

Nous introduirons deux définitions relativement au système (5') :

Première définition. Nous dirons que le système (5') jouit de la propriété L^+ , s'il existe une fonction $U(x_1, x_2, \dots, x_s)$ définie positivement et des constantes positives $h, H, \rho^{(0)}$ de telle manière que l'on ait

$$(\text{grad } U, P) \geq h\rho_s \text{ et } |\text{grad } V| \leq H\rho_s$$

pour $\rho_s > \rho^{(0)}$.

Deuxième définition. Nous dirons que le système (5') jouit de la propriété L^- , s'il existe une fonction $V(x_1, x_2, \dots, x_s)$, définie positivement, et des constantes positives $h', H', \rho^{(0)'}$ de telle manière que l'on ait

$$(\text{grad } V, P) \leq -h'\rho_s \text{ et } |\text{grad } V| \leq H'\rho_s$$

pour $\rho_s > \rho^{(0)'}$.

Nous reviendrons maintenant au système d'équations différentielles (1), écrit de manière abrégée dans (2). Nous démontrerons le théorème suivant

THÉORÈME. Supposons que sont remplies les conditions suivantes, concernant le système d'équations différentielles (2).

1°. Le système générateur (3) jouit de la propriété L^+ , et le système générateur (4) jouit de la propriété L^- ;

2°. Il existe les nombres positifs

$$\varepsilon, \varepsilon', H_1, H_1', \bar{\rho}, \bar{\rho}'$$

de telle manière qu'on ait

$$|\Phi_A(t, x)| < H_1 \rho_p^{*-s}, \quad |\Phi(t, x)| < H_1' \rho_p^{*-s'},$$

pour

$$\rho_p = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2} > \bar{\rho}, \quad \rho_p^* = \sqrt{x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2} > \bar{\rho}'$$

et

$$-\infty < t < \infty;$$

alors le système (2) a au moins une solution bornée sur tout l'axe réel c'est-à-dire il existe ou moins un point $\bar{x} \in D_1 \times D_2$ de telle manière que l'intégrale $\bar{x} = \bar{x}(t)$, qui satisfait à la condition $\bar{x}(0) = \bar{x}$, soit bornée pour $-\infty < t < \infty$.

Démonstration. Nous considérons d'abord le cas où $0 < p < n$. Nous envisagerons dans l'espace $E^n = E^n(\xi, \eta)$ le domaine

$$g = \{U(\xi) < a, V(\eta) < a\}$$

(le produit cartésien de deux „ellipsoïdes”), où a est une constante positive, dont la valeur sera précisée par la suite. La frontière γ du domaine g est formée des parties correspondantes γ_1 et γ_2 des surfaces $U(\xi) = a$ et $V(\eta) = a$, de la manière suivante

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2,$$

où

$$\gamma_1 = \{U(\xi) = a, V(\eta) > a\}$$

et

$$\gamma_2 = \{U(\xi) \leq a, V(\eta) = a\}.$$

Nous désignerons par

$$G = \{(\xi, \eta) \in g, -\infty < t < +\infty\}$$

un tube dans l'espace $E^{n+1}(t, \xi, \eta)$ construit sur le domaine g . La surface $\Gamma = \{(\xi, \eta) \in \gamma, -\infty < t < \infty\}$ sert évidemment de frontière au domaine tubulaire G .

Nous noterons

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

où

$$\Gamma_1 = \{(\xi, \eta) \in \gamma_1, -\infty < t < +\infty\}, \quad \Gamma_2 = \{(\xi, \eta) \in \gamma_2, -\infty < t < +\infty\}$$

Nous montrerons que chaque point $Q_0(t_0, \xi_0, \eta_0) \in \Gamma_1$ est un point de sortie stricte du domaine G . En effet, si $Q_0 \in \Gamma_1$, nous avons conformément à la première équation du système (2)

$$\frac{dU(Q_0)}{dt} = (\text{grad } U(\xi_0), A(\xi_0)) + (\text{grad } U(\xi_0), \Phi_A(t_0, x_0)).$$

Tenant compte de l'inégalité de Cauchy-Bounyakowski et de la condition 2° du théorème, nous obtenons

$$|(\text{grad } U(\xi_0), \Phi_A(t_0, x_0))| \leq |\text{grad } U(\xi_0)| \cdot |\Phi_A(t_0, x_0)| < H \cdot H_1 \rho_p^{1-s}$$

Utilisant la condition 1° du théorème, nous avons

$$\frac{dU(Q_0)}{dt} \geq h \rho_p - H \cdot H_1 \rho^{1-\varepsilon} = h \rho_p \left(1 - \frac{H H_1}{h} \cdot \frac{1}{\rho_p^\varepsilon}\right).$$

Choissant $\rho_p > \max(\rho^{(0)}, \rho)$ suffisamment grand — et pour cela le nombre a devra être suffisamment grand — nous obtenons $1 - \frac{H \cdot H_1}{h} \cdot \frac{1}{\rho_p^\varepsilon} > 0$, d'où il vient

$$\frac{dU(Q_0)}{dt} > 0.$$

Puisque $V(Q_0) < a$, il résulte évidemment que le point Q_0 est un point de sortie stricte du tube G .

