MATHEMATICA VOL. 2 (25), 2, 1960, pp. 269 – 275

SUR L'ANALOGUE DE LA MÉTHODE DE TCHEBYCHEFF ET DE LA MÉTHODE DES HYPERBOLES TANGENTES.

par

BELA JANKÓ

à Cluj

Dans ce travail ont été élaborées des méthodes d'itération pour la résolution des équations fonctionnelles nonlinéaires $P(x) = 0$ qui s'appliquent dans des conditions larges, sans supposer l'existence des dérivées de Fréchet ou Gâteaux de l'opération P. Ici la dérivée a été remplacée par une certaine différence divisée du même ordre. En ce sens nous avons construit l'analogue de la méthode de Newton [1]. Pour engendrer les méthodes d'itération traitées dans ce travail, nous considérons la formule d'itération générale de la forme

$$x_{n+1} = \Psi_n(P\,;\, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}), \tag{1}$$

où l'approximation x_{n+1} ne dépend pas seulement de l'approximation x_n comme d'habitude, mais elle dépend aussi des approximations précédentes x_{n-1}, x_{n-2}. L'opération Ψ_n dépend encore de P et de ses différences divisées. Remarquons que dans notre travail nous n'utilisons pas l'inverse $[P'(x_n)]^{-1}$ de la dérivée de $P(x)$ ou d'autres inverses de cette nature. Nous mentionnons que les opérations qui interviennent ici ne sont pas en général bornées en norme. Dans certains cas nous supposerons qu'ils ont une borne inférieure (ou supérieure).

Le but de ce travail est de construire les analogues de la méthode de Tchebycheff [2] et de la méthode des hyperboles tangentes [3]. Nous voulons aussi montrer que ces méthodes et aussi l'analogue de la méthode de Newton ont une source commune. Nous étudions encore la convergence de nos procédés.

1. Soit X un ensemble de fonctions réelles définies sur un intervalle (fini ou infini) qui forme un espace linéaire demi-ordonné. Nous disons que pour les fonction $x_1(t), x_2(t) \in X$ a lieu la relation $x_1 < x_2$ si $x_1(t) < x_2(t)$ pour toutes les valeurs de t dans l'intervalle considérée. Supposons encore que l'ensemble X satisfait les conditions: a) $x_1 \in X, x_2 \in X \Rightarrow x_1 x_2 \in X$ et b) $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in X$. Considérons l'équation fonctionnelle $P(x) = 0$, où l'opération nonlinéaire P est définie dans l'espace X ayant ses valeurs aussi en X. Nous introduisons la différence divisée d'une manière analogue à celle du cas habituel

$$[x_0, x_1; P/x] = \frac{P(x_0) - P(x_1)}{x_0 - x_1},$$

où on suppose que $x_0 < x_1$. La différence divisée d'ordre II peut être définie sous la forme

$$[x_0, x_1, x_2; P/x] = \frac{[x_0, x_1; P(x)] - [x_1, x_2; P(x)]}{x_0 - x_2}$$

pour $x_0 < x_1 < x_2$.

Considérons l'opération

$$\Phi_n(P; x, \xi, \eta, \zeta) \equiv x - \lambda_0 P(x) - \lambda_1(x - \xi) P(x) - \lambda_2 P^2(x),$$

où ξ, η, ζ sont certains éléments de X choisis ultérieurement et où les relations

$$\lambda_0 = \lambda_0(P; \xi, \eta, \zeta), \quad \lambda_1 = \lambda_1(P; \xi, \eta, \zeta), \quad \lambda_2 = \lambda_2(P; \xi, \eta, \zeta)$$

seront déterminées aussi dans ce qui suit.

2. Si nous choisissons $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 0$ et imposons la condition

$$[\xi, \eta; \Phi_n/x] \equiv 0$$

alors il résulte que

$$\lambda_0 = \frac{1}{[\xi, \eta; P/x]}.$$

Ainsi le procédé d'itération

$$x_{n+1} = \Phi_n(P; x_n, \xi, \eta, \zeta) \tag{1'}$$

représente l'analogue de la méthode de Newton [1]. En effet, si nous choisissons $\xi = \bar{x}_n$, $\eta = \bar{x}_{n-1}$, alors on obtient le procédé pour les approximations supérieures

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{1}{[\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}; P/x]} P(\bar{x}_n)$$

et si $\xi = \underline{x}_n$, $\eta = \bar{x}_n$, nous retrouvons le procédé pour les approximations inférieures[1])

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \frac{1}{[\underline{x}_n, \bar{x}_n; P/x]} P(\underline{x}_n).$$

