Let us admit that $f''(x^*) < 0$ at somme $x^* \in (0, 1)$; then it follows from the continuity of f''(x) that, if $\delta_n \to 0$ and n is sufficiently large, there exists C > 0 such that f''(x) < -C for all $x \in (x^* - \delta_n, x^* + \delta_n)$.

2

Putting

$$\delta_n = n^{-\frac{1}{4}}, \ P_k = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$F_2 = \max_{\mathbf{x} \in [0,1]} |f''(\mathbf{x})|$$

 $\sum_{1}(x) = \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta_{n}} \lambda_{k} P_{k}, \quad \sum_{2}(x) = \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta_{n}} \lambda_{k} P_{k},$

we obtain by the well-known inequalities (see, for instance, [2], p. 6)

$$\sum_{1}(x^{*}) < \frac{C(1-x^{*})(x^{*}-\delta_{n})}{2n(n+1)} \sum_{\left|\frac{k}{n}-x^{*}\right| < \delta_{n}} P_{k}, \ (\delta_{n} < x^{*}),$$

$$\left|\sum_{2}(x^{*})\right| \leq \frac{(1-x^{*})F_{2}}{8n(n+1)\sqrt{n}}$$

Since

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x^{\star}\right|<\delta_{n}}P_{k}=1,$$

it follows that for all sufficiently large n

$$\sum_{1}(x^{*}) > |\sum_{2}(x^{*})|.$$

Hence then

$$\sum_{1}(x^{*}) + \sum_{2}(x^{*}) = B_{n+1}(x^{*}) - B_{n}(x^{*}) > 0,$$

which is a contradiction. Therefore $f''(x) \ge 0$ in [0, 1], i.e. f(x) is

BIBLIOGRAPHY

- [1] Aramă O., Proprietăți privind monotonia șirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein și aplicarea lor la studiul aproximării funcțiilor. Studii și Cercetări de Matematică (Cluj), VIII, 195-210 (1957).
- [2] Lorentz G. G., Bernstein polynomials. Toronto 1953.

Received 6. VI. 1960.

UN CRITÈRE POUR DÉCIDER SI L'INTÉGRALE D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON-LINÉAIRES EST BORNÉE

pa

I. MUNTEANU

à Cluj

Dans le présent travail on donne un critère pour décider si au moins une des intégrales d'un système donné d'équations différentielles non linéaires est bornée sur tout l'axe réel $-\infty < t < +\infty$. I,a méthode de démonstration est basée sur le principe topologique bien connu de T. WAZEWSKI [1] et sur les recherches de B. P. DEMIDOVITCH [2]; un des résultats de ce dernier s'obtient comme cas particulier du théorème démontré dans ce travail.

Considérons le système de n équations différentielles non-linéaires

$$\begin{cases}
\frac{dx_1}{dt} = A_1(x_1, x_2, \dots, x_p) + \varphi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\
\frac{dx_2}{dt} = A_2(x_1, x_2, \dots, x_p) + \varphi_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\
\frac{dx_p}{dt} = A_p(x_1, x_2, \dots, x_p) + \varphi_p(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\
\frac{dx_{p+1}}{dt} = B_1(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n) + \varphi_{p+1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\
\frac{dx_{p+2}}{dt} = B_2(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n) + \varphi_{p+2}(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\
\frac{dx_n}{dt} = B_{n-p}(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n) + \varphi_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),
\end{cases}$$

2

où les fonctions A_i , B_i et φ_k $(i=1,2,\ldots,p;j=1,2,\ldots,n-p;k=1,2,\ldots,n;0 \le p \le n)$ sont définies et continues respectivement dans les domaines

$$D_1: \sum_{i=1}^p x_i^2 < \infty, \ D_2: \sum_{i=p+1}^n x_i^2 < \infty \ \text{ et } \ D_1 \times D_2 \times I, \ \text{ où } \ I = (-\infty, +\infty).$$

Nous supposerons de plus que certaines conditions sont remplies qui assurent l'unicité et la possibilité du prolongement des intégrales.

