

In cel de al V-lea an de apariție (1960) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* cuprinde aceleași serii:

- I. matematică, fizică, chimie;
 - II. geologie, geografie, biologie;
 - III. filozofie, economie politică, psihologie, pedagogie, științe juridice;
 - IV. istorie, lingvistică, literatură.
- Fiecare serie apare anual în 2 fascicule.

V. (1960-as) évfolyamában a *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* változatlanul alábbi sorozatokat öleli fel:

- I. matematika, fizika, kémia;
 - II. geológia, földrajz, biológia;
 - III. filozófia, politikai gazdaságtan, lélektan, pedagógia, jogtudomány;
 - IV. történet-, nyelv- és irodalomtudomány.
- Minden sorozatban évente két füzet jelenik meg.

На V году издания (1960), *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* выходит теми сериями:

- I. математика, физика, химия;
 - II. геология, география, биология;
 - III. философия, политэкономия, психология, педагогика, юридические н.
 - IV. история, языкознание, литературоведение.
- В каждой серии ежегодно выходят два выпуска.

Dans leur V-me année de la publication (1960) les *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* comportent les mêmes séries:

- I-e mathématiques, physique, chimie;
 - II-e géologie, géographie, biologie;
 - III-e philosophie, économie politique, psychologie, pédagogie, sciences juridiques;
 - IV-e histoire, linguistique, littérature.
- Chaque série comprend deux fascicules par année.

P. 577

STUDIA

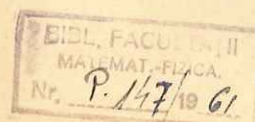
UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES I FASCICULUS 1

1960

MATHEMATICA
P H Y S I C A

C L U J



BCU Cluj-Napoca



PMATE 2014 00338

COMITETUL DE REDACȚIE — SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ — COMITÉ DE REDACTION

Acad. Prof. C. DAICOVICIU (redactor responsabil), Conf. I. CETERCHI, Conf. V. I. CIMPIANU, Prof. J. DEMETER, Conf. O. FELSZEGHY, Conf. M. KALLÓS, Prof. N. LASCU, Prof. T. LÁSZLÓ, Prof. D. MACREA, Prof. GY. MARTON, Prof. T. MORARIU, membru coresp. Acad., Conf. L. NAGY, Prof. I. PÉTERFI, membru coresp. Acad. (redactor responsabil adjunct), Acad. Prof. E. PETROVICI, Prof. Gh. PIC, Prof. T. POPOVICIU, membru coresp. Acad., Prof. E. A. PORA, membru coresp. Acad., Acad. Prof. R. RIPAN, Prof. Al. ROȘCA, Conf. I. URSU

Redacția:
CLUJ, str. Kogălniceanu 1
Telefon 34—50

S U M A R

T. POPOVICIU, Opera științifică a lui J. Bolyai	9
E. KISS, Rezolvarea în numere naturale a ecuației diofantiene $x^2 + y^3 = z^4$	15
Gh. PIC, Despre o teoremă a lui B. H. Neumann	21
G. CALUGAREANU, Asupra izotopiei curbilor închise	27
G. CALUGAREANU, Asupra unui sistem de invarianți de izotopie	35
F. RADO, Generalizarea țesuturilor spațiale pentru structuri algebrice	41
M. FRODA-SCHUCHTER, Studiul unei proprietăți a translațiilor de mulțimi	57
I. MARUȘCIAC, Asupra polinoamelor lui Cebîșev k-restrânse pe o mulțime mărginită și închisă din planul complex	73
P. T. MOCANU, O teoremă asupra funcțiilor univalente	91
D. V. IONESCU, O teoremă asupra sistemelor de ecuații liniare	97
F. MUNTEANU, Extinderea unei teoreme referitoare la sisteme de ecuații liniare	107
M. FERTIG, Despre comportarea integralelor ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți, care depind de un parametru	121
G. KÁLIK și P. SZILÁGYI, Despre rezolvarea problemei la limită a lui Neumann	131
L. NEMETI, Tensiuni termice în prisme lungi	143
A. NEY, Despre cazul de nehotărîre al criteriului de convergență al lui D'Alembert	153
E. MOLDOVAN, Observații asupra problemei celei mai bune aproximații într-un spațiu abstract	163
F. CONSTANTINESCU, Asupra distanței a două mulțimi într-un spațiu vectorial normat	167
T. MIHĂILESCU, Rețele izoterm-conjugate situate pe suprafețele riglate	169
E. GERGELY, Despre ovale pe baza ecuațiilor lor intrinseci	175
L. BAL, Asupra unor suprafețe ce intervin în nomografie	181
D. D. STANCU, Asupra calculului coeficienților unei formule generale de cuadratură	187
F. COTIU și A. COTIU, Delimitarea erorii procedurii de ordinul al cincilea a lui Kutta de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale	193
E. TATARU, Studiu asupra proprietăților de radiație ale antenelor lentile excitate de pilnii electromagnetice piramidale sau sectoriale	199
F. KELEMEN, Influența temperaturii asupra potențialului de mișcare al metalelor în apă distilată	205
V. MERCEA, Viscosimetru cu capilară inelară	217
V. MERCEA, Rezistențe la scurgere în scurgeri capilare de gaze și măsurarea lor cu viscosimetru cu capilară	239
I. MAXIM, IULIU POP și A. NICULA, O metodă sensibilă pentru determinarea relativă a susceptibilității magnetice, cu compensare în câmpul gravitațional	254
I. MAXIM, A. NICULA și IULIU POP, O metodă magnetometrică pentru măsurarea remanenței magnetice	265
KOCH F., Unele probleme legate de variația cu temperatura a efectului Procopiu	269

Cronică

Ecuații funcționale în legătură cu nomografia (F. RADO)	277
Mulțimi de funcții interpolatoare și noțiunea de funcție convexă (E. MOLDOVAN)	279
Cursuri speciale: Curs special predat de prof. G. CALUGAREANU	
Curs special predat de prof. T. POPOVICIU	
Curs special predat de prof. E. MOLDOVAN	285

СОДЕРЖАНИЕ

Т. ПОПОВИЧУ, Научная деятельность И. Бойан	9
Э. КИШШ, Решение в натуральных числах диофантового уравнения $x^2 + y^2 = z^4$	15
Г. ПИК, Об одной теореме Б. Х. Неймана	21
Дж. КЭЛУГЭРЯНУ, Об изотопии замкнутых кривых	27
Дж. КЭЛУГЭРЯНУ, Об одной системе инвариантов изотопии	35
Ф. РАДО, Обобщение пространственных тканей для алгебраических структур	41
М. ФРОДА-ШЕХТЕР, Исследование одного свойства переносов множеств	57
И. МАРУЩАК, О полиномах Чебышева k -условных на замкнутом и ограниченном множестве комплексной плоскости	73
П. Т. МОКАНУ, Одна теорема об однолистных функциях	91
Д. В. ИОНЕСКУ, Одна теорема о системах линейных уравнений	97
Ф. МУНТЯНУ, Расширение одной теоремы, относящейся к системе уравнений	107
М. ФЕРТИГ, О поведении интегралов дифференциальных линейных уравнений с постоянными коэффициентами, зависящими от одного параметра	121
К. КАЛИК, П. СИЛАДИ, О решении проблемы Неймана	131
Л. НЕМЕТИ, Тепловые напряжения в длинных призмах	143
А. НЕЙ, О случае сомнения признака сходимости Даламбера	153
Е. МОЛДОВАН, Замечания относительно наилучшего приближения в абстрактных пространствах	163
Ф. КОНСТАНТИНЕСКУ, О расстоянии двух множеств в нормированном векторном пространстве	167
Т. МИХЭИЛЕСКУ, Изотермо-сопряженные сети на линейчатых поверхностях	169
Е. ГЕРГЕЙ, Об овалах на основании их внутренних уравнений	175
Л. БАЛ, О некоторых поверхностях, возникающих в номографии	181
Д. Д. СТАНКУ, О вычислении коэффициентов одной общей формулы квадратуры	187
Ф. КОЦИЮ, А. КОЦИЮ, Оценка ошибки способа пятой степени Кутта числового интегрирования дифференциальных уравнений	193
Э. ТЭТАРУ, Изучение излучительных свойств линзовых антенн, раздраженных электромагнитными пирамидальными или секторными рупорами	199
Ф. КЕЛЕМЕН, Влияние температуры на потенциал движения металлов в дистиллированной воде	205
В. МЕРЧА, Вискозиметр с кольцевым капилляром	217
В. МЕРЧА, Сопротивление истечения при капиллярных истечениях газов и измерение их при помощи вискозиметра с кольцевыми капиллярами	239
И. МАКСИМ, Ю. ПОП, А. НИКУЛА, Чувствительный метод для относительного определения магнитной восприимчивости с компенсацией в гравитационном поле	259
И. МАКСИМ, А. НИКУЛА, Ю. ПОП, Магнитометрический метод для измерения остаточного магнетизма	265
Ф. КОХ, Некоторые проблемы в связи с температурной вариацией эффекта Прокопиу	269
Хроника	279

