

Si nous posons  $l_0 = 0$ ,  $l_j = k_1 + k_2 + \dots + k_j + jn$ ,  $j = 1, 2, \dots, p-1$ , nous avons  $y_{l_{j-1}+r} = z_j$ ,  $r = 1, 2, \dots, k_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  et

$$(\alpha) \quad y_{l_{j-1}+k_j} < y_{l_{j-1}+k_j+1} < \dots < y_{l_{j-1}+k_j+n} < y_{l_j+1}$$

$$j = 1, 2, \dots, p-1.$$

Mais, d'après le théorème 6, la différence divisée  $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$  est une moyenne arithmétique généralisée (avec des poids positifs convenables) des différences divisées

$$(\beta) \quad [y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+n+2}; f], \quad i = 1, 2, \dots, n(p-1) + 1.$$

Ces différences divisées jouissent de la propriété que leurs noeuds sont toujours compris dans le plus petit intervalle fermé contenant les points  $x_i$  et qu'au plus un de ces noeuds est multiple, avec un ordre de multiplicité  $\leq k$ , les autres étant simples (les différences divisées  $(\beta)$  sont donc bien définies).

Si les différences divisées  $(\beta)$  ne sont pas toutes égales, on peut trouver (au moins) une dont la valeur est  $< C$  et (au moins) une dont la valeur est  $> C$ . L'existence des noeuds distincts  $x'_i$  vérifiant l'égalité (41) s'établit alors comme dans le cas 1 du nr. 18.

Si les différences divisées  $(\beta)$  sont toutes égales, alors leur valeur commune est  $C$  et le lemme 2\* résulte en prenant, par exemple,  $x'_i = y_{k_1+i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+2$ , qui sont bien  $n+2$  points distincts du plus petit intervalle fermé contenant les noeuds  $x_i$ .

Le lemme 2\* est donc démontré.

Il est facile de voir que les lemmes 2 et 2\* sont équivalents. De cette façon sont éliminées les quelques fautes typographiques et de transcription du manuscrit qui se sont glissées dans la démonstration du lemme 2\*).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] Popoviciu T., Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse. *Mathematica*, 1 (24), 95-142 (1960).

Reçu le 26. V. 1960.

\*) Ces erreurs, de la p. 116, facile à apercevoir doivent être corrigées de la manière suivante :

|       |    |                 |            |                 |
|-------|----|-----------------|------------|-----------------|
| ligne | 8  | $k_1 + k_p > 2$ | au lieu de | $k_1 + k_2 > 2$ |
| "     | 9  | $k_p > 1$       | "          | $k_1 > 1$       |
| "     | 10 | $k_1 > 1$       | "          | $k_2 > 1$       |
| "     | 11 | $k_1 = k_p = 1$ | "          | $k_1 = k_2 = 1$ |

## EINE BEDINGUNG FÜR DIE REGULARITÄT DER GEWEBE

von

F. RADÓ

Cluj

1. Wir schliessen uns an die Arbeit [2] an und fassen die abstrakten 3-Gewebe als Quasigruppen auf<sup>1)</sup>.

Alle  $L$ -Isotope (d.h. Isotope die Loops sind) einer regulären Quasigruppe sind einander isomorph, aber das Umgekehrte gilt nicht: aus dem Isomorphismus aller  $L$ -Isotope einer Quasigruppe folgt nicht die Regularität. Dies legt es nahe zu fragen, wie man die Bedingung des Isomorphismus aller  $L$ -Isotope so verschärfen kann, dass man eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Regularität einer Quasigruppe bekommt. Wir brauchen dabei nicht die Gesamtheit der  $L$ -Isotope ins Auge zu fassen, es genügen die Loop-Haupt-Isotope, denn jedes  $L$ -Isotop ist mit einem  $L$ -H-Isotop isomorph. Eine Antwort auf die gestellte Frage ist im Satz 1 gegeben. Aus diesem Satz folgt ein einfacher Beweis für die Gleichwertigkeit der Reidemeister-Bedingung mit der Regularität der Quasigruppen.

Die im Satz 1 enthaltene Bedingung lässt sich auf abstrakte räumliche Gewebe verallgemeinern, und die äquivalente Reidemeister-Bedingung führt zu einem räumlichen Schliessungssatz. Die diesem Schliessungssatz genügenden räumlichen Gewebe enthalten als Sonderfälle die in [5] eingeführten drei Arten der regulären räumlichen Gewebe.

