

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ДУМИТРУ РИПИАНУ

Клуж

1. Говорят, что семейство функций F , зависящее от некоторого числа параметров, является интерполяторным k -ого порядка (причём $k \leq n$) в промежутке $[\alpha, \beta]$, если какие бы ни были различные узлы $x_1, x_2, \dots, x_k$ расположенные в промежутке $[\alpha, \beta]$ и числа $y_1, y_2, \dots, y_k$, существует одна (и в точности одна) функция $f(x) \in F$, удовлетворяющая условиям

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

При изучении дифференциальных уравнений естественным образом ставится задача определения интервала наибольшей длины, в котором общее решение дифференциального уравнения n -ого порядка является интерполяторным n -ого порядка. Известная теорема де ла Вале-Пусена устанавливает существование промежутка достаточно малой длины, в котором общее решение уравнения является интерполяторным n -ого порядка, при известных предположениях относительно структуры уравнения.

В работе [1] установлена длина интервала наибольшей длины, в котором общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами 3-го или 4-го порядка является интерполяторным 3-го или 4-го порядка.

Задачу можно обобщить, если доля узлов сосредоточены, и требовать удовлетворения условий

$$f(x_i) = y_i; f'(x_i) = y'_i; \dots; f^{(r_i-1)}(x_i) = y_i^{(r_i-1)}$$

в предположении, что в узле x_i сосредоточены r_i узлов причём $f(x) \in F$, а $y_i, y'_i, \dots, y_i^{(r_i-1)}$ — любые числа. В работе [2] изучен интервал наибольшей

1) Эта работа опубликована в журнале „Studii și cercetări de matematică (Cluj)” том IX, стр. 321—341, 1958.

длины, в котором общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами 4-го порядка является интерполяционным на двух различных двойных узлах, то-есть, в котором как то бы ни выбирали два различных узла x_1 и x_2 , существует решение $y=f(x)$, данного уравнения, удовлетворяющее условиям

$$f(x_1) = y_1; f'(x_1) = y'_1; f(x_2) = y_2; f'(x_2) = y'_2$$

(причём y_1, y_2, y'_1, y'_2 — четыре любых числа), в том случае, когда характеристический многочлен данного уравнения имеет два различных и сопряженных мнимых корня, причём последние всегда можно предполагать равными соответственно $\pm i$. Если a и b ($a > b$) — вещественные корни характеристического многочлена, всегда можно предполагать $a > 0$. В упомянутой работе показано, что искомый интервал равен наименьшему положительному корню трансцендентного уравнения неизвестного s :

$$f(s) = 0,$$

где

$$(1) \quad f(s) = (1 + ab)(e^{as} - e^{bs}) \sin s + (a - b)[(e^{as} + e^{bs}) \cos s - 1 - e^{(a+b)s}] = -\frac{a-b}{12}(1 + a^2)(1 + b^2)s^4 + a_5 s^5 + \dots$$

и приведён ряд замечаний относительно распределения положительных корней указанного уравнения.

В настоящей заметке приведены некоторые новые замечания относительно распределения вышеуказанных корней.

Из заключения заметки [2], считаем полезным упомянуть следующие:

1°. Если $b \leq 0$, $f(s)$ имеет бесконечное число корней.

$$s = \tau_n (n\pi < \tau_n < (n+1)\pi) \text{ для } b < 0 \text{ и } s = 2n\pi \text{ и } s = \tau_{2n}$$

$$(2n\pi < \tau_{2n} < (2n+1)\pi) \text{ для } b = 0 \text{ (} n = 1, 2, \dots \text{)}.$$

2°. Для $b > 0$, если $ab \geq 1$, то $f(s) < 0$ для всякого $s > 0$,

для $b > 0$, но $ab < 1$, имеем $f(s) < 0$ для $0 < s \leq 2\pi$.

Полузакнутый интервал $(0, 2\pi]$, в котором у $f(s)$ нет корней, нельзя продолжать направо, иными словами можно найти такие значения a и b , чтобы $f(s_1) > 0$, причём s_1 — число большее 2π , но произвольно близкое к 2π .