SOMMAIRE

T. POPOVICIU, L'oeuvre scientifique de J. Bolyai	9
E. KISS, Résolution en nombres naturels de l'équation diophantienne $x^2 + y^3 = z^4$	15
GH. PIC, Sur un théorème de B. H. Neumann	21
G. CALUGAREANU, Sur l'isotopie des courbes fermées	27
G. CALUGAREANU, Sur un système d'invariants d'isotopie	35
F. RADO, Généralisation des tissus spatiaux, pour certaines structures algébriques	41
M. FRODA-SCHECHESTER, Etude d'une propriété des translations d'ensembles	57
I. MARUSCIAC, Sur les polynômes de Tchebychev k-restreints à un ensemble limité et fermé du plan complexe	73
P. T. MOCANU, Un théorème sur les fonctions univalentes	91
D. V. IONESCU, Un théorème sur les systèmes d'équations linéaires	97
F. MUNTEANU, Extension d'un théorème relatif à des systèmes d'équations	107
M. FERTIG, Sur le comportement des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients constants qui dépendent d'un paramètre	121
C. KALIK, P. SZILAGYI, Sur la solution du problème de la limite de Neumann	131
L. NEMETI, Tensions thermiques dans des prises longs	143
A. NEY, Sur le cas d'indétermination du critérium de convergence de d'Alembert	153
E. MOLDOVAN, Sur la meilleure approximation dans espaces abstraits	163
F. CONSTANTINESCU, Sur la distance de deux ensembles dans un espace vectoriel normé	167
T. MIHAILESCU, Les réseaux isothermes-conjugués situés sur des surfaces réglées	169
E. GERGELY, Problèmes des ovales fondés sur leurs équations itrisèques	175
L. BAL, Sur certaines surfaces intervenant en nomographie	181
D. D. STANCU, Sur le calcul des coefficients d'une formule générale de quadrature	187
F. COȚIU et A. COȚIU, Délimitation de l'erreur du procédé de cinquième ordre de Kutta pour l'intégration numérique des équations différentielles	193
E. TATARU, Etude sur les propriétés de radiation des antennes lentilles excitées par des pavillons électromagnétiques, pyramidaux ou sectoriaux	199
F. KELEMEN, L'influence de la température sur le potentiel de mouvement des métaux dans l'eau distillée	205
V. MERCEA, Le viscosimètre à capillaire annulaire	217
V. MERCEA, Les résistances à l'écoulement dans les écoulements capillaires de gaz et leur mesure avec le viscosimètre à capillaires annulaires	238
I. MAXIM, I. POP, A. NICULA, Sur une méthode sensible pour la détermination relative de la susceptibilité magnétique, avec compensation dans le champ gravitationnel	259
I. MAXIM, A. NICULA, I. POP, Méthode magnétométrique pour la mesure de la rémanence magnétique	265
F. KOCH, Problèmes liés à la variation de l'effet Procopiu en fonction de la température	269
Chronique	297

pentru această valoare a lui n . Să notăm cu μ_n un punct din spațiul cu $6n$ dimensiuni; el reprezintă curba C_n . Dacă μ_n e interior unui domeniu Δ_i^n , C_n este un nod. Obținem $x_{n+1}(u)$ dacă adăugăm $a_{n+1} \cos(n+1)u + b_{n+1} \sin(n+1)u$ la $x_n(u)$, deci $C_{n+1}[x_{n+1}(u), y_{n+1}(u), z_{n+1}(u)]$ este un nod izotop cu C_n dacă $a_{n+1}, b_{n+1}, a'_{n+1}, b'_{n+1}, a''_{n+1}, b''_{n+1}$ sînt destul de mici. Există deci un domeniu Δ_j^{n+1} astfel ca $\Delta_i^n \subset \Delta_j^{n+1}$ și Δ_j^{n+1} reprezintă aceeași clasă de izotopie ca și Δ_i^n .

Catedra de teoria funcțiilor

BIBLIOGRAFIE

1. H. Seifert, *Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten*, „Mathem. Zeitschrift” t. 41, 1936, pp. 1—17.
2. K. Reidemeister, *Knotentheorie*. J. Springer, Berlin, 1932.
3. B. van der Waerden, *Moderne Algebra*, t. II.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ИНВАРИАНТОВ ИЗОТОПИИ

(Краткое содержание)

Автор называет *узлом* любую замкнутую кривую, простую, направленную, имеющую в каждой точке касательную, изменяющуюся непрерывно с изменением дуги. Далее приводится определение изотопной деформации дуги, а также изотопных классов. Проводится основанное на применении рядов Фурье доказательство следующей теоремы алгебраического приближения: любой узел может быть приближен с любой точностью алгебраическими узлами, принадлежащими к одному и тому же классу изотопии. Следовательно, в каждом классе изотопии существуют алгебраические узлы, что позволяет дать классификацию узлов при помощи алгебраических представителей классов изотопии. Это сводится к задаче алгебраического исключения.

SUR UN SYSTÈME D'INVARIANTS D'ISOTOPIE

(Résumé)

L'auteur appelle *noeud* toute courbe fermée, simple, orientée, ayant en chaque point une tangente qui varie continûment en fonction de l'arc, et donne ensuite une définition de la déformation isotope d'un noeud et des classes d'isotopie. Suit une démonstration, basée sur l'emploi des séries de Fourier, du théorème d'approximation algébrique suivant: Chaque noeud peut être approché d'aussi près que l'on veut par un noeud algébrique unicursal qui appartient à la même classe d'isotopie. Dans chaque classe d'isotopie il existe donc des noeuds algébriques, et il en résulte la possibilité d'une classification des noeuds à l'aide des représentants algébriques des classes d'isotopie. On est ainsi ramené à un problème d'élimination algébrique.

GENERALIZAREA ȚESUTURILOR SPAȚIALE PENTRU STRUCTURI ALGEBRICE

de

FRANCISC RADÓ

1. Introducere. Un țesut plan este format din trei familii de curbe, care au proprietățile următoare: 1. prin orice punct al unui domeniu D trece câte o singură curbă din fiecare familie, 2. două curbe aparținând la două familii diferite au exact un punct comun în D . Un țesut plan se numește regulat, dacă este imaginea topologică a trei fascicule de drepte paralele. Două din cele trei familii de curbe pot fi totdeauna transformate topologic în paralele la două axe de coordonate rectangulare, transformatele curbilor din familia a treia sînt liniile de nivel al unei funcții $z = F(x, y)$, pe care o însemnăm mai scurt cu $Z = xy$. Țesutul plan este regulat, dacă

$$(1) \quad f(xy) = g(x) + h(y),$$

unde f, g și h sînt funcții continue și strict monotone [3].