2. Wir wollen hier einige der Begriffe und der Resultate aus [5] zusammenfassend vorausschicken.

Unter einem *räumlichen abstrakten Gewebe* wird eine nichtleere Menge verstanden (deren Elemente die Punkte des Gewebes genannt werden) zusammen mit vier Systemen von Teilmengen (deren Elemente als die Ebenen erster, zweiter, dritter und vierter Art bezeichnet werden), wobei

<sup>1)</sup> Zur Theorie der Quasigruppen und der Gewebe s. [3] und [4].

die folgenden Eigenschaften zutreffen: 1) Jeder Punkt gehört genau je einer Ebene der vier Arten an; 2) drei Ebenen verschiedener Art haben genau einen Punkt gemeinsam. Zwei solche Gewebe heissen *isomorph*, wenn die Punkte und Ebenen der einen auf die der anderen mit Erhaltung der Inzidenzen umkehrbar abgebildet werden können.

Die Menge  $Q$  zusammen mit der ternären Operation  $t = f(x, y, z)$  heisst eine *N-Algebra*, falls die Gleichungen  $f(x, b, c) = d$ ,  $f(a, y, c) = d$ ,  $f(a, b, z) = d$  je eine einzige Lösung in  $Q$  besitzen ( $a, b, c, d \in Q$ ). Wir bezeichnen diese N-Algebra mit  $(Q, f)$ . Gibt es  $e \in Q$  so dass

$$f(x, e, e) = f(e, x, e) = f(e, e, x) = x,$$

so heisst  $(Q, f)$  eine *L-Algebra* und  $e$  sein *neutrales Element*.

$(Q, f)$  und  $(R, g)$  sind *isotop*, wenn es solche umkehrbare Abbildungen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  von  $Q$  auf  $R$  gibt, dass

$$g(x\alpha, y\beta, z\gamma) = f(x, y, z)\delta, \quad x, y, z \in Q$$

( $x\alpha$  bezeichnet das Bild von  $x$  bei der Abbildung  $\alpha$ ). Wenn ein Isotop zugleich eine L-Algebra ist, dann heisst es ein *L-Isotop*. Ist  $R = Q$  und  $\delta$  die identische Abbildung, dann haben wir ein *Hauptisotop*. Ist ein Isotop sowohl L-Isotop wie auch Hauptisotop, dann bezeichnen wir es als ein *L-H-Isotop*. Im Falle  $\alpha = \beta = \gamma = \delta$  geht die Isotopie in *Isomorphismus* über. Jedes Isotop einer N-Algebra ist isomorph mit einem seiner Hauptisotope. Die durch die Formel

$$(1) \quad f(x, y, z) = F[f(x, b, c), f(a, y, c), f(a, b, z)], \quad a, b, c \in Q$$

bestimmte Operation  $F$  stellt ein L-H-Isotop von  $(Q, f)$  dar, und man bekommt in dieser Weise sämtliche L-H-Isotope von  $(Q, f)$ , wenn man  $a, b, c$  in  $Q$  variiert. Das neutrale Element von  $(Q, F)$  ist  $e_F = f(a, b, c)$ .

Es zeigt sich leicht, dass die vier Ebenensysteme eines abstrakten räumlichen Gewebes gleichmächtige Mengen sind. Wir wählen die umkehrbaren Abbildungen  $\varphi_i$  der Ebenen  $i$ -ter Art auf eine und dieselbe Menge  $Q$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Dann können wir zu den Elementen  $x, y, z$  von  $Q$  den einzigen gemeinsamen Punkt der Ebenen  $x\varphi_1^{-1}, y\varphi_2^{-1}, z\varphi_3^{-1}$  zuordnen; die Ebene vierter Art, die diesen Punkt enthält, soll mit  $E_4$  bezeichnet werden. Indem wir jetzt den Elementen  $x, y, z$  das Element  $E_4\varphi_4$  von  $Q$  zuordnen, erhalten wir eine ternäre Operation, die  $Q$  zu einer N-Algebra macht. Wenn man die Abbildungen  $\varphi_i$  variiert, dann entstehen alle Isotope dieser N-Algebra. Man findet so eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Klassen der isomorphen räumlichen Gewebe und den Klassen der Isotope N-Algebren. Man findet im Rahmen dieser Zuordnung, zu einer gegebenen N-Algebra  $(Q, f)$  ein entsprechendes Gewebe in folgender Weise: Die Punkte des Gewebes sind die geordneten Tripel  $(x, y, z)$ , wo  $x \in Q, y \in Q, z \in Q$ ; die