2. Если перейти теперь к собственному содержанию настоящей заметки, имеется из (1)

$$(2) \quad f_2(a) = \frac{f(s)}{a-b} = -1 + (e^{as} + e^{bs}) \cos s - e^{(a+b)s} + \frac{1+ab}{a-b} (e^{as} - e^{bs}) \sin s,$$

так что

$$\begin{aligned} f_3(a) &= \frac{(a-b)^2}{e^{(a+b)s}} f_2'(a) = -(1+b^2)(e^{-bs} - e^{-as}) \sin s + \\ &+ (a-b)s [(1+ab)e^{-bs} \sin s - (a-b)(1 - e^{-bs} \cos s)] \\ \frac{1}{s} f_3'(a) &= -(1+b^2)e^{-as} \sin s + (1-b^2)e^{-bs} \sin s + \\ &+ 2b(1 - e^{-bs} \cos s) - 2a [1 - e^{-bs} (\cos s + b \sin s)] \\ \frac{1}{2s} f_3''(a) &= -1 + \frac{1+b^2}{2} s e^{-as} \sin s + e^{-bs} (\cos s + b \sin s), \end{aligned}$$

стало быть

(3)

$$\begin{aligned} f_3(a)|_{a=b} &= f'(a)|_{a=b} = 0, \\ S(s) &= \frac{1}{2s} f_3''(a)|_{a=b} = -1 + e^{-bs} \left(\cos s + b \sin s + \frac{1+b^2}{2} s \sin s \right), \\ S'(s) &= \frac{1+b^2}{2} e^{-bs} [s \cos s - (1+bs) \sin s], \end{aligned}$$

$$\operatorname{sg} f_2(a)|_{a=\infty} = \operatorname{sg} f_3(a)|_{a=\infty} = \operatorname{sg} f_3'(a)|_{a=\infty} = \operatorname{sg} f_3''(a)|_{a=\infty} = -\operatorname{sg} f_4(s),$$

где

$$f_4(s) = 1 - e^{-bs} (\cos s + b \sin s),$$

$$f_4(p\pi) = 1 + (-1)^{p-1} e^{-bp\pi} \quad (p = 0, 1, \dots); \quad \frac{f_4'(s)}{1+b^2} = e^{-bs} \sin s.$$

Таблица 1.

s	0	π	2π		$2p\pi$	$(2p+1)\pi$	...				
$f_4'(s)$	0	+	0	-	0		0	+	+	0	...
$f_4(s)$	0	$\nearrow$	$f_4(\pi)$	$\searrow$	$f_4(2\pi)$		$f_4(2p\pi)$	$\nearrow$	$f_4[(2p+1)\pi]$	...	

Если $\frac{f_4(s)}{\sin s} > 0$ то $f_3''(a)$ имеет корень $a=a_1$, данный соотношением

(3₁)

$$e^{-as} = \frac{2}{1+b^2} \frac{f_4(s)}{s \sin s},$$

a

$$e^{-bs} - e^{-as} = \frac{2}{1+b^2} \frac{S(s)}{s \sin s},$$

стало быть:

$$(3_2) \quad \begin{cases} \text{если } 2p\pi < s < (2p+1)\pi, & \text{то } \operatorname{sg}(a_1 - b) = \operatorname{sg} S(s) \\ \text{если } (2p+1)\pi < s < (2p+2)\pi & \text{то } \operatorname{sg}(a_1 - b) = -\operatorname{sg} S(s) \end{cases} \quad (p = 0, 1, \dots)$$

а если $s \neq p\pi$, то $a_1 = b$ когда $S(s) = 0$ и обратно.

Из (3) видно, что $S'(s) = 0$ если

$$(4) \quad s = f_5(s) = \frac{\sin s}{\cos s - b \sin s}; \quad f_5'(s) = \frac{1}{(\cos s - b \sin s)^2}; \quad f_5''(s) = 2 \frac{\sin s + b \cos s}{(\cos s - b \sin s)^3}$$

Надо различать несколько случаев:

Случай $b < 0$

3. Обозначая $0 < \alpha = \operatorname{arctg}(-b) < \frac{\pi}{2}$ имеем из (4) таблицу 2 и рис. 1, из которых ясно, что

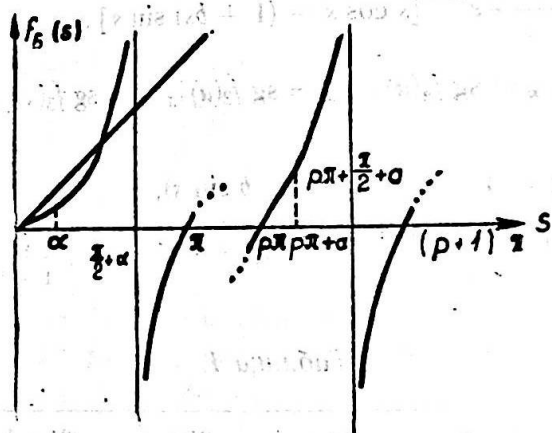


Рис. 1.