Fiecare din următoarele condiții de închidere este necesară și suficientă pentru ca țesutul plan să fie regulat [3], [6]: *Condiția exagonului*

$$(B) \quad (x_1y_2 = x_2y_1 \ \& \ x_1y_3 = x_2y_2 = x_3y_1) \rightarrow x_2y_3 = x_3y_2,$$

Condiția lui Reidemeister

$$(R) \quad (x_1y_3 = x_2y_1 \ \& \ x_1y_4 = x_2y_2 \ \& \ x_3y_3 = x_4y_1) \rightarrow x_3y_4 = x_4y_2$$

Condiția lui Thomsen

$$(T) \quad (x_1y_2 = x_2y_1 \ \& \ x_1y_3 = x_3y_1) \rightarrow x_2y_3 = x_3y_2.$$

Condițiile (B), (R) și (T) sînt de natură algebrică, ceea ce permite o extindere la structuri algebrice abstracte. Se numește cvasigrup un sistem format dintr-o mulțime Q și o operație $z = xy$, care atașează fiecărei perechi de elemente $x, y \in Q$ un element determinat z din Q , astfel ca ecuațiile $xb = c$ și $ay = d$ să aibă câte o soluție unică x respectiv y . Dacă există $e \in Q$ astfel ca $xe = ex = x$ pentru orice $x \in Q$, cvasigrupul este un loop

[4]. Un cvasigrup devine un țesut abstract în felul următor: perechile de elemente (x, y) , unde $x \in Q$ și $y \in Q$, se numesc „puncte”, mulțimea de puncte (a, x) , unde a este un element fix din Q și x un element oarecare din Q , se numește o „dreaptă 1” mulțimea de puncte (x, b) e „dreaptă 2”, iar mulțimea de puncte (x, y) pentru care $xy = c$ e „dreaptă 3”, sistemul celor trei mulțimi de „drepte” este un țesut abstract [4], [5], [2].

Cvasigrupurile Q, R cu produsele xy respectiv $x \cdot y$ se zic izotope, dacă există corespondențele biunivoce f, g, h ale lui Q pe R astfel ca

$$(2) \quad f(xy) = g(x) \cdot h(y),$$

$$x, y \in Q.$$

Condițiile (B), (R), (T) relative la un țesut abstract nu mai sînt echivalente. Condiția (R) este necesară și suficientă pentru ca țesutul (mai precis cvasigrupul care l-a generat) să fie izotop cu un grup; în acest caz țesutul abstract se numește regulat. Condiția (T) este necesară și suficientă pentru ca țesutul să fie izotop cu un grup abelian, în care caz avem un țesut tare regulat. Condiția (B) este necesară și suficientă pentru ca fiecare loop izotop cu țesutul abstract să fie asociativ pentru puteri, adică

$$x \circ (x \circ x) = (x \circ x) \circ x,$$

unde $\circ$ înseamnă operația de loop. Din această relație rezultă că fiecare element din loop generează un grup abelian. În acest caz țesutul abstract se numește semi-regulat [4], [5], [2].

Condițiile (R) și (T) sînt de asemenea echivalente cu cîte o proprietate a mulțimii loop-urilor izotope cu cvasigrupul dat. Condiția (R) este echivalentă cu asociativitatea lor, iar condiția (T) cu simetria lor.

Un țesut spațial se compune din patru familii de suprafețe astfel ca prin orice punct al unui domeniu spațial R să treacă exact o suprafață din fiecare familie și trei suprafețe să aibă exact un punct comun în R . Țesutul spațial se numește regulat, dacă este imaginea topologică a patru fascicule de plane paralele. Putem presupune fără a restrînge generalitatea că trei din cele patru familii de suprafețe sînt fasciculele de plane paralele cu planele de coordonate ale unui sistem de referință trirectangular; suprafețele din familia a patra pot fi privite ca suprafețele de nivel ale unei funcții $F(x, y, z)$. Țesutul spațial este regulat, dacă

$$(3) \quad f[F(x, y, z)] = g(x) + h(y) + l(z),$$

unde f, g, h și l sînt funcții continue și strict monotone și invers pentru orice țesut regulat avem (3). Condiția necesară și suficientă pentru ca un țesut spațial să fie regulat este

$$(O) \quad \begin{cases} F(x_2, y_1, z_1) = F(x_1, y_2, z_1) = F(x_1, y_1, z_2) \rightarrow \\ F(x_1, y_2, z_2) = F(x_2, y_1, z_2) = F(x_2, y_2, z_1). \end{cases}$$

Condiția (O) exprimă faptul că octaedrele curbilinii, avînd cîte două fețe aparținînd familiilor de suprafețe ale țesutului, se închid; de aceea ea se numește condiția octaedrelor de țesut [3].

Voi generaliza mai jos țesuturile spațiale pentru structuri algebrice abstracte, extinzînd în mod convenabil noțiunile de cvasigrup, loop și izotopie. Țesutul spațial regulat va avea iarăși mai multe generalizări, cărora le vor corespunde condiții diferite, una din ele fiind condiția O. Teorema 5, pe care am stabilit-o într-o formă particulară în [6], are un rol important, de asemenea soluția ecuației asociativității generalizate date de J. A c z é l, V. D. B e l o u s o v și M. H o s s z ú [1].

2. **N-algebre și L-algebre.** Definiția 1. Fie (Q, f) o structură algebrică cu singura operație ternară $t = f(x, y, z)$, care atașează la orice sistem de elemente $x, y, z \in Q$ un element determinat $t \in Q$. Structura algebrică (Q, f) se numește o *N-algebră*, dacă pentru $a, b, c, d \in Q$ ecuațiile următoare au cîte o soluție unică în Q (x, y respectiv z):

$$f(x, b, c) = d, \quad f(a, y, c) = d, \quad f(a, b, z) = d.$$

Definiția 2. N-algebrele (Q, f) și (R, g) se numesc *izotope*, dacă există transformările biunivoce $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ale mulțimii Q pe mulțimea R , astfel ca

$$(4) \quad g(x\alpha, y\beta, z\gamma) = f(x, y, z)\delta$$

(imaginea lui $x \in Q$ în R prin transformarea α s-a notat $x\alpha$). În acest caz zicem că (R, g) este un *izotop* al algebrei (Q, f) .

Dacă mulțimile Q și R coincid și dacă δ este transformarea identică, (Q, g) este un *izotop principal* al N-algebrei (Q, f) .

Dacă aplicațiile α, β, γ și δ coincid, cele două N-algebre sînt *izomorfe*. Se vede ușor că relația de izotopie este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Fiecare izotop al unei N-algebre este izomorf cu un izotop principal al acesteia.

Într-adevăr, fie (Q, f) o N-algebră și (R, g) un izotop al său. Relația (4) se poate scrie

$$g(x\alpha\delta^{-1}\delta, y\beta\delta^{-1}\delta, z\gamma\delta^{-1}\delta) = f(x, y, z)\delta.$$

Considerăm izotopul principal (Q, h) al lui (Q, f) , definit prin

$$h(x(\alpha\delta^{-1}), y(\beta\delta^{-1}), z(\gamma\delta^{-1})) = f(x, y, z);$$

notînd $x' = x\alpha\delta^{-1}$, $y' = y\beta\delta^{-1}$, $z' = z\gamma\delta^{-1}$, avem

$$g(x'\delta, y'\delta, z'\delta) = h(x', y', z')\delta$$

și deoarece x', y', z' sînt elemente oarecari din Q (x, y, z fiind oarecari), rezultă că (Q, h) și (R, g) sînt algebre izomorfe.