Nous allons introduire les notations matricielles

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n-p} \end{bmatrix}, \Phi_A = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{bmatrix}, \Phi_B = \begin{bmatrix} \varphi_{p+1} \\ \varphi_{p+2} \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}, \quad \xi = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{vmatrix}, \quad \eta = \begin{vmatrix} x_{p+1} \\ x_{p+2} \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}, \quad x = \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix}$$

Le système (1) s'écrit alors plus brièvement

(2)
$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = A(\xi) + \Phi_A(t, x), \\ \frac{d\eta}{dt} = B(\eta) + \Phi_B(t, x), \end{cases}$$

et les systèmes générateurs respectifs s'écriront

$$\frac{d\xi}{dt} = A(\xi)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = B(\eta)$$

Dans l'espace euclidéen E^s à s dimensions nous désignerons par ρ_s la distance de l'origine $O(0, 0, \ldots, 0)$ au point $M(x_1, x_2, \ldots, x_s)$

$$\rho_s = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_s^2}, \text{ où } 1 \le s \le n.$$

Considérons dans un espace quelconque deux ensembles A et B, tels que $A \subset B$. Soit P un point de cet espace. On dit qu'une application Q = T(P) effectue une retraite de B dans A si elle est continue dans B et si

$$T(P) \in A$$
, quand $P \in B$, $T(P) = P$, quand $P \in A$.

Si une telle application existe, A s'appelle un retrait de B.

Dans l'espace E^s considérons la fonction $U(x_1, \ldots, x_s)$, continue et définie positivement et à dérivées partielles continues. La surface $U(x_1, x_2, \ldots, x_s) = a$, où a est une constante positive, est homéomorphe à la sphère $\Sigma: x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_s^2 = 1$. Nous désignerons par D l'ensemble des points (x_1, x_2, \ldots, x_s) pour lesquels $U(x_1, x_2, \ldots, x_s) \leq a$ et par F la frontière de cet ensemble.

Le m m e. La frontière F n'est pas un retrait pour l'ensemble D.

Démonstration. Nous allons supposer le contraire, c'est-à-dire qu'il existe une application Q=T(P) qui effectue une retraite de D dans F. Puisque F est homéomorphe à la sphère, soit R=V(Q) l'application continue correspondante qui transforme la frontière F dans la surface de la sphère $\Sigma: x_1^2+x_2^2+\ldots+x_s^2=1$. Soit maintenant S=W(R) l'application qui fait correspondre à chaque point $R \in \Sigma$ son antipode $S \in \Sigma$. Cette transformation est évidemment continue. L'application

$$S = W(R) = W(V(Q)) = W(V(T(P)))$$

est continue dans D et transforme l'ensemble D en une de ses parties. Mais cette application n'a aucun point fixe, c'est-à-dire aucun point jouissant de la propriété P = W(V(T(P))), ce qui contredit le théorème bien connu du point fixe de BROUWER [3].

Considérons le système de s équations différentielles

(5)
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = P_1(x_1, x_2, \dots, x_s), \\ \frac{dx_2}{dt} = P_2(x_1, x_2, \dots, x_s), \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{dx_s}{dt} = P_s(x_1, x_2, \dots, x_s). \end{cases}$$

qui, à l'aide de la notation abrégée $P=(P_1,\,P_2,\,\ldots,\,P_s)$, s'écrira de la manière suivante

$$\frac{dx}{dt} = P(x).$$

UN CRITÈRE

287

Nous introduirons deux définitions relativement au système (5'):

Première définition. Nous dirons que le système (5') jouit de la propriété L^+ , s'il existe une fonction $U(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ définie positivement et des constantes positives h, H, $\rho^{(0)}$ de telle manière que l'on ait

$$(\operatorname{grad} U, P) \geq h \rho_s \text{ et } |\operatorname{grad} V| \leq H \rho_s$$

pour $\rho_s > \rho^{(0)}$.

Deuxième définition. Nous dirons que le système (5') jouit de la propriété L^- , s'il existe une fonction $V(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, définie positivement, et des constantes positives h', H', $\rho^{(0)'}$ de telle manière que

$$(\operatorname{grad} V, P) \leq -h' \rho_s$$
 et $|\operatorname{grad} V| \leq H' \rho_s$

Nous reviendrons maintenant au système d'équations différentielles (1), écrit de manière abrégée dans (2). Nous démontrerons le théorème

THÉORÈME. Supposons que sont remplies les conditions suivantes, concernant le système d'équations différentielles (2).