vier Arten von Ebenen sind die Mengen von Tripeln, die den Bedingungen  $x = a$  bzw.  $y = b$  bzw.  $z = c$  bzw.  $f(x, y, z) = d$  genügen. Wird kein Unterschied zwischen den isomorphen Geweben gemacht, so wird die Gesamtheit der räumlichen Gewebe mittels der vorstehenden Konstruktion erschöpft. Wir können also die Gewebe schlechthin als N-Algebren auffassen, wobei die isotopen N-Algebren als identisch zu betrachten sind.

Wird in  $f(x, y, z)$   $z$  fixiert, so erhalten wir die Quasigruppe  $(Q, \circ)$

$$x \circ y = f(x, y, z_0).$$

Die Gesamtheit der L-H-Isotope aller dieser Quasigruppen ( $z_0$  durchläuft die Menge  $Q$ ) ist identisch mit der Menge der Loops  $(x, y) \rightarrow F(x, y, e_F)$ , wo  $F$  alle L-H-Isotope von  $(Q, f)$  durchläuft. Es folgt hieraus, dass, bei jeder Festhaltung von  $z$ , das räumliche Gewebe dann und nur dann in reguläre 3-Gewebe übergeht, wenn  $F(x, y, e_F)$  assoziativ ist, und in stark reguläre, wenn  $F(x, y, e_F) = F(y, x, e_F)$  ( $(Q, F)$  ist ein willkürliches L-H-Isotop von  $(Q, f)$ ).

Die N-Algebra  $(Q, f)$  heisst *1-zerlegbar*, wenn

$$f(x, y, z) = x \circ (y \bullet z),$$

wo  $\circ$  und  $\bullet$  Quasigruppenoperationen auf  $Q$  bezeichnen. Die Schliessungsbedingung

$$(Z_1) \quad f(x_1, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_2) \Rightarrow f(x_2, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2)$$

ist notwendig und hinreichend für die 1-Zerlegbarkeit, ebenfalls die Beziehung

$$(2) \quad F(x, e, y) = F(x, y, e),$$

wo  $F$  die Operation des willkürlichen L-H-Isotops von  $(Q, f)$  ist und  $e = e_F$  das zugehörige neutrale Element. Ebenso definiert man die 2- und 3-Zerlegbarkeit. Die entsprechenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen lauten: für 2-Zerlegbarkeit:

$$(Z_2) \quad f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_1, z_2) \Rightarrow f(x_1, y_2, z_1) = f(x_2, y_2, z_2),$$

oder

$$(2') \quad F(e, x, y) = F(y, x, e);$$

für 3-Zerlegbarkeit:

$$(Z_3) \quad f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_1) \Rightarrow f(x_1, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_2).$$

oder

$$(2'') \quad F(e, x, y) = F(x, e, y).$$

Die N-Algebra  $(Q, f)$  heisst *2-regulär*, wenn sie mit  $(x, y, z) \rightarrow x \circ y \circ z$  isotop ist, wo  $\circ$  eine Gruppenoperation bezeichnet. Dann ist  $(Q, f)$  auch mit  $(x, y, z) \rightarrow z \circ y \circ x$  isotop, aber in Allgemeinen nicht mit  $(x, y, z) \rightarrow y \circ x \circ z$  und  $x \circ z \circ y$ . Trifft einer dieser letzteren Fälle zu, so heisst  $(Q, f)$  *1-* bzw. *3-regulär*. In [5] wurde bewiesen, dass für die *i*-Regularität die Bedingung  $Z_j \& Z_k$  notwendig und hinreichend ist ( $i, j, k$  ist eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3). Dazu wurde die von J. ACZÉL, V. D. BELOUSOV und M. HOSSZÚ gegebene Lösung der Funktionalgleichung der verallgemeinerten Assoziativität in Quasigruppen benützt [1]. Auch die Bedingung  $Z_j \& Z_k$  kann durch eine gemeinsame Eigenschaft aller L-H-Isotope  $(Q, F)$  von  $(Q, f)$  ausgedrückt werden.