Definiția 3. N-algebra (Q, f) se numește o *L-algebră*, dacă există $e \in Q$ astfel ca

$$(5) \quad f(x, e, e) = f(e, x, e) = f(e, e, x) = x.$$

Elementul e poartă numele de *element neutru* sau *unitate* în L-algebră.

Observație. Fie (Q, f) o N-algebră; dacă înlocuim în $f(x, y, z)$ una din cele trei variabile cu un element fix, obținem un cvasigrup. Dacă (Q, f) este o L-algebră și dacă înlocuim în $f(x, y, z)$ o variabilă prin unitatea e se obține un loop cu unitatea e .

Definiția 4. Izotopul principal (Q, F) al N-algebrei (Q, f) determinat prin

$$(6) \quad f(x, y, z) = F[f(x, b, c), f(a, y, c), f(a, b, z)]$$

se numește un *L-P-izotop* al lui (Q, f) , $(a, b, c \in Q)$.

TEOREMA 1. Fiecare *L-P-izotop* al unei N-algebre este o *L-algebră*. Dacă un izotop principal este o *L-algebră*, atunci el este un *L-P-izotop*.

Notăm pentru demonstrație N-algebra cu (Q, f) , $e = f(a, b, c)$ și *L-P-izotopul* cu (Q, F) . Avem din (6)

$$\begin{aligned} f(x, b, c) &= F[f(x, b, c), e, e] \\ f(a, y, c) &= F[e, f(a, y, c), e] \\ f(a, b, z) &= F[e, e, f(a, b, z)]. \end{aligned}$$

Fie $u \in Q$; determinăm elementele $x, y, z \in Q$ astfel ca $f(x, b, c) = f(a, y, c) = f(a, b, z) = u$. Atunci

$$F(u, e, e) = F(e, u, e) = F(e, e, u) = u,$$

deci e este unitate în (Q, F) și partea întâia a teoremei este demonstrată.

Fie acum (Q, g) un izotop principal al lui (Q, f) și totodată o *L-algebră*.

$$(7) \quad f(x, y, z) = g(x\alpha, y\beta, z\gamma).$$

Să punem în (7) $y = e\beta^{-1} = b$, $z = e\gamma^{-1} = c$ apoi $x = e\alpha^{-1} = a$, $z = c$ și în fine $x = a$, $y = b$

$$\begin{aligned} f(x, b, c) &= g(x\alpha, e, e) = x\alpha \\ f(a, y, c) &= g(e, y\beta, e) = y\beta \\ f(a, b, z) &= g(e, e, z\gamma) = z\gamma. \end{aligned}$$

Relația (7) devine

$$f(x, y, z) = g[f(x, b, c), f(a, y, c), f(a, b, z)].$$

deci (Q, g) este un *L-P-izotop* al lui (Q, f) .

Consecință. Fiecare *L-izotop* al unei N-algebre (adică un izotop care este o *L-algebră*) este izomorf cu un *L-P-izotop*.

3. Țesuturi abstracte. Prin generalizarea definiției Țesuturilor spațiale ajungem la următoarea definiție a Țesuturilor abstracte:

Definiția 5. Un Țesut (spațial) abstract este o mulțime nevidă, a căror elemente se zic „puncte” și patru sisteme de submulțimi ale ei, elementele acestor sisteme fiind denumite „plane” de categoria 1-a, 2-a, 3-a respectiv 4-a, care satisfac următoarele proprietăți: 1. orice „punct” aparține la câte un singur „plan” de fiecare categorie, 2. trei „plane” de categorii diferite au exact un „punct” comun.

Două Țesuturi abstracte se zic *izomorfe*, dacă există o corespondență biunivocă a mulțimii „punctelor” lor cu păstrarea „planelor” de aceeași categorie.

Observăm că cele patru sisteme de „plane” ale unui Țesut abstract sînt mulțimi de aceeași putere. Într-adevăr, să considerăm sistemul „planelor” de categoria 1-a și sistemul celor de categoria 2-a și interacția

M a două plane fixe de categoriile 3 și 4. Un „plan” de categoria 1 are exact un „punct” comun cu mulțimea de „puncte” M și acest „punct” aparține la exact un „plan” de categoria 2 și invers, deci am stabilit în acest fel o corespondență biunivocă între „planele” de categoriile 1-a și a 2-a.

Unei N-algebre (Q, f) îi atașăm un Țesut abstract în felul următor: „punctele” Țesutului sînt toate grupele ordonate (x, y, z) de elemente din Q , „planele” de categoriile 1-a, 2-a, 3-a, sînt mulțimile „punctelor” (a, y, z) , (x, b, z) , respectiv (x, y, c) , iar „planele” de categoria 4-a sînt mulțimile de forma (x, y, z) , unde $f(x, y, z) = d$ (a, b, c, d sînt elemente fixe, iar x, y, z elemente variabile în Q). Fiecare N-algebră generează în acest fel un Țesut abstract. Două N-algebre izotope generează Țesuturi izomorfe.

Să considerăm acum un Țesut abstract. Vom construi o N-algebră care generează tocmai acest Țesut (făcînd abstracție de izomorfism). Fie Q o mulțime avînd aceeași putere ca și sistemele de „plane” ale Țesutului dat și α_i o transformare biunivocă a lui Q pe sistemul de „plane” de categoria i ($i = 1, 2, 3, 4$). Dacă $x, y, z \in Q$, notăm cu p „planul” de categoria 4-a, care conține „punctul” comun al „planelor” $x\alpha_1, y\alpha_2, z\alpha_3$ și punem

$$f(x, y, z) = p\alpha_4^{-1}.$$

Din definiția Țesutului abstract rezultă că algebra (Q, f) este o N-algebră și că Țesutul generat de ea este izomorf cu Țesutul dat.

Observație. Printr-o altă alegere a aplicațiilor se ajunge la o N-algebră izotopă.

4. Condiții de închidere. Pe lîngă condiția O vor interveni următoarele condiții de închidere relative la o N-algebră, respectiv la Țesutul generat de ea:

$$\text{Condiția } D_1: f(x_1, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_2) \rightarrow f(x_2, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2)$$

$$\text{Condiția } D_2: f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_1, z_2) \rightarrow f(x_1, y_2, z_1) = f(x_2, y_2, z_2)$$

$$\text{Condiția } D_3: f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_1) \rightarrow f(x_1, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_2)$$

$$\text{Condiția } E_1 = D_2 \text{ \& } D_3$$

$$\text{Condiția } E_2 = D_1 \text{ \& } D_3$$

$$\text{Condiția } E_3 = D_1 \text{ \& } D_2.$$

Condiția E_2 , de exemplu, se poate scrie astfel:

$$(E_2) \quad \begin{cases} f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) \text{ \& } f(x_1, y_3, z_1) = f(x_1, y_1, z_3) \\ \rightarrow f(x_2, y_3, z_1) = f(x_2, y_1, z_3) = f(x_1, y_2, z_3). \end{cases}$$

Condiția $D = D_1 \text{ \& } D_2 \text{ \& } D_3$, care se scrie

$$(D) \quad \begin{cases} f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) \text{ \& } f(x_3, y_1, z_1) = f(x_1, y_3, z_1) = f(x_1, y_1, z_3) \\ \rightarrow f(x_2, y_3, z_1) = f(x_3, y_2, z_1) = f(x_2, y_1, z_3) = f(x_1, y_2, z_3). \end{cases}$$

Fixînd pe $x, f(x_1, y, z)$ generează un cvasigrup. Condițiile T, R, B relative la acest cvasigrup, x_1 fiind un element arbitrar din Q , se notează cu T_1, R_1, B_1 . Prin fixarea lui y respectiv z în mod arbitrar, se obțin condițiile T_2, R_2, B_2 respectiv T_3, R_3, B_3 .