L'on démontre de manière analogue qu'en choisissant convenablement le nombre a pour chaque point $Q'_0(t, \xi'_0, \eta'_0) \in \Gamma_2$ nous avons l'inégalité

$$\frac{dv(Q'_0)}{dt} < 0$$

le point Q'_0 ne peut donc être un point de sortie du domaine G . Par conséquent Γ_1 représente l'ensemble de tous les points de sortie du domaine G et chaque point de cet ensemble est un point de sortie stricte du domaine G .

Nous fixerons maintenant les valeurs t_0 et $\eta_0 = \{x_{p+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\}$, $(V(\eta_0) < a)$ et nous considérerons la section correspondante $z = z(t_0, \xi, \eta_0)$ du tube G , où t_0 et η_0 jouent le rôle de paramètres. L'ensemble z représente évidemment l'intérieur fermé de l'ellipsoïde $U(\xi) \leq a$. L'ensemble $z \cap \Gamma_1$ est par conséquent l'ellipsoïde $U(\xi) = a$. L'ensemble Γ_1 admet une application retraite sur l'ensemble $z \cap \Gamma_1$; pour effectuer une telle application il suffit qu'à chaque point $Q(t, \xi, \eta) \in \Gamma_1$ on fasse correspondre le point $Q_0(t_0, \xi, \eta_0) \in z \cap \Gamma_1$. Conformément au lemme, il n'existe pas d'application retraite de l'ellipsoïde fermé $U(\xi) \leq a$ sur sa surface $U(\xi) = a$. Par conséquent, il n'existe pas d'application retraite de l'ensemble z sur l'ensemble $z \cap \Gamma_1$. Mais alors, en vertu du principe topologique de Wazewski [1], on peut pour tout système de nombres (t_0, η_0) choisir la valeur $\xi_0 = \xi(t_0, \eta_0)$ de telle manière que l'intégrale correspondante

$$\bar{x} = \bar{x}(t; t_0, x_0),$$

définie par les conditions initiales $\bar{x}|_{t=t_0} = \|\xi_0\|$, soit pour $t \geq t_0$, entièrement située à l'intérieur du tube fermé $\bar{G} = G \cup \Gamma$

Par conséquent, il existe dans l'espace $Ox_1 x_2 \dots x_n$ une famille $(n-p)$ -paramétrique $\mathcal{M}_{n-p}$ d'intégrales du système (2), bornées pour $t \rightarrow +\infty$.

En remplaçant t par $-t$, nous obtenons le résultat que dans l'espace $Ox_1 x_2 \dots x_n$ existe également une famille p -paramétrique $\mathcal{M}_p$ d'intégrales du système (2), bornées pour $t \rightarrow -\infty$.

Nous considérerons maintenant l'espace $Ox_1 x_2 \dots x_n$ et nous désignerons par S_m ($m = 1, 2, \dots$) l'intersection de l'ensemble des intégrales du système (1) qui sont bornées pour $t \rightarrow +\infty$ et qui appartiennent au tube fermé $\bar{G}$ pour $-m \leq t < +\infty$ avec l'hyperplan $t = 0$. Conformément à ce qui a été démontré, l'ensemble S_m n'est pas vide pour aucun m et nous avons

$$S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_m \supset \dots$$

En vertu de la propriété de continuité des intégrales par rapport aux conditions initiales, les ensembles S_m sont fermés. Il existe donc le point $\bar{x} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} S_m$. L'intégrale $\bar{x} = \bar{x}(t)$ définie par la condition initiale $\bar{x}(0) = \bar{x}$ existe évidemment pour toutes les valeurs de t de l'intégralle $(-\infty, \infty)$ et est entièrement contenue dans le tube fermé $\bar{G}$, c'est-à-dire qu'elle est bornée sur tout l'axe réel $-\infty < t < \infty$.

Par conséquent, il existe au moins une intégrale

$$\bar{x} = \bar{x}(t)$$

du système (1), bornée sur tout l'axe réel infini $-\infty < t < \infty$, et la valeur du diamètre du tube G , dans lequel cette intégrale est située, dépend du choix du nombre a . Il existe donc le nombre positif $r_0 = r_0(a)$ de telle manière que l'on ait

$$|\bar{x}(t)| < r_0$$

pour $-\infty < t < \infty$.

Les cas $p = 0$ ou $p = n$ conduisent à une démonstration analogue beaucoup plus simple et les conclusions du théorème subsistent cette fois encore.

Le théorème est ainsi entièrement démontré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Brouwer L. E. J., *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann., 71, 97—115 (1912).
- [2] Демидович Б. П., *Об ограниченных решениях нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений*. Матем. сборник, 40, 1, 73—90 (1956).
- [3] Wazewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*. Ann. Soc. Polon. de Math., 20, 279—313 (1947).

Réçu le 17. I. 1960.