$Z_2 \& Z_3$  ist äquivalent mit

$$(3) \quad F(e, x, y) = F(x, e, y) = F(y, x, e),$$

$Z_1 \& Z_3$  mit

$$(3') \quad F(e, x, y) = F(x, e, y) = F(x, y, e)$$

und  $Z_1 \& Z_2$  mit

$$(3'') \quad F(e, x, y) = F(y, e, x) = F(y, x, e).$$

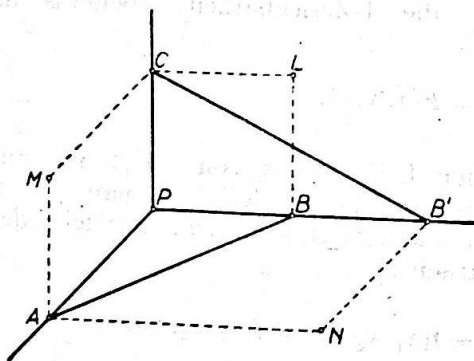


Abb. 1

Die Abbildung 1 veranschaulicht die Schliessungsbedingung  $Z_1 \& Z_3$ . Die Ebenen der ersten drei Arten sind durch Parallele zu den Koordinatenebenen dargestellt,  $P, B, B'$  sind drei willkürliche Punkte auf einer Parallelen zur  $y$ -Achse, die Ebene 4-ter Art durch  $B$  schneidet die Parallele zur  $x$ -Achse durch  $P$  in  $A$ , jene durch  $B'$  die Parallele zur  $z$ -Achse in  $C$ ; es werden Rechtecke auf die Strecken  $PB$  und  $PC$ ,  $PC$  und  $PA$ ,  $PA$  und  $PB'$  gebaut.

Die Bedingung  $Z_1 \& Z_3$  besagt, dass dieselbe Ebene vierter Art liegen.

Die N-Algebra  $(Q, f)$  heisst *stark regulär*, wenn sie mit  $(x, y, z) \rightarrow x + y + z$  isotop ist, wo  $+$  eine kommutative Gruppenoperation bezeichnet. Dazu ist  $Z_1 \& Z_2 \& Z_3$  notwendig und hinreichend.

Die N-Algebra  $(Q, f)$  heisst *halb regulär*, wenn sie die folgende Oktaeder-Bedingung befriedigt:

$$(O) \quad f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) = f(x_1, y_1, z_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x_1, y_2, z_2) = f(x_2, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_1).$$

Dazu ist notwendig und hinreichend:

$$(4) \quad F(e_F, x, x) = F(x, e_F, x) = F(x, x, e_F),$$

für jedes L-H-Isotop  $(Q, F)$  von  $(Q, f)$ .

3. Wir beweisen den folgenden Satz für Quasigruppen.

**SATZ 1.** Für die Regularität einer Quasigruppe ist notwendig und hinreichend, dass diejenigen seiner L-H-Isotope, die ein vorgegebenes neutrales Element besitzen, zusammenfallen.

Es seien  $(x, y) \rightarrow x \cdot y$  und  $(x, y) \rightarrow x \circ y$  solche zwei L-H-Isotope der gegebenen Quasigruppe  $Q$ , die dasselbe neutrale Element  $e$  haben. Dann gilt:

$$(5) \quad x \cdot y = (x \cdot b) \circ (a \cdot y)$$

für  $a, b, x, y \in Q$ ,  $a \cdot b = e$ .

Nehmen wir an, dass die Quasigruppe regulär ist. Dann sind  $\cdot$  und  $\circ$  Gruppenoperationen. Setzen wir in (5)

$$x = \xi \cdot b^{-1} \quad \text{und} \quad y = a^{-1} \cdot \eta$$

ein, wo  $a^{-1}, b^{-1}$  die Inversen von  $a$  und  $b$  in der Gruppe  $(Q, \cdot)$  bezeichnen, dann erhalten wir

$$\xi \circ \eta = (\xi \cdot b^{-1}) \cdot (a^{-1} \cdot \eta) = \xi \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot \eta = \xi \cdot (a \cdot b)^{-1} \cdot \eta = \\ = \xi \cdot e \cdot \eta = \xi \cdot \eta,$$

also fallen die Operationen  $\cdot$  und  $\circ$  zusammen.