Toate aceste condiții de închidere pot fi exprimate cu ajutorul unor proprietăți comune tuturor L-izotopilor ale N-algebrei.

TEOREMA 2. Condiția O atunci este satisfăcută și numai atunci, dacă orice L-izotop (Q, F) al N-algebrei (Q, f) verifică relațiile

$$(8) \quad F(x, x, e) = F(x, e, x) = F(e, x, x),$$

unde $x \in Q$ și e este elementul neutru în (Q, F) .

În baza consecinței de la punctul 2, ne putem mărgini la L-P-izotopi. Dacă (Q, F) este un L-P-izotop al lui (Q, f) , avem

$$(9) \quad f(u, v, w) = F(f(u, y_1, z_1), f(x_1, v, z_1), f(x_1, y_1, w));$$

elementul neutru în (Q, F) este $e = f(x_1, y_1, z_1)$. Determinăm x_2, y_2, z_2 astfel ca

$$(10) \quad f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) = f(x_1, y_1, z_2) = x.$$

Punem în (9) $u = x_1, v = y_2, w = z_2$, apoi $u = x_2, v = y_1, w = z_2$ și în sfârșit $u = x_2, v = y_2, w = z_1$. Obținem

$$(11) \quad \begin{aligned} f(x_1, y_2, z_2) &= F(e, x, x) \\ f(x_2, y_1, z_2) &= F(x, e, x) \\ f(x_2, y_2, z_1) &= F(e, e, x). \end{aligned}$$

Dacă admitem condiția O, ținând seama de (10), elementele din membrii întâi ai egalităților (11) sînt egale, deci condiția $O \rightarrow (8)$. Dacă admitem (8), din (10) și (11) deducem condiția O.

TEOREMA 3. Condiția D_3 atunci este satisfăcută și numai atunci, dacă orice L-izotop (Q, F) al N-algebrei (Q, f) verifică relația

$$(12) \quad F(e, x, y) = F(x, e, y).$$

Determinăm pe x_2, y_2, z_3 astfel ca

$$f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) = x, f(x_1, y_1, z_3) = y$$

și punem în (9) $u = x_2, v = y_1, w = z_3$, apoi $u = x_1, v = y_2, w = z_3$; se obține

$$\begin{aligned} f(x_2, y_1, z_3) &= F(x, e, y) \\ f(x_1, y_2, z_3) &= F(e, x, y). \end{aligned}$$

Relația (12) este echivalentă cu implicația

$$f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) \rightarrow f(x_2, y_1, z_3) = f(x_1, y_2, z_3),$$

adică cu condiția D_3 .

Consecințe. Păstrînd notațiile de mai sus, avem următoarele echivalențe:

1. Condiția D_1 este echivalentă cu $F(x, e, y) = F(x, y, e)$, condiția D_2 cu $F(e, x, y) = F(y, x, e)$.

2. Condiția E_1 este echivalentă cu

$$(13) \quad F(e, x, y) = F(x, e, y) = F(y, x, e),$$

condiția E_2 cu

$$(13') \quad F(e, x, y) = F(x, e, y) = F(x, y, e),$$

condiția E_3 cu

$$(13'') \quad F(e, x, y) = F(y, e, x) = F(y, x, e).$$

2. Condiția D este echivalentă cu

$$(14) \quad F(x, y, e) = F(y, x, e) = F(x, e, y) = F(e, x, y),$$

adică cu simetria lui F în raport cu x, y, e .

TEOREMA 4. Condiția T_3 este echivalentă cu

$$(15) \quad F(x, y, e) = F(y, x, e),$$

condiția R_3 cu asociativitatea lui $F(x, y, e)$ în raport cu x și y

$$(16) \quad F[F(x, y, e), z, e] = F[x, F(y, z, e), e],$$

iar condiția B_3 cu (16) pentru $x = y = z$. Pentru $T_1, R_1, B_1, T_2, R_2, B_2$ se obțin relații analoge cu elementul neutru e în primul, respectiv al doilea argument.

Dacă fixăm pe z , obținem cvasigrupul $(Q, \circ)$

$$x \circ y = f(x, y, z_0).$$

Să considerăm L-P-izotopii ai N-algebrei (Q, f) formați cu ajutorul lui a, b arbitrari și $c = z_0$. Punînd în (6) $c = z_0, z = z_0$, avem

$$f(x, y, z_0) = F[f(x, b, z_0), f(a, y, z_0), f(x, b, z_0)]$$

și notînd

$$(17) \quad \xi * \eta = F[\xi, \eta, f(a, b, z_0)] = F(\xi, \eta, e),$$

obținem

$$x \circ y = (x \circ b) * (a \circ y).$$

Condițiile T, R, B, relative la cvasigrupul $(Q, \circ)$ sînt deci echivalente cu simetria, asociativitatea respectiv asociativitatea pentru puteri a fiecărui loop $(Q, *)$ (cînd $a, b, z_0 \in Q$) [4], [2]. Pe de altă parte, relația (17) ne arată că mulțimea acestor loop-uri se obține din mulțimea L-P-izotopilor ai N-algebrei (Q, f) , prin înlocuirea ultimului argument cu unitatea respectivă, de unde rezultă teorema 4.

5. N-algebre decompozabile, regulate și tare regulate. Definiția 6. N-algebra (Q, f) se zice 1-decompozabilă, dacă

$$f(x, y, z) = x \circ (y \circ z)$$

unde $\circ$ și $*$ sînt operații de cvasigrup pe mulțimea Q . În mod analog (Q, f) este 2-decompozabilă respectiv 3-decompozabilă, dacă

$$f(x, y, z) = y \circ (x \circ z) \text{ respectiv } f(x, y, z) = (x \circ y) \circ z.$$

TEOREMA 5. Condiția D_i este necesară și suficientă pentru ca o N-algebră să fie i-decompozabilă ($i = 1, 2, 3$).

Să considerăm cazul $i = 3$. Să presupunem că N-algebra este 3-decompozabilă. Din $f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_1)$ adică $(x_1 \circ y_1) \circ z_1 = (x_2 \circ y_2) \circ z_1$,

rezultă $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$, deci și $(x_1 \cdot y_1) \circ z_2 = (x_2 \cdot y_2) \circ z_2$, adică $f(x_1, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_2)$. Așa dar, condiția D_3 este necesară. Pentru a arăta că ea este și suficientă să o admitem și $y_0, z_0 \in Q$. Pentru $x, y \in Q$ există un x' unic în Q astfel ca

$$f(x, y, z_0) = f(x', y_0, z_0).$$

Notăm $x' = x \cdot y$, care este o operație de cvasigrup. Fie mai departe

$$\xi \circ \eta = f(\xi, y_0, \eta);$$

avem

$$f(x, y, z) = f(x', y_0, z) = x' \circ z = (x \cdot y) \circ z.$$

Definiția 7. N-algebra (Q, f) se zice 2-regulată dacă

$$(18) \quad f(x, y, z) = (x\alpha \circ y\beta \circ z\gamma)\delta^{-1},$$

unde $\circ$ este o operație grup pe Q și $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ transformări biunivoce ale mulțimii Q pe ea însăși. Dacă acest grup este comutativ, (Q, f) se numește o *algebră tare regulată*.

Dacă (18) are loc, avem și

$$f(x, y, z) = (z\gamma' \circ y\beta' \circ x\alpha')\delta'^{-1}$$

($\alpha' = \alpha\varepsilon, \beta' = \beta\varepsilon, \gamma' = \gamma\varepsilon$ și $\delta = \delta\varepsilon$, unde ε este aplicația $x \rightarrow x^{-1}$)

N-algebra (Q, f) se zice 1-regulată respectiv 3-regulată, dacă

$$f(x, y, z) = (y\beta \circ x\alpha \circ z\gamma)\delta^{-1} \text{ respectiv } f(x, y, z) = (x\alpha \circ z\gamma \circ y\beta)\delta^{-1},$$

unde $\circ$ este iarăși o operație de grup pe Q .