1°. Le système générateur (3) jouit de la propriété L+, et le système générateur (4) jouit de la propriété L-; 2°. Il existe les nombres positifs

substituting
$$\epsilon$$
, ϵ' , H_1 , H'_1 , $\overline{\rho}$, $\overline{\rho}'$ will be not the expectation $\overline{\rho}$

de telle manière qu'on ait

$$|\Phi_{\mathbf{A}}(t,x)| < H_1 \rho_p^{-\epsilon}, \quad |\Phi(t,x)| < H'_1 \rho_p^{*-\epsilon'},$$

pour

$$\rho_p = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2} > \overline{\rho}, \quad \rho_p^* = \sqrt{x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2} > \overline{\rho}'$$

et

$$-\infty < t < \infty$$
;

alors le système (2) a au moins une solution bornée sur tout l'axe réel c'est-à-dire il existe ou moins un point $x \in D_1 \times D_2$ de telle manière que l'intègrale $\overline{x} = \overline{x}(t)$, qui satisfait à la condition $\overline{x}(0) = \overline{x}$, soir bornée pour $-\infty < t < \infty$.

Démonstration. Nous considérons d'abord le cas où 0 .Nous envisagerons dans l'espace $E^n = E^n$ (ξ , η) le domaine

$$g = \{U(\xi) < a, V(\eta) < a\}$$

(le produit cartésien de deux ,,ellipsoïdes"), où a est une constante positive, dont la valeur sera précisée par la suite. La frontière γ du domaine g est formée des parties correspondantes γ_1 et γ_2 des surfaces $U(\xi)=a$ et $V(\eta) = a$, de la manière siuvante

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

où

5

$$\gamma_1 = \{ U(\xi) = a, \ V(\eta) > a \}$$

et

$$\gamma_2 = \{ U(\xi) \le a, \ V(\eta) = a \}.$$

Nous désignerons par

$$G = \{(\xi, \eta) \in g, -\infty < t < +\infty\}$$

un tube dans l'espace $E^{n+1}(t, \xi, \eta)$ construit sur le domaine g. La surface $\Gamma = \{(\xi, \eta) \in \gamma, -\infty < t < \infty\}$ sert évidemment de frontière au domaine tubulaire G. Nous noterons

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

$$\Gamma_1 = \{(\xi, \eta) \in \gamma_1, -\infty < t < +\infty\}, \Gamma_2 = \{(\xi, \eta) \in \gamma_2, -\infty < t < +\infty\}$$

Nous montrerons que chaque point $Q_0(t_0, \xi_0, \eta_0) \in \Gamma_1$ est un point de sortie stricte du domaine G. En effet, si $Q_0 \in \Gamma_1$, nous avons conformément à la première équation du système (2)

$$\frac{dU(Q_0)}{dt} = (\text{grad } U(\xi_0), A(\xi_0)) + (\text{grad } U(\xi_0), \Phi_A(t_0, x_0)).$$

Tenant compte de l'inègalité de Cauchy-Bounyakowski et de la condition 2° du théorème, nous obtenons

$$|(\operatorname{grad} U(\xi_0), \Phi_A(t_0, x_0))| \leq |\operatorname{grad} U(\xi_0)|. |\Phi_A(t_0, x_0)| < H.H_1 \rho_p^{1-\epsilon}$$

UN CRITÈRE

289

Utilisant la condition 1° du théorème, nous avons

$$\frac{dU(Q_0)}{dt} \geq h \rho_p - H \cdot H_1 \rho^{1-\epsilon} = h \rho_p \left(1 - \frac{HH_1}{h} \cdot \frac{1}{\rho_p^{\epsilon}}\right).$$

Choisissant $\rho_p > \max(\rho^{(0)}, \rho)$ suffisamment grand — et pour celà le nombre a devra être suffisamment grand — nous obtenons $1 - \frac{H \cdot H_1}{h} \cdot \frac{1}{\rho_n^e} > 0$, d'où il vient

$$\frac{dU(Q_0)}{dt} > 0.$$

Puisque $V(Q_0) < a$, il résulte évidemment que le point Q_0 est un point de sortie stricte du tube G.

L'on démontre de manière analogue qu'en choisissant convenablement le nombre a pour chaque point $Q_0'(t, \xi_0', \eta_0') \in \Gamma_2$ nous avons l'inégalité

$$\frac{dv(Q_0')}{dt} < 0$$

le point Q' ne peut donc être un point de sortie du domaine G. Par conséquent Γ_1 représente l'ensemble de tous les points de sortie du domaine G et chaque point de cet ensemble est un point de sortie stricte du domaine G.