3. Si nous avons $\lambda_1 \equiv 0$ et imposons les conditions

$$[\xi, \eta; \Phi_n/x] \equiv 0, \quad [\xi, \eta, \zeta; \Phi_n/x] \equiv 0,$$

alors il résulte que

$$\lambda_0 = \frac{1}{[\xi, \eta; P/x]} + \frac{[\xi, \eta, \zeta; P/x](P(\xi) + P(\eta))}{D},$$

$$\lambda_2 = -\frac{[\xi, \eta, \zeta; P/x]}{D}, \text{ où } D = [\xi, \eta; P/x]\,[\xi, \zeta; P/x]\,[\zeta, \eta; P/x].$$

Dans ce cas le procédé d'itération (1') représente l'analogue de la méthode de Tchebycheff. En effet, si $\xi = \bar{x}_n$, $\eta = \bar{x}_{n-1}$, $\zeta = \bar{x}_{n-2}$, alors on obtient l'itération pour les approximations supérieures

$$\begin{aligned} \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{1}{[\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}; P/x]} P(\bar{x}_n) - \\ - \frac{[\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_{n-2}; P/x]\, P(\bar{x}_{n-1})\, P(\bar{x}_n)}{[\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}; P/x][\bar{x}_n, \bar{x}_{n-2}; P/x][\bar{x}_{n-2}, \bar{x}_{n-1}; P/x]} \end{aligned} \tag{2}$$

et si $\xi = \underline{x}_n$, $\eta = \bar{x}_{n-1}$, $\zeta = \bar{x}_{n-2}$ alors nous avons l'itération pour les approximations inférieures

$$\begin{aligned} \underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \frac{1}{[\underline{x}_n, \bar{x}_{n-1}; P/x]} P(\underline{x}_n) - \\ - \frac{[\underline{x}_n, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_{n-2}; P/x]}{[\underline{x}_n, \bar{x}_{n-1}; P/x][\underline{x}_n, \bar{x}_{n-2}; P/x][\bar{x}_{n-2}, \bar{x}_{n-1}; P/x]} P(\bar{x}_{n-1})\, P(\underline{x}_n) \end{aligned} \tag{2'}$$

THÉORÈME 1. *Supposons remplies les conditions*

1° $P(\underline{x}_0) < 0 < P(\bar{x}_0)$ *pour* $\underline{x}_0 < \bar{x}_0$,

2° $0 < [x_1, x_2; P/x] < +\infty$, $0 < [x_1, x_2, x_3; P/x] < +\infty$ *pour tous les éléments* $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, *où* $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [\underline{x}_{-1}, \bar{x}_{-1}]$,

[1]) Nous remarquons que dans ce cas l'opération Φ_n ne dépend pas de ζ.

3° $P(x)$ *est monotone-continue sur le segment* $[\underline{x}_0, \overline{x}_0] \subseteq [\underline{x}_{-1}, \overline{x}_{-1}]$, *où* $\underline{x}_{-1}, \underline{x}_0, \overline{x}_0, \overline{x}_{-1}$ *sont des approximations initiales,*

4° *les approximations* $\underline{x}_{n+1}, \overline{x}_{n+1}$ *sont calculées par les formules*

$$\overline{x}_1 = \overline{x}_0 - \frac{1}{[\overline{x}_0, \overline{x}_{-1}; P/x]} P(\overline{x}_0),$$

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0 - \frac{1}{[\underline{x}_0, \overline{x}_0; P/x]} P(\underline{x}_0)$$

pour $n = 0$, *et pour* $n \geqq 1$ *on utilise les formules d'itération* (2), (2'),

5° $0 < [x_1, x_2, x_3, x_4; \Phi_n /x] < +\infty$ *pour tous les éléments* x_1, x_2, x_3, x_4, *qui apartiennent au segment* $[\underline{x}_{-1}, \overline{x}_{-1}]$ *et qui sont ordonnés de la manière suivante:* $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$,

alors l'équation fonctionnelle admet une solution unique x^* *pour laquelle nous avons les propriétés*

(α) $$\underline{x}_n < \underline{x}_{n+1} < x^* < \overline{x}_{n+1} < \overline{x}_n$$

(β) $$x^* = (o) - \lim_{n \to \infty} \underline{x}_n = (o) - \lim_{n \to \infty} \overline{x}_n \quad \text{où} \quad x^* \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0].$$

Démonstration. a) L'existence et l'unicité de la solution résulte de la propriété suivante [1] (Théorème 3):