TEOREMA 6. Condiția E_i este necesară și suficientă pentru ca o N-algebră să fie i-regulată.

Ajunge să demonstrăm teorema pentru cazul $i = 2$.

Condiția este necesară. Din (18) urmează că N-algebra (Q, f) este 1-decompozabilă și 3-decompozabilă, deci în baza teoremei 5, condiția $D_1 \& D_3 = E_2$ este satisfăcută.

Condiția este suficientă. Din E_2 rezultă D_1 și D_3 , deci folosind teorema 5, avem

$$f(x, y, z) = x \circ (y \cdot z) = (x \blacksquare y \square) z.$$

Am obținut ecuația funcțională a asociativității generalizate, care s-a rezolvat de J. Aczél, V. D. Belousov și M. Hosszú în [1]. Soluția ei nedă (18).

TEOREMA 7. Condiția D este necesară și suficientă pentru ca o N-algebră să fie tare regulată.

Din regularitatea tare urmează că N-algebra este 1, 2 și 3-decompozabilă, deci condiția $D_1 \& D_2 \& D_3 = D$ este satisfăcută.

Să presupunem acum condiția D satisfăcută. Din teorema 6 rezultă că N-algebra (Q, f) este izotopă cu L-algebra (Q, F) .

$$F(x, y, z) = x \circ y \circ z.$$

Unitatea în (Q, F) coincide cu unitatea grupului $(Q, \circ)$. Condiția D fiind echivalentă cu (14) avem $F(x, y, e) = F(y, x, e)$, deci $x \circ y \circ e = y \circ x \circ e$ sau $x \circ y = y \circ x$.

6. N-algebre semi-regulate. Definiția 8. O N-algebră se zice *semi-regulată*, dacă fiecare L-izotop al acesteia satisface

$$(8) \quad F(x, x, e) = F(x, e, x) = F(e, x, x).$$

Din teorema 2 rezultă că o N-algebră atunci și numai atunci este semi-regulată, dacă condiția O este satisfăcută.

Definiția 9. Fie (Q, F) o L-algebră. Definim *puterile* x^n pentru $n = 0, 1, 2, \dots$, și $n = -1, -2, \dots$, prin

$$(19) \quad \begin{cases} x^0 = e \\ x^n = F(x^{n-1}, x, e). \end{cases}$$

TEOREMA 8. N-algebra (Q, f) atunci este semiregulată și numai atunci, dacă L-P-izotopul oarecare (Q, F) satisface relația

$$(20) \quad F(x^m, x^n, x^p) = x^{m+n+p},$$

unde m, n, p , sînt numere întregi.

Din (20) rezultă, făcînd $m = n = 1, p = 0$; $m = p = 1, n = 0$ și $n = p = 1, m = 0$,

$$F(x, x, e) = F(x, e, x) = F(e, x, x).$$

Înainte de a demonstra necesitatea relației (2) stabilim următoarea.

LEMĂ. Presupunem că relațiile (8) au loc pentru fiecare L-P-izotop al N-algebrei (Q, f) și că relația (20) este verificată pentru patru sisteme de exponenți din următoarele șase

$$\begin{array}{lll} S_1) & m+1, & n, \quad p \\ S'_1) & m, & n+1, \quad p+1 \\ S_2) & m, & n+1, \quad p \\ S'_2) & m+1, & n, \quad p+1 \\ S_3) & m, & n, \quad p+1 \\ S'_3) & m+1, & n+1, \quad p \end{array}$$

între care figurează cel puțin un sistem de exponenți din fiecare pereche $S_i, S'_i (i = 1, 2, 3)$; atunci relația (20) este verificată și pentru celelalte două sisteme de exponenți.

Avem

$$F(x, y, z) = G[F(x, x^n, x^p), F(x^m, y, x^p), F(x^m, x^n, z)],$$

unde (Q, G) este un izotop al lui (Q, f) cu unitatea $e' = F(x^m, x^n, x^p)$. Găsim din această relație

$$(21) \quad \begin{cases} F(x^{m+k}, x^{n+k}, x^p) = G[F(x^{m+k}, x^n, x^p), F(x^m, x^{n+k}, x^p), e'] \\ F(x^m, x^{n+k}, x^{p+k}) = G[e', F(x^m, x^{n+k}, x^p), F(x^m, x^n, x^{p+k})] \\ F(x^{m+k}, x^n, x^{p+k}) = G[F(x^{m+k}, x^n, x^p), e', F(x^m, x^n, x^{p+k})]. \end{cases}$$

Dacă (20) este satisfăcut pentru sistemele de exponenți $m+k$, n , p ; m , $n+k$, p și m , n , $p+k$, atunci

$$F(x^{m+k}, x^n, x^p) = F(x^m, x^{n+k}, x^p) = F(x^m, x^n, x^{p+k}) = x^{m+n+p+k}$$

și în baza relației (8) aplicată la (Q, G) avem din formulele (21)

$$F(x^{m+k}, x^{n+k}, x^p) = F(x^m, x^{n+k}, x^{p+k}) = F(x^{m+k}, x^n, x^{p+k}).$$

Făcând $k=1$, găsim că relația (20) pentru sistemele de exponenți S_1, S_2, S_3 și un S'_i implică aceeași relație și pentru celelalte două sisteme de exponenți. Făcând $k=-1$ (și schimbând notația m, n, p în $m+1, n+1, p+1$) găsim că (20) cu exponenții S'_2, S'_1, S'_3 și S_i implică (20) pentru cele două sisteme de exponenți rămase. Să presupunem acum că (20) are loc pentru exponenții S_1, S'_1, S_2 și S'_3 . Punem în primele două formule (21) $k=1$

$$x^{m+n+p+2} = G(x^{m+n+p+1}, x^{m+n+p+1}, e')$$

$$x^{m+n+p+2} = G[e', x^{m+n+p+1}, F(x^m, x^n, x^{p+1})].$$

Ținând seama de (8),

$$G(e', x^{m+n+p+1}, x^{m+n+p+1}) = G[e', x^{m+n+p+1}, F(x^m, x^n, x^{p+1})],$$

de unde rezultă

$$F(x^m, x^n, x^{p+1}) = x^{m+n+p+1},$$

adică (20) cu exponenții S_3 . Din cele arătate mai sus rezultă acum (20) și pentru S_2 . La fel se demonstrează că relația (20) presupusă pentru S_i, S'_i, S_j, S'_k (i, j, k fiind o permutare a numerelor 1, 2, 3) atrage după sine (20) pentru celelalte două sisteme de exponenți. Lema este complet demonstrată.

Trecem la demonstrarea teoremei 8. Admitem (8) pentru fiecare L-P-izotop al lui (Q, f) . Faptul că relația (20) are loc cu exponenții M, N, P se va nota, pentru ușurarea exprimării, cu $[M, N, P]$. Demonstrăm succesiv:

a) $[m, 0, 1]$ și $[m, 1, 1]$, $m = \text{întreg oarecare}$. Sistemele de exponenți din lema devin pentru $n=p=0$

$$\begin{array}{ccc} m+1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ m+1 & 0 & 1 \\ m & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 0 \end{array}$$

Având în vedere că pentru primul, al treilea și al șaselea sistem de exponenți relația (20) este adevărată, avem

$$[m, 0, 1] \rightarrow [m+1, 0, 1] \text{ \& } [m, 1, 1].$$

Ținând seamă că avem $[0, 0, 1]$, rezultă $[m, 0, 1]$ și $[m, 1, 1]$ pentru m întreg nenegativ.

