{(y_i - y)^{n-1}}{(y_i - Y)^{n-k}},$$

и, вводя функцию от η

$$g(\eta) = \frac{(\eta - y)^{n-1}}{(\eta - Y)^{n-k}}, \tag{15}$$

получим

$$f^{(n-k-1)}(Y) = (-1)^n (n-k-1)! [y_0, y_1, \ldots, y_k; g] =$$
$$= (-1)^n \frac{(n-k-1)!}{k!} g^{(k)}(\bar{\eta}), \tag{16}$$

где $y_0 < \bar{\eta} < y_k$.

Можно доказать, что

$$g^{(k)}(\eta) = (-1)^k \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} \frac{(Y - y)^k (\eta - y)^{n-k-1}}{(\eta - Y)^n}. \tag{17}$$

Вернемся к формулам (14), (16), (17) и обозначим через $\bar{\eta}^*$ число, соответствующее $\bar{Y}$ в формуле (16). Имеем

$$h_k = (-1)^{n+k+1}\binom{n-1}{k}\frac{(\bar{Y}-y)^k(\bar{\eta}^*-y)^{n-k-1}}{(\bar{\eta}^*-\bar{Y})^n}, \tag{18}$$

а это доказывает, что $h_k \neq 0$, так как

$$\bar{\eta}^* < y_k < y \leqslant y_{k+1} < \bar{Y}. \tag{19}$$

Предыдущие рассуждения годились для $k = 1, 2, \ldots, n-2$, но можно непосредственно убедиться, что мы имеем также $h_0 \neq 0$ и $h_{n-1} \neq 0$.

5. Можно доказать тем же способом, что производная $\theta_k^{(n-1)}(y)$ не обращается в нуль на интервале (y_k, y_{k+1}). Мы ограничимся рассмотрением функций $\theta_k(y)$, соответствующих $i = 0$, т. е.

$$\theta_k(y) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-1)!(n-1)!}[C_0^0(y-y_0)^{n-1} + C_0^1(y-y_1)^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + C_0^k \times (y-y_k)^{n-1}](x-x_0)^{m-1}. \tag{20}$$

Для этих функций имеем

$$\theta_k^{(n-1)}(y) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-1)!}A_0(B_0 + B_1 + \ldots + B_k)(x-x_0)^{m-1}, \tag{21}$$

и, следовательно, $\theta_k^{(n-1)}(y) \neq 0$ на интервале (y_k, y_{k+1}), так как $B_0 + B_1 + \ldots + B_k \neq 0$.

6. Мы можем теперь доказать, что *функция* $\Phi(x, y)$ *имеет тот же знак, что* $(-1)^{m-n}$, *внутри прямоугольника* D.

Прежде всего, имеем

$$\varphi_0^0(x, y) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-1)!(n-1)!}C_0^0(x-x_0)^{m-1}(y-y_0)^{n-1}, \tag{22}$$

где коэффициент C_0^0 положителен. Значит, $\varphi_0^0(x, y)$ имеет знак $(-1)^{m-n}$ для $x_0 < x \leqslant x_1$, $y_0 < y \leqslant y_1$.

Далее докажем, что функция $\Phi(x, y)$ имеет знак $(-1)^{m-n}$ в полосе $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $y_0 < y < y_n$. С этой целью рассмотрим функцию $\theta(y)$, которая совпадает в каждом интервале $[y_k, y_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, с функциями $\theta_k(y) = \varphi_0^k(x, y)$, где x имеет фиксированное значение в интервале $(x_0, x_1]$. Мы доказали, что $\theta(y)$ есть функция, непрерывная в интервале $[y_0, y_n]$ вместе со своими производными до порядка $n-2$ и что она удовлетворяет условиям $\theta^j(x_0) = 0$, $\theta^{(j)}(x_n) = 0$ для $j = 0, 1, \ldots, n-2$. В силу теоремы Ролля, примененной к функции $\theta(y)$ и к интервалу $[y_0, y_n]$, производная $\theta'(y)$ имеет по крайней мере один нуль в интервале (y_0, y_n). Этот нуль единственный.