Si les conditions 1° — 3° du théorème 1 sont remplies et si les approximations $\underline{x}'_{n+1}, \overline{x}'_{n+1}$ sont déterminées par les formules d'itération

$$\underline{x}'_{n+1} = \underline{x}'_n - \frac{1}{[\underline{x}'_n, \overline{x}'_n; P/x]} P(\underline{x}'_n); \quad \overline{x}'_{n+1} = \overline{x}'_n - \frac{1}{[\overline{x}'_n, \overline{x}'_{n-1}; P/x]} P(\overline{x}'_n).$$

(ayant $\underline{x}'_i = \underline{x}_i$, $\overline{x}'_i = \overline{x}_i$ pour $i = -1, 0, 1$), alors il existe une solution unique $x^* \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ pour l'équation $P(x) = 0$, où

(3) $$x^* = (o) - \lim_{n \to \infty} \underline{x}'_n = (o) - \lim_{n \to \infty} \overline{x}'_n$$

et

(3') $$\underline{x}'_n < \underline{x}'_{n+1} < x^* < \overline{x}'_{n+1} < \overline{x}'_n.$$

b) Démontrons l'inégalité (α). Il résulte de la formule (3') que

$$\underline{x}_0 < \underline{x}_1 < x^* < \overline{x}_1 < \overline{x}_0$$

puisque les formules (2), (2') entraînent les inégalités $\underline{x}_n < \underline{x}_{n+1}$, $\overline{x}_{n+1} < \overline{x}_n$ pour chaque $n \geqq 1$.

Nous introduisons la notation $\Phi_n(P; x, \overline{x}_n, \overline{x}_{n-1}, \overline{x}_{n-2}) \equiv \overline{f}_n(x)$ qui peut être écrite sous la forme

$$\overline{f}_n(x) = \overline{f}_n(\overline{x}_n) + (x - \overline{x}_n)[\overline{x}_n, \overline{x}_{n-1}; \overline{f}_n/x] +$$
$$+ (x - \overline{x}_n)(x - \overline{x}_{n-1})[\overline{x}_n, \overline{x}_{n-1}, \overline{x}_{n-2}; \overline{f}_n/x] +$$
$$+ (x - \overline{x}_n)(x - \overline{x}_{n-1})(x - \overline{x}_{n-2})[\overline{x}_n; \overline{x}_{n-1}, \overline{x}_{n-2}, \tau; \overline{f}_n/x].$$

Pour $x = x^*$ il résulte de cette formule que

(4) $$x^* - \overline{x}_{n+1} = (x^* - \overline{x}_n)(x^* - \overline{x}_{n-1})(x^* - \overline{x}_{n-2})[\overline{x}_n, \overline{x}_{n-1}, \overline{x}_{n-2}, \tau; \overline{f}_n/x],$$

parce que $x^* = \overline{f}_n(x^*)$ et $\overline{x}_{n+1} = \overline{f}_n(\overline{x}_n)$. En tenant compte de la condition 5° et de la formule (4) nous obtenons $x^* < \overline{x}_{n+1}$ pour toutes les valeurs de $n \geqq 2$. Si on utilise la notation $\Phi_n(P; x, \underline{x}_n, \underline{x}_{n-1}, \underline{x}_{n-2}) \equiv \underline{f}_n(x)$ nous obtenons de la même manière l'inégalité $\underline{x}_{n+1} < x^*$. Ainsi nous avons démontré les inégalités (α).

Les relations (β) résultent facilement de la formule (3) et des inégalités

$$\underline{x}'_n < \underline{x}_n < x^* < \overline{x}_n < \overline{x}'_n.$$

En effet, en tenant compte de (3) et des inégalités $\underline{x}'_n < \overline{x}_n < \overline{x}'_n$ il résulte que $x^* = (o) - \lim_{n \to \infty} \overline{x}_n$. Les inégalités $\underline{x}'_n < \underline{x}_n < \overline{x}'_n$ et (3') prouvent de la même manière que $x^* = (o) - \lim_{n \to \infty} \underline{x}_n$. Le théorème est ainsi démontré.

Observation. La condition 5° peut être remplacée par l'inégalité $0 > [x_1, x_2, x_3, x_4; P/x] > -\infty$ pour chaque $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, où $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [\underline{x}_{-1}, \overline{x}_{-1}]$.