Nehmen wir jetzt an, dass  $\cdot$  und  $\circ$  dieselbe Loopoperation bezeichnen. Wir erhalten die Funktionalgleichung

$$(6) \quad x \cdot y = (x \cdot b) \cdot (a \cdot y) \quad \text{für} \quad a \cdot b = e.$$



Aus (6) folgt

$$(7) \quad b \cdot a = e$$

(indem man  $x = e$ ,  $y = e$  einsetzt) und

$$(8) \quad x = b \cdot (a \cdot x)$$

(indem man in (6)  $x = e$ ,  $y = x$  setzt).

Wir wollen den Ausdruck  $(x \cdot y) \cdot z$  umformen. Hierfür bestimmen wir zuerst  $y' \in Q$  so, dass  $y' \cdot y = e$  und dann  $z'$  so, dass  $y' \cdot z' = z$  sein soll. Man erhält:

$$(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot y) \cdot (y' \cdot z') = x \cdot z'.$$

Aber es ist laut (8)

$$z' = y \cdot (y' \cdot z') = y \cdot z,$$

also

$$(9) \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

Die Loop  $(Q, \cdot)$  ist assoziativ, d.h. eine Gruppe und die gegebene Quasigruppe ist also regulär.

**Folgerung.** Fallen die L-H-Isope einer Quasigruppe, die ein bestimmtes vorgegebenes neutrales Element haben, zusammen, so tun dasselbe auch diejenigen, die irgendein anderes gemeinsames neutrales Element besitzen.

4. Der Satz 1 ermöglicht einen ganz einfachen Beweis für die Gleichwertigkeit der Reidemeister-Bedingung mit der Regularität der 3-Gewebe.

Wir schreiben die Reidemeister-Bedingung in der Form

$$(R) \quad (x_1 y_1 = x_3 y_3 \ \& \ x_1 y_2 = x_3 y_4 \ \& \ x_2 y_1 = x_4 y_3) \Rightarrow x_2 y_2 = x_4 y_4$$

und betrachten die L-H-Isope  $(Q, \cdot)$  und  $(Q, \circ)$  von  $(x, y) \rightarrow xy$ , die durch

$$xy = xb \cdot ay \quad \text{und} \quad xy = xd \circ cy$$

bestimmt werden. Wir setzen voraus, dass sie dasselbe neutrale Element haben, d.h.

$$(10) \quad ab = cd.$$

Nehmen wir an, dass die Bedingung (R) zutrifft und es sei  $\xi, \eta \in Q$ . Die Beziehungen

$$(11) \quad \xi = ab = x'd \quad \text{und} \quad \eta = ay = cy'$$

bestimmen  $x, x', y$  und  $y'$  eindeutig. Aus (10) und (11) folgt durch Anwendung von (R):  $xy = x'y'$ . Wir haben also:

$$\xi \cdot \eta = xb \cdot ay = xy = x'y' = x'd \circ c y' = \xi \circ \eta,$$

d.h.  $(Q, \cdot)$  und  $(Q, \circ)$  sind identisch.

Nehmen wir jetzt an, dass  $(Q, \cdot)$  und  $(Q, \circ)$  zusammenfallen. Es sei  $a = x_1$ ,  $b = y_1$ ,  $c = x_3$ ,  $d = y_3$ . Es folgt aus dem ersten Teil der Implikation (R), wegen

$$xy = xy_1 \cdot x_1 y$$

$$xy = xy_3 \cdot x_3 y,$$

dass  $x_2 y_2 = x_4 y_4$ .

Wir haben also bewiesen, dass die Bedingung (R) mit dem Zusammenfallen derjenigen L-H-Isope äquivalent ist, die gemeinsames neutrales Element besitzen. Zieht man noch den Satz 1 in Betracht, so folgt unsere Behauptung.

**Folgerung.** Wenn die Reidemeister-Bedingung bezüglich einer festen Geraden 3-ter Art und beliebiger Geraden der 1-ten und 2-ten Art erfüllt ist, dann ist diese Bedingung immer erfüllt.