В самом деле, допустим, что производная $\theta'(y)$ имеет в интервале (y_0, y_n) два нуля. Тогда, применяя последовательно теорему Ролля и принимая во внимание условия, которым функция $\theta(y)$ удовлетворяет в точках y_0 и y_n, мы заключаем, что производная $\theta^{(n-2)}(y)$ имеет $n-1$ нулей в интервале (y_0, y_n). В интервалах $(y_0, y_1]$, $[y_{n-1}, y_n)$ нет ни одного нуля $\theta^{(n-2)}(y)$, так как мы доказали, что $\theta_1^{(n-1)}(y)$ и $\theta_n^{(n-1)}(y)$ не обращаются в нуль в интервалах (y_0, y_1) (y_{n-1}, y_n). Следовательно, $n-1$ нулей производной $\theta^{(n-2)}(y)$ лежат в интервале (y_1, y_{n-1}), но в каждом интервале $(y_k, y_{k+1}]$, где $k = 1, 2, \ldots, n-2$, лежит только один нуль функции $\theta^{(n-2)}(y)$, так как мы доказали, что производная $\theta^{(n-1)}(y)$ не обращается в нуль в интервале (y_k, y_{k+1}). Значит, интервал (y_1, y_{n-1}) может содержать только $n-2$ нулей функции $\theta^{(n-2)}(y)$, и мы пришли к противоречию, которое показывает, что производная $\theta'(y)$ имеет только один нуль в интервале (y_0, y_n).

Отсюда следует, что функция $\theta(y)$ имеет только один экстремум в интервале (y_0, y_n) и, так как она имеет знак $(-1)^{m-n}$ в интервале $(y_0, y_1]$, она имеет знак $(-1)^{m-n}$ в интервале (y_0, y_n). Отсюда заключаем, что функция $\Phi(x, y)$ имеет знак $(-1)^{m-n}$ в полосе $x_0 < x \leqslant x_1$, $y_0 < y < y_n$.

Тем же методом, используя свойства функций $\chi_i(x)$, можно доказать, что функция $\Phi(x, y)$ имеет знак $(-1)^{m-n}$ в полосе $x_0 < x < x_m$, $y_k < y \leqslant y_{k+1}$ для каждого значения $k = 0, 1, \ldots, n-2$ или в полосе $x_0 < x < x_n$, $y_{n-1} < y < y_n$.

Функция $\Phi(x, y)$ имеет, следовательно, знак $(-1)^{m-n}$ внутри прямоугольника D.

7. Из предыдущего свойства вытекает, что

$$\begin{bmatrix} x_0, x_1 \ldots, x_m \\ y_0, y_1, \ldots, y_n \end{bmatrix}; f \Bigg] = \frac{\partial^{m+n} f(\xi, \eta)}{\partial x^m \partial y^n} \iint\limits_D \Phi(x, y)\, dx\, dy, \tag{23}$$

где $x_0 < \xi < x_n$, $y_0 < \eta < y_n$. Мы имеем

$$\iint\limits_D \Phi(x, y)\, dx\, dy = \frac{(-1)^{m-n}}{m!n!} \tag{24}$$

и, следовательно, *разделенная разность порядка (m, n) функции $f(x, y)$ может быть представлена формулой*

$$\left[\begin{matrix} x_0, x_1, \ldots, x_m \\ y_0, y_1, \ldots, y_n \end{matrix}; f\right] = \frac{(-1)^{m-n}}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} f(\xi, \eta)}{\partial x^m \partial y^n}, \tag{25}$$

где $x_0 < \xi < x_n$, $y_0 < y < y_n$.

Отсюда вытекает оценка

$$\left|\left[\begin{matrix} x_0, x_1, \ldots, x_m \\ y_0, y_1, \ldots, y_n \end{matrix}; f\right]\right| \leqslant \frac{M_{m,n}}{m!n!}, \tag{26}$$

где $M_{m,n}$ — верхняя грань абсолютного значения $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ в прямоугольнике $x_0 < x < x_m$, $y_0 < y < y_n$.

Клуж
Румынская Народная Республика

Поступило
25 IV 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. В. Ионеску, ДАН, **141**, № 5 (1961). [2] D. V. Ionescu, Cuadraturi numerice, Bucureşti, 1957, cap. III.