4. Considérons le cas $\lambda_2 \equiv 0$ et imposons les conditions

$$[\xi, \eta ; \Phi_n/x] \equiv 0, \ [\xi, \eta, \zeta ; \Phi_n/x] \equiv 0$$

alors nous obtenons

$$\lambda_0 = \frac{[\xi, \eta ; P/x]}{D_1}, \ \lambda_1 = -\frac{[x_n, \eta, \zeta ; P/x]}{D_1}$$

où

$$D_1 = [\xi, \eta ; P/x][\eta, \zeta ; P/x] - [\xi, \eta, \zeta ; P/x].$$

Si nous choisissons $\xi = \bar{x}_n$, $\zeta = \bar{x}_{n-1}$ respectivement $\xi = \underline{x}_n$, $\zeta = \bar{x}_n$, alors on obtient des itérations pour les approximations supérieures respectivement inférieures, analogues à la méthode des hyperboles tangentes

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{[\eta, \bar{x}_{n-1} ; P/x]}{[\bar{x}_n, \eta ; P/x][\eta, \bar{x}_{n-1} ; P/x] - [\bar{x}_n, \eta, \bar{x}_{n-1} ; P/x]\, P(\eta)} P(\bar{x}_n) \tag{5}$$

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \frac{[\eta', \bar{x}_n ; P/x]}{[\underline{x}_n, \eta' ; P/x][\eta', \bar{x}_n ; P/x] - [\underline{x}_n, \eta', \bar{x}_n ; P/x]\, P(\eta')} P(\underline{x}_n) \tag{5'}$$

où η et η' sont des approximations inférieures quelconques ; en particulier elles peuvent être choisies de la manière suivante : $\eta = \underline{x}_n$, $\eta' = \underline{x}_{n-1}$.

THÉORÈME 2. *Si les conditions* $1^0 - 3^0$ *du théorème* 1 *sont remplies et si on suppose de plus que*

α) *les itérations* $\underline{x}_{n+1}$, $\bar{x}_{n+1}$ *sont obtenues par les formules*

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 - \frac{1}{[\bar{x}_0, \bar{x}_{-1} ; P/x]} P(\bar{x}_0),$$

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0 - \frac{1}{[\underline{x}_0, \bar{x}_0 ; P/x]} P(\underline{x}_0)$$

pour $n = 0$, *et pour* $n \geqq 1$ *— par les formules* (5), (5′),

β) $0 > [x_1, x_2, x_3, x_4 ; \Phi_n/x] > -\infty$ *pour tous les éléments* x_1, x_2, x_3, x_4, *qui apartiennent au segment* $[\underline{x}_{-1}, \bar{x}_{-1}]$ *et qui sont ordonnés de la manière suivante :* $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, *alors l'équation fonctionnelle* $P(x) = 0$ *admet une solution unique* x^*, $x^* \in [\underline{x}_0, \bar{x}_0]$ où $x^* = (o) - \lim\limits_{n\to\infty} \underline{x}_n = (o) - \lim \bar{x}_n$ et

$$\underline{x}_n < \underline{x}_{n+1} < x^* < \bar{x}_{n+1} < \bar{x}_n.$$

La démonstration est analogue à celle donnée pour le théorème 1.

Observations I. En comparant cette méthode avec l'analogue de la méthode de Newton nous pouvons montrer facilement par des calculs directs, que l'analogue de la méthode des hyperboles tangentes converge plus rapidement, c'est-à-dire qu'on a les inégalités $\underline{x}'_{n+1} < \underline{x}_{n+1}$ et $\bar{x}_{n+1} < \bar{x}'_{n+1}$.

II. Nous pouvons mettre en évidence que, dans le cas où $P(x)$ désigne une fonction d'une variable réelle, alors les méthodes établies ci-dessus sont plus avantageuses dans les calculs numérique que la méthode classique de Tchebyscheff et que la méthode des hyperboles tangentes, même quand $P(x)$ admet des dérivées. En effet, si on utilise ces méthodes, on doit calculer les valeurs de x_n, $P(x_n)$, $P'(x)$, $P''(x_n)$, alors que si on utilise nos méthodes il faut calculer seulement les valeurs de x_n et $P(x_n)$. Ces valeurs étant connues, les différences divisées indiquées dans les formules d'itération (2), (2′) respectivement (5), (5′) peuvent être calculées facilement.

III. Il résulte de l'étude de la convergence de ces méthodes que la rapidité de convergence peut être augmentée sans supposer l'existence des inverses.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J a n k ó B., *Aplicaţii la rezolvarea ecuaţiilor funcţionale neliniare considerate în spaţii semiordonate*, Studii şi cercet. Mat. (Cluj), **10**, 1, 51—57 (1959).

[2] Н е ч е п у р е н к о М. И., *О метода Чебышева для функциональных уравнений.* Успехи Мат. Наук, **9**, 2, 163—170 (1954).

[3] М е р т в е ц о в а М. А., *Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений.* Д. А. Н., **88**, 4, 611—614 (1953).

Reçu le 17. I. 1960.