5. Definition. Die N-Algebra  $(Q, f)$  heisst regulär wenn, bei verschiedener Wahl von  $z_0 \in Q$ , die Quasigruppen  $(x, y) \rightarrow f(x, y, z_0)$  regulär und untereinander hauptisotop sind und wenn dasselbe auch für  $(x, y) \rightarrow f(x, y_0, z)$  und für  $(x, y) \rightarrow f(x_0, y, z)$  gilt. Die N-Algebra geht also bei Festhaltung je einer der Veränderlichen  $x, y, z$  in drei Arten von regulären Quasigruppen über und jede Quasigruppe ist ein Hauptisotop jeder anderen derselben Art, aber es wird nicht verlangt, dass eine solche Beziehung zwischen zwei Quasigruppen verschiedener Art bestehen soll.

Unsere Definition ist offenbar isotopieinvariant. Wir können also ein räumliches Gewebe als regulär erklären, wenn eine der zu diesem gehörenden N-Algebren regulär ist. Denn dann sind sie alle regulär.

**Satz 2.** Für die Regularität eines räumlichen Gewebes ist notwendig und hinreichend, dass diejenigen seiner L-H-Isope, die ein vorgegebenes neutrales Element besitzen, zusammenfallen.

Es sei  $(Q, F)$  eine zu unserem räumlichen Gewebe gehörende L-Algebra mit dem neutralem Element  $e$  und  $(Q, \Phi)$  ein beliebiges L-H-Isotop von  $(Q, F)$ . Wir nehmen an, dass  $e_\Phi = e \Rightarrow \Phi = F$ . Alle L-H-Isotope der Quasigruppe  $(Q, F(x, y, e))$  sind gleich, weil sie in der Menge  $\{(Q, \Phi(x, y, e_\Phi) | e_\Phi = e)\}$  enthalten sind, und diese voraussetzungsgemäss aus lauten gleichen Elementen besteht. Aus Satz 1 folgt, dass  $(Q, F(x, y, e))$  eine Gruppe ist. Wir müssen noch zeigen, dass, für  $z_0 \in Q$ , die Quasigruppe  $(Q, F(x, y, z_0))$  ein Hauptisotop von  $(Q, F(x, y, e))$  ist. Dafür wählen wir  $x_0, y_0 \in Q$  so, dass  $F(x_0, y_0, z_0) = e$  und betrachten das durch die folgende Beziehung bestimmte L-H-Isotop  $\Phi'$  von  $(Q, F)$

$$(12) \quad F(x, y, z) = \Phi' [F(x, y_0, z_0), F(x_0, y, z_0), F(x_0, y_0, z)].$$

Es ist  $e_\Phi = F(x_0, y_0, z_0) = e$ , so dass  $\Phi' = F$ . Setzt man in (12)  $z = z_0$  ein,

$$F(x, y, z_0) = F[F(x, y_0, z_0), F(x_0, y, z_0), e] = F(x\alpha, y\beta, e),$$

so sieht man, dass  $(Q, F(x, y, z_0))$  ein Hauptisotop von  $(Q, F(x, y, e))$  ist. Bei Festhaltung der Veränderlichen  $x$  oder  $y$ , geht die L-Algebra  $(Q, F)$  ebenso in reguläre und untereinander hauptisotope Quasigruppen über.

Ist umgekehrt das räumliche Gewebe regulär, dann soll wieder  $(Q, F)$  eine zu ihm gehörende L-Algebra sein und  $(Q, \Phi)$  ein beliebiges seiner L-H-Isotope mit  $e_\Phi = e_F = e$ . Die Loops  $(Q, F(x, y, e))$  und  $(Q, \Phi(x, y, e))$  sind regulär, also Gruppen. Man kann  $a, b, c \in Q$  so bestimmen, dass

$$F(x, y, z) = \Phi[F(x, b, c), F(a, y, c), F(a, b, z)].$$

Aus

$$F(x, y, c) = \Phi[F(x, b, c), F(a, y, c), e]$$

liest man ab, dass  $(x, y) \rightarrow \Phi(x, y, e)$  ein Hauptisotop von  $(x, y) \rightarrow F(x, y, c)$  ist; da dies nach Voraussetzung ein Hauptisotop von  $(x, y) \rightarrow F(x, y, e)$  ist, ist  $(x, y) \rightarrow \Phi(x, y, e)$  ein Hauptisotop der Gruppe  $(x, y) \rightarrow F(x, y, e)$ . Aus Satz 1 folgt, dass diese zwei Gruppen gleich sind. Wir haben bisher bewiesen  $e_F = e_\Phi = e \Rightarrow F(x, y, e) = \Phi(x, y, e)$ . Es folgt ebenso:  $e_F = e_\Phi = e \Rightarrow F(x, e, y) = \Phi(x, e, y)$  und  $F(e, x, y) = \Phi(e, x, y)$ .