Din lema mai deducem

$$[m+1, 0, 1] \rightarrow [m, 0, 1] \text{ \& } [m, 1, 1]$$

deci avem $[m, 0, 1]$ și $[m, 1, 1]$ și pentru m negativ.

b) $[m, n, 0]$ și $[m, n, 1]$, $m = \text{întreg oarecare}$, $n = \text{întreg nenegativ}$. Sistemele de exponenți din lema devin pentru $n=n_0, p=0$

$$\begin{array}{ccc} m+1 & n_0 & 0 \\ m & n_0+1 & 1 \\ m & n_0+1 & 0 \\ m+1 & n_0 & 1 \\ m & n_0 & 1 \\ m+1 & n_0+1 & 0 \end{array}$$

Să presupunem

$$(22) \quad [m, n_0, 0] \text{ \& } [m, n_0, 1], \quad m = \text{întreg oarecare}.$$

Atunci relația (20) are loc pentru primul, al patrulea și al cincilea sistem de exponenți, deci avem din lema

$$(22) \text{ \& } [m', n_0+1, 0] \rightarrow [m'+1, n_0+1, 0] \text{ \& } [m', n_0+1, 1].$$

Ținând seamă de $[0, n_0+1, 0]$, găsim prin inducție completă

$$(22) \rightarrow [m, n_0+1, 0] \text{ \& } [m, n_0+1, 1], \quad m \text{ întreg } \geq 0.$$

Avem de asemenea din lema

$$(22) \text{ \& } [m'+1, n_0+1, 0] \rightarrow [m', n_0+1, 0] \text{ \& } [m', n_0+1, 1]$$

și deoarece $[0, n_0+1, 0]$

$$(22) \rightarrow [m, n_0+1, 0] \text{ \& } [m, n_0+1, 1], \quad m \text{ întreg } < 0.$$

Așa dar, am demonstrat că (22) atrage după sine

$$[m, n_0+1, 0] \text{ \& } [m, n_0+1, 1].$$

Ținând seama de a), prin inducție rezultă b).

c) $[m, n, p]$, m, p întregi oarecari, n întreg ≥ 0 . Presupunem

$$(23) \quad [m, n, p_0], \quad m \text{ întreg oarecare}, \quad n \text{ întreg } \geq 0.$$

Din lema urmează

$$(23) \text{ \& } [m', n', p_0+1] \rightarrow [m'+1, n', p_0+1] \text{ \& } [m', n'+1, p_0+1].$$

Deoarece $[0, 0, p_0+1]$, rezultă prin inducție

$$(23) \rightarrow [m, n, p_0+1], \quad m \text{ întreg } \geq 0, \quad n \text{ întreg } \geq 0.$$

Tot din lema avem

$$(23) \text{ \& } [m'+1, n', p_0+1] \rightarrow [m', n', p_0+1],$$

deci

$$(23) \rightarrow [m, n, p_0 + 1], \quad m = \text{întreg oarecare}, n = \text{întreg} \geq 0.$$

Ținînd seama de b), avem $[m, n, p]$ pentru m întreg oarecare, n întreg ≥ 0 , p întreg ≥ 0 .

Pentru a demonstra complet c) presupunem

$$(24) \quad [m, n, p_0 + 1], \quad m = \text{întreg oarecare}, n = \text{întreg} \geq 0.$$

Avem din lema

$$(24) \& [m' + 1, n', p_0] \rightarrow [m' + 1, n' + 1, p_0], \quad (n' \geq 0).$$

Ținînd seamă și de $[0, 0, p_0]$, găsim

$$(24) \rightarrow [0, n, p_0], \quad n = \text{întreg} \geq 0.$$

Din

$$(24) \& [m', n' + 1, p_0] \leftrightarrow (24) \& [m' + 1, n' + 1, p_0], \quad n' \geq 0$$

obținem $(24) \rightarrow [m, n, p_0]$ pentru m întreg oarecare, n întreg ≥ 0 .

Ținînd seamă de această implicație din urmă și de b), rezultă $[m, n, p]$ pentru m întreg oarecare, n întreg ≥ 0 , p întreg < 0 și cu aceasta am demonstrat c).

d) $[m, n, p]$, m, n, p întregi oarecare. Presupunem

$$(25) \quad [m, n_0, p], \quad m, p = \text{întregi oarecare}.$$

Avem din lema

$$(25) \& [m', n_0 - 1, p'] \leftrightarrow (25) \& [m', n_0 - 1, p' + 1]$$

$$(25) \& [m', n_0 - 1, p'] \leftrightarrow (25) \& [m' + 1, n_0 - 1, p'];$$

din aceste echivalențe și din $[0, n_0 - 1, 0]$ deducem

$$(25) \rightarrow [m, n_0 - 1, p], \quad m, p = \text{întregi oarecare}.$$

Ținînd seama de c) prin inducție rezultă d). Teorema este complet demonstrată.

Catedra de geometrie

BIBLIOGRAFIE

1. J. Aczél—V. D. Belousov—M. Hosszú, *Generalized Associativity and Bisymmetry on Quasigroups*. „Acta Math. Acad. Sci. Hung.”, 11 (1960), 127 — 137.
2. J. Aczél—G. Pickert—F. Radó, *Nomogramme, Gewebe und Quasigruppen*. „Mathematica”, 2 (25) (1960), 5 — 24.

3. W. Blaschke—G. Bol, *Geometrie der Gewebe*. „Grundlehren d. math. Wiss.” 49, Berlin 1938.
4. R. H. Bruck, *A survey of Binary Systems*. „Ergebnisse d. Math.” Neue Folge 20, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1958.
5. G. Pickert, *Projektive Ebenen*. „Grundlehren d. math. Wiss.” 80, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.
6. F. Radó, *Ecuații funcționale în legătură cu nomografia*. „Studii și cercetări de matematică Cluj”, 9 (1958), 249—319. „Mathematica”, 1 (24) (1959), 143—166.

ОБОБЩЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТКАНЕЙ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР

(Краткое содержание)

Каждое из условий замкнутости Рейдемейстера, Томсена и шестиугольника необходимо и достаточно для того, чтобы плоская ткань была регулярной, т. е. гомеоморфной с тканью, образованной из трёх пучков параллельных прямых [3]. У абстрактных тканей, определенных на квазигруппах, указанные выше три условия не являются эквивалентными, условие Рейдемейстера необходимо и достаточно чтобы квазигруппа была изотопной с группой, условие Томсена — чтобы квазигруппа была изотопной с абелевой группой. Указанные свойства являются эквивалентными с ассоциативностью, соответственно — с коммутативностью всех „луп”, изотопных с данной квазигруппой. Условие же шестиугольника эквивалентно с их ассоциативностью для степеней [4], [5], [2].

Для пространственных тканей известно условие замкнутости восьмиугольников ткани, обеспечивающее регулярность ткани [3]. Автор обобщает пространственные ткани для абстрактных алгебраических структур.

Пусть (Q, f) — алгебра с единственным тройным действием $f = f(x, y, z)$. Оно называется N -алгеброй, если уравнения $f(x, b, c) = d$, $f(a, y, c) = d$, $f(a, b, z) = d$ имеют по одному решению в Q .

N -алгебры (Q, f) и (R, g) называются изотопными, если существуют обратимые преобразования $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ множества Q на R , чтобы $g(\alpha x, \beta y, \gamma z) = f(x, y, z)\delta$, $x, y, z \in Q$. Если $Q = R$ и δ является тождественным преобразованием, то (Q, g) является главным изотопом (Q, f) . Если $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, то указанные две N -алгебры являются изоморфными.

Каждый изотоп одной N -алгебры является изоморфным с одним главным её изотопом.