Nous fixerons maintenant les valeurs t_0 et $\eta_0 = \{x_{p+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\}$, $\{V(\eta_0) < a\}$ et nous considérerons la section correspondante $z = z(l_0, \xi, \eta_0)$ du tube G, où t_0 et η_0 jouent le rôle de paramètres. L'ensemble z représente évidemment l'intérieur fermé de l'éllipsoïde $U(\xi) \leq a$. L'ensemble $z \cap \Gamma_1$ est par conséquent l'éllipsoïde $U(\xi)=a$. L'ensemble Γ_1 admet une application retraite sur l'ensemble $z \cap \Gamma_1$; pour effectuer une telle application il suffit qu'à chaque point $Q(t, \xi, \eta) \in \Gamma_1$ on fasse correspondre le point $Q_0(t_0, \xi, \gamma_0) \in z \cap \Gamma_1$. Conformément au lemme, il n'existe pas d'application retraite de l'ellipsoïde fermé $U(\xi) \leq a$ sur sa surface $U(\xi) = a$. Par conséquent, il n'existe pas d'application retraite de l'ensemble z sur l'ensemble $z \cap \Gamma_1$. Mais alors, en vertu du principe topologique de Wazewski [1], on peut pour tout système de nombres (t_0, η_0) choisir la valeur $\xi_0 = \xi(t_0, \eta_0)$ de telle manière que l'intégrale correspondante

$$\overline{x} = \overline{x}(t; t_0, x_0), \quad \exists forg$$

définie par les conditions initiales $\overline{x}|_{t=t_0} = \left\| \frac{\xi_0}{\eta_0} \right\|$, soit pour $t \ge t_0$, entièrement située à l'intérieur du tube fermé $\overline{G} = G \cup \Gamma$

Par conséquent, il existe dans l'espace $Ox_1x_2...x_n$ une famille (n-p)-1paramétrique \mathcal{M}_{n-p} d'intégrales du système (2) bornées pour $t \to +\infty$.

En remplaçant t par -t, nous obtenons le résultat que dans l'espace $0x_1 x_2 \dots x_n$ existe également une famille p-paramétrique \mathcal{M}_p d'intégrales du système (2), bornées pour $t \to -\infty$.

Nous considérerons maintenant l'espace $Ot x_1 x_2 \dots x_n$ et nous désignerons par S_m ($m=1,2,\ldots$) l'intersection de l'ensemble des intégrales du système (1) qui sont bornées pour $t \to +\infty$ et qui appartiennent au tube fermé \overline{G} pour $-m \le t < +\infty$ avec l'hyperplan t=0. Conformément à ce qui a été démontré, l'ensemble Sm n'est pas vide pour aucun m et nous avons

$$S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_m \supset \ldots$$

En vertu de la propriété de continuité des intégrales par rapport aux conditions initiales, les ensembles S_m sont fermés. Il existe donc le point $\overline{x} \in \bigcap^{\infty} S_m$. L'intégrale $\overline{x} = \overline{x}(t)$ définie par la condition initiale $\overline{x}(0) = \overline{x}$ existe évidemment pour toutes les valeurs de t de l'intégralle $(-\infty, \infty)$ et est entièrement contenue dans le tube fermé \overline{G} , c'est-à-dire qu'elle est bornée sur tout l'axe réel $-\infty < t < \infty$.

Par conséquent, il existe au moins une intégrale

$$\overline{x} = \overline{x}(t)$$

du système (1), bornée sur tout l'axe réel infini $-\infty < t < \infty$, et la valeur du diamètre du tube G, dans lequel cette intégrale est située, dépend du choix du nombre a. Il existe donc le nombre positif $r_0 = r_0(a)$ de telle manière que l'on ait

$$|\overline{x}(t)| < r_0$$

pour $-\infty < t < \infty$.

Les cas p = 0 ou p = n conduisent à une démonstration analogue beaucoup plus simple et les conclusions du théorème subsistent cette fois encore. Le théorème est ainsi entièrement démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Brouwer L. E. J., Über Abbildung von Manningfaltigkeiten. Math. Ann., 71, 97-115

[2] Демидович Б. П., Об ограниченных решениях нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Матем. сборник, 40, 1, 73-90 (1956).

[3] Wazewski, Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires. Ann. Soc. Polon. de Math., 20, 279 -313 (1947).

Récu le 17. I. 1960.

7 — Mathematica