Wir betrachten zwei neue L-H-Isotope von  $(Q, F)$  und  $(Q, \Phi)$ , die durch

$$(13) \quad F(x, y, z) = G[F(x, e, z_0), F(e, y, z_0), \underbrace{F(e, e, z)}_z]$$

und

$$(14) \quad \Phi(x, y, z) = \Psi[\Phi(x, e, z_0), \Phi(e, y, z_0), \underbrace{\Phi(e, e, z)}_z]$$

bestimmt werden, wo  $z_0$  ein beliebig fixiertes Element aus  $Q$  ist. Wir erhalten:  $e_G = F(e, e, z_0) = z_0 = \Phi(e, e, z_0) = e_\Psi$ , also  $G(\xi, \eta, z_0) = \Psi(\xi, \eta, z_0)$  für  $\xi, \eta \in Q$ ; andererseits ist  $F(x, e, z_0) = \Phi(x, e, z_0)$  und  $F(e, y, z_0) = \Phi(e, y, z_0)$  und deshalb ergibt (13) zusammen mit (14):

$$F(x, y, z_0) = \Phi(x, y, z_0).$$

Da  $z_0$  beliebig in  $Q$  war:  $e_F = e_\Phi \Rightarrow F(x, y, z) = \Phi(x, y, z)$  und damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

**Folgerung.** Fallen die L-H-Isotope einer N-Algebra, welche ein bestimmtes vorgegebenes neutrales Element haben, zusammen, so fallen auch diejenigen zusammen, die irgendein anderes gemeinsames neutrales Element besitzen.

**Bemerkungen.** 1) Unsere im Satz 2 vorkommende Bedingung kann in der Form

$$(15) \quad F(a, b, c) = e \Rightarrow F(x, y, z) = F[F(x, b, c), F(a, y, c), F(a, b, z)]$$

geschrieben werden, wo  $e$  ein festes Element und  $a, b, c, x, y, z$  veränderliche Elemente aus  $Q$  sind. Es gilt: Die Bedingung (15) ist notwendig und hinreichend für die Regularität einer L-Algebra  $(Q, F)$ . Die Bedingung (15) kann als eine Verallgemeinerung der Assoziativität für ternäre Operationen angesehen werden.

2) Ein 1-reguläres räumliches Gewebe ist regulär, ebenso die 2- und 3-regulären. Denn man prüft leicht nach, dass z. B.  $F(x, y, z) = x \circ y \circ z$  ( $\circ$  = Gruppenoperation) die Bedingung (15) befriedigt.

6. Die folgende Schliessungsbedingung soll verallgemeinerte Reide-meister-Bedingung genannt werden:

$$\begin{aligned} (VR) \quad & f(x_1, y_1, z_1) = f(x_3, y_3, z_3) \ \& \ f(x_2, y_1, z_1) = f(x_4, y_3, z_3) \ \& \\ & \& \ f(x_1, y_2, z_1) = f(x_3, y_4, z_3) \ \& \ f(x_1, y_1, z_2) = f(x_3, y_3, z_4) \\ & \Rightarrow f(x_2, y_2, z_2) = f(x_4, y_4, z_4) \end{aligned}$$

SATZ 3. Ein räumliches Gewebe ist dann und nur dann regulär, wenn die (VR) Schliessungsbedingung erfüllt ist.

Seien  $F$  und  $G$  zwei L-H-Isotope von  $(Q, f)$

$$(16) \quad \begin{cases} f(x, y, z) = F[f(x, y_1, z_1), f(x_1, y, z_1), f(x_1, y_1, z)] \\ f(x, y, z) = G[f(x, y_3, z_3), f(x_3, y, z_3), f(x_3, y_3, z)] \end{cases}$$



Ist das räumliche Gewebe regulär, dann gilt es nach Satz 2:  $e_F = e_G \Rightarrow F = G$ . Wählt man  $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) so, dass das erste Glied der Implikation (VR) erfüllt ist, dann haben wir für die durch Formel (16) definierten  $F$  und  $G$   $e_F = f(x_1, y_1, z_1) = e_G = f(x_3, y_3, z_3)$ , also  $F = G$ . Die Argumente in den rechten Gliedern von (16) sind aber paarweise gleich, wenn man in die erste Formel (16)  $x = x_2, y = y_2, z = z_2$  und in die zweite  $x = x_4, y = y_4, z = z_4$  setzt, so dass  $f(x_2, y_2, z_2) = f(x_4, y_4, z_4)$  ist. Damit ist es gezeigt, dass die Regularität von  $(Q, f)$  die Erfüllung der Bedingung (VR) nach sich zieht.