N -алгебра (Q, f) называется L -алгеброй, если существует $e \in Q$, чтобы $f(x, e, e) = f(e, x, e) = f(e, e, x) = x$. Главный изотоп (Q, F) N -алгебры (Q, f) , определенный соотношением:

$$f(x, y, z) = F[f(x, b, c), f(a, y, c), f(a, b, z)],$$

называется L - P -изотопом (Q, f) . Каждый L - P -изотоп одной N -алгебры является L -алгеброй и, если главный изотоп является L -алгеброй, то он L - P -изотоп.

Обобщением построения, известного от квазигруппы, с каждой N -алгеброй ассоциируется пространственная абстрактная ткань, образованная из элементов, называемых „точками”, разделенными на 4 системы „плоскостей” со свойствами: 1) любая точка принадлежит точно к одной плоскости каждой системы, 2) три плоскости разных систем имеют точно одну общую точку. Всегда существует N -алгебра, которая обобщает данную пространственную абстрактную ткань.

Различным условиям замкнутости соответствуют свойства всех L - P -изотопов, следовательно, и множества изотопов, которые являются „лупами”. Условие

$$(O) \quad \begin{cases} f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) = f(x_1, y_1, z_2) \rightarrow \\ f(x_1, y_2, z_2) = f(x_2, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_1) \end{cases}$$

эквивалентно

$$F(x, x, e) = F(x, e, x) = F(e, x, x)$$

для любого L-P-изотопа (Q, F) . Условие

$$(D_3) \quad f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_1) \rightarrow f(x_1, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_2)$$

эквивалентно

$$F(e, x, y) = F(x, e, y).$$

Условие $E_2 = D_1 \& D_3$

$$\begin{cases} f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) \& f(x_1, y_3, z_1) = f(x_1, y_1, z_3) \\ \rightarrow f(x_2, y_3, z_1) = f(x_2, y_1, z_3) = f(x_1, y_2, z_3) \end{cases}$$

эквивалентно

$$F(e, x, y) = F(x, e, y) = F(x, y, e).$$

Условие $D = D_1 \& D_2 \& D_3$ эквивалентно симметрии $F(e, x, y)$ относительно e, x, y .Условие D_3 необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x, y, z) = (x \circ y) \circ z$$

где $\bullet$ и $\circ$ являются квазигрупповыми действиями на Q .

Условие E_2 необходимо и достаточно, чтобы (Q, f) был изотопом с (Q, f_0) где $f_0 = x \circ y \circ z$, и $\circ$ является групповым действием на Q (регулярная ткань). Тот же результат получается для условия D с той разницей, что это — коммутативное групповое действие (сильно регулярная ткань).

Пусть (Q, f) — L-алгебра. Определяем степени $x \in Q$ при помощи (19) для $n = 0, 1, \dots$ и $n = 1, -2, \dots$. Соотношения (8) влекут за собой соотношение (20) (полурегулярная ткань).

GÉNÉRALISATION DES TISSUS SPATIAUX, POUR CERTAINES STRUCTURES ALGÈBRIQUES

(Résumé)

Chacune des conditions de fermeture de Reidemeister, de Thomsen et de l'hexagone est nécessaire et suffisante pour qu'un tissu plan soit régulier, c'est à dire homéomorphe à un tissu formé de trois faisceaux de droites parallèles (3). Pour les tissus abstraits, définis par des quasigroupes, ces trois conditions ne sont plus équivalentes : la condition de Reidemeister est nécessaire et suffisante pour que le quasigroupe soit isotope à un groupe, la condition de Thomsen, pour qu'il soit isotope à un groupe abélien. Ces propriétés sont respectivement équivalentes à l'associativité et à la commutativité de tous les loops isotopes au quasi-groupe donné, et la condition de l'hexagone est équivalente à leur associativité pour des puissances [4], [5], [2].

On connaît, pour les tissus spatiaux, la condition de fermeture des octaèdres de tissu, qui assure la régularité du tissu [3]. L'auteur généralise les tissus spatiaux pour des structures algébriques abstraites.

Soit (Q, f) une structure algébrique à une seule opération ternaire $t = f(x, y, z)$. Elle est nommée N-algèbre si les équations $f(x, b, c) = d$, $f(a, y, c) = d$ et $f(a, b, z) = d$ ont chacune une seule solution en Q .

Les N-algèbres (Q, f) et (R, g) sont appelées isotopes s'il existe des transformations inversibles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des ensembles Q sur R , de telle sorte que $g(x\alpha, y\beta, z\gamma) = f(x, y, z)\delta$ pour $x, y, z \in Q$. Si $Q = R$ et δ est la transformation identique, (Q, g) est un isotope principal de (Q, f) . Si $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, les deux N-algèbres sont isomorphes.

Chaque isotope d'une N-algèbre est isomorphe à un isotope principal de celle-ci.

L'-N-algèbre (Q, f) est appelée une L-algèbre s'il existe une $e \in Q$ telle que $f(x, e, e) = f(e, x, e) = f(e, e, x) = x$. L'isotope principal (Q, F) de l'-N-algèbre (Q, f) déterminé par

$$f(x, y, z) = F[f(x, b, c), f(a, y, c), f(a, b, z)]$$

est appelé un L-P-isotope de (Q, f) . Chaque L-P-isotope d'une N-algèbre est une L-algèbre, et si un isotope principal est une L-algèbre, c'est alors un L-P-isotope.

Par extension de la construction connue des quasi-groupes, à chaque N-algèbre est associé un tissu spatial abstrait, formé d'éléments nommés „points”, groupés en 4 systèmes de „plans” jouissant des propriétés suivantes : 1) tout point appartient exactement à un plan de chaque système, 2) trois plans de systèmes différents ont exactement un point commun. Il existe toujours une N-algèbre engendrant un tissu spatial abstrait donné.

Aux différentes conditions de fermeture correspondent des propriétés de tous les L-P-isotopes, donc aussi de l'ensemble des isotopes qui sont des loops. La condition

$$(O) \quad \begin{cases} f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) = f(x_1, y_1, z_2) \rightarrow \\ f(x_1, y_2, z_2) = f(x_2, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_1) \end{cases}$$

est équivalente à :

$$F(x, x, e) = F(x, e, x) = F(e, x, x)$$

pour tout L-P-isotope (Q, F) . La condition

$$(D_3) \quad f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_1) \rightarrow f(x_1, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_2)$$

est équivalente à :

$$F(e, x, y) = F(x, e, y).$$

La condition $E_2 = D_1 \& D_3$

$$\begin{cases} f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) \& f(x_1, y_3, z_1) = f(x_1, y_1, z_3) \\ \rightarrow f(x_2, y_3, z_1) = f(x_2, y_1, z_3) = f(x_1, y_2, z_3) \end{cases}$$

est équivalente à :

$$F(e, x, y) = F(x, e, y) = F(x, y, e).$$

La condition $D = D_1 \& D_2 \& D_3$ est équivalente à la symétrie de $F(e, x, y)$ par rapport à e, x, y .

La condition D_3 est nécessaire et suffisante pour que

$$f(x, y, z) = (x \circ y) \circ z,$$

où $\circ$ et $\bullet$ sont des opérations de quasi-groupe sur Q .

La condition E_2 est nécessaire et suffisante pour que (Q, f) soit isotope à (Q, f_0) , où $f_0 = x \circ y \circ z$ et $\circ$ est une opération de groupe sur Q (tissu régulier). Nous avons le même résultat pour la condition D , avec cette différence que $\circ$ est une opération de groupe commutatif (tissu très régulier).

Soit (Q, f) une L-algèbre. Nous définissons les puissances de $x \in Q$ par (19) pour $n = 0, 1, \dots$ et $n = -1, -2, \dots$. Les relations (8) entraînent la relation (20) (tissu demi-régulier).