Ist (VR) erfüllt, dann nehmen wir an, dass  $e_F = e_G$  und wollen daraus schliessen, dass  $F = G$ . Aus  $e_F = e_G$  und (16) folgt

$$(17) \quad f(x_1, y_1, z_1) = f(x_3, y_3, z_3).$$

Die Elemente  $\xi, \eta, \zeta \in Q$  seien willkürlich gewählt; die Beziehungen

$$(18) \quad \begin{cases} \xi = f(x_2, y_1, z_1) = f(x_4, y_3, z_3) \\ \eta = f(x_1, y_2, z_1) = f(x_3, y_4, z_3) \\ \zeta = f(x_1, y_1, z_2) = f(x_3, y_3, z_4) \end{cases}$$

bestimmen die Elemente  $x_2, y_2, z_2, x_4, y_4, z_4$  eindeutig. Aus (17) und (18) bekommt man  $f(x_2, y_2, z_2) = f(x_4, y_4, z_4)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta, \zeta) &= F[f(x_2, y_1, z_1), f(x_1, y_2, z_1), f(x_1, y_1, z_2)] = f(x_2, y_2, z_2) = \\ &= f(x_4, y_4, z_4) = G[f(x_4, y_3, z_3), f(x_3, y_4, z_3), f(x_3, y_3, z_4)] = G(\xi, \eta, \zeta). \end{aligned}$$

Damit ist auch der zweite Teil des Satzes 3 bewiesen.

Aus diesem Beweis und der Folgerung des Satzes 2 folgt: Ist die Bedingung (VR) für feste Elemente  $x_1, y_1, z_1$  erfüllt, so ist sie allgemein erfüllt.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Aczél J., Belousov V. D., Hosszú M., *Generalized Associativity and Bisymmetry on Quasigroups*. Acta Math. Acad. Sci. Hung., 11, 127–136 (1960).
- [2] Aczél J., Pickert G., Radó F., *Nomogramme, Gewebe und Quasigruppen*. Mathematica, 2 (25), 5–24 (1960).
- [3] Bruck R. H., *A Survey of Binary Systems*. Ergebnisse der Math., N. F. XX., Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.
- [4] Pickert G., *Projektive Ebenen*. Die Grundlehren der Math. Wiss. LXXX, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
- [5] Radó F., *Generalizarea tesuturilor spațiale*. Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. 1, fasc. 1, 41–55 (1960).

Eingegangen am 30. VIII. 1960.

## SUR L'APPROXIMATION DES DÉRIVÉES DES FONCTIONS PAR LES DÉRIVÉES CORRESPONDANTES DE CERTAINS POLYNOMES DU TYPE BERNSTEIN

par

D. D. STANCU

à Cluj

1. Dans ce travail nous faisons quelques considérations sur l'évaluation des ordres d'approximation des dérivées d'une fonction  $f(x)$ , qui sur l'intervalle  $[0, 1]$  est continue avec ses dérivées, qui interviendront dans nos considérations, par les dérivées du même ordre du polynome de Bernstein

$$(1) \quad B_m(f; x) = \sum_{i=0}^m p_{m,i}(x) f\left(\frac{i}{m}\right) \quad \left(p_{s,i}(t) = \binom{s}{i} t^i (1-t)^{s-i}\right).$$

Nous donnerons ensuite une évaluation des ordres d'approximation des dérivées partielles d'une fonction de deux variables  $f(x, y)$  par les dérivées partielles correspondantes des polynomes du type Bernstein des degrés  $(m, n)$ , respectivement  $m$ ,

$$(2) \quad B_{m,n}(f; x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_{m,i}(x) p_{n,j}(y) f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right),$$

$$(3) \quad B_m(f; x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} p_m^{i,j}(x, y) f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right),$$

où

$$(4) \quad p_m^{i,j}(x, y) = \binom{m}{i} \binom{m-i}{j} x^i y^j (1-x-y)^{m-i-j},$$