Таблица 2.

s	0	α	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	π ...	$p\pi$	$p\pi + \alpha$	$p\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha$	$(p+1)\pi$...
$f_5''(s)$	-	0		...	-	0	+	...
$f_5'(s)$	0				+			...
$f_5(s)$	$0 \nearrow S(\alpha) \nearrow \pm \infty \nearrow 0$			$0 \dots \nearrow 0 \nearrow f_5(\alpha) \nearrow \pm \infty \nearrow 0$				$0 \nearrow \dots$

$$(4_1) \quad \begin{cases} S'(s) \text{ имеет корни} \\ s = \sigma_p^{(1)} (p\pi < \sigma_p^{(1)} < (p+1)\pi), \quad (p = 0, 1, \dots) \end{cases}$$

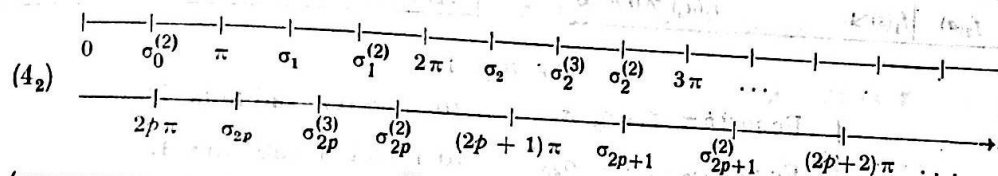
Из таблицы 1 следует, что

$$(4_1) \quad f_4(s) \text{ имеет корни } s = \sigma_p \quad (p\pi < \sigma_p < (p+1)\pi), \quad (p = 1, 2, \dots)$$

и так как $S(\sigma_p) = \frac{1+b^2}{2} \sigma_p e^{-b\sigma_p} \sin \sigma_p$, из таблицы 3 следует что $\sigma_p < \sigma_p^{(2)}$ ($p = 1, 2, \dots$), причём

$$(4_1'') \quad \sigma_p^{(2)} (p = 0, 1, \dots) - \text{корни } S(s) \quad (p\pi < \sigma_p^{(2)} < (p+1)\pi)$$

их существование ясно на той таблице. Стало быть, имеется следующее расположение:



(дополненное значениями $\sigma_{2p}^{(3)}$ из (6₀), (9) и (11)) из которого имеем следующие таблицы 4—7.

Таблица 3.

s	0	$\sigma_0^{(1)}$	$\sigma_0^{(2)}$	π	$\sigma_1^{(1)}$	$\sigma_1^{(2)}$	2π	...	$2p\pi$
$S'(s)$	+	0		-	0	+		...	+
$S(s)$	$0 \nearrow S(\sigma_0^{(1)}) \searrow 0 \searrow -(1+e^{-b\pi}) \searrow S(\sigma_1^{(1)}) \nearrow 0 \nearrow -1+e^{-2b\pi} \dots \nearrow -1+e^{-2bp\pi}$								

s	$\sigma_{2p}^{(1)}$	$\sigma_{2p}^{(2)}$	$(2p+1)\pi$	$\sigma_{2p+1}^{(1)}$	$\sigma_{2p+1}^{(2)}$	$(2p+2)\pi$	...
$S'(s)$	0	-		0	+		...
$S(s)$	$S(\sigma_{2p}^{(1)}) \searrow 0 \searrow -(1+e^{-(2p+1)b\pi}) \searrow S(\sigma_{2p+1}^{(1)}) \nearrow 0 \nearrow -1+e^{-(2p+2)b\pi} \dots$						

Для $p = 0$

$$1^\circ. \quad 0 < s < \sigma_0^{(2)}$$

$$2^\circ. \quad \sigma_0^{(2)} \leq s \leq \sigma_1, \quad s \neq \pi$$

Таблица 4.

a	b	a_1	a_2	a_3	∞
$f_3''(a)$	> 0	+	0	-	
$f_3'(a)$	$0 \nearrow f_3'(a_1) \searrow 0 \searrow$			$-\infty$	
$f_3(a)$	0	$\nearrow f_3(a_2) \searrow 0 \searrow$		$-\infty$	
$f_2(a)$	$f_1(s) \nearrow$		$f_2(a_3) \searrow$	$-\infty$	

Таблица 5.

a	b	∞
$f_3''(a)$	≤ 0	-
$f_3'(a)$	0	$\searrow -\infty$
$f_3(a)$	0	$\searrow -\infty$
$f_2(a)$	$f_1(s)$	$\searrow -\infty$

3°. $\sigma_1 < s < \sigma_1^{(2)}$
Таблица 6.

a	b	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	∞
$f_3''(a)$	< 0	-	0	+		
$f_3'(a)$	0	>	$f_3'(a_1)$	>	0	∞
$f_3(a)$	0	>	$f_3(a_2)$	>	0	∞
$f_2(a)$	$f_1(s)$	>	$f_2(a_3)$	>	0	∞

4°. $\sigma_1^{(2)} \leq s < 2\pi$

Таблица 7.

a	b	a ₁	∞
$f_3''(a)$	≥ 0	+	
$f_3'(a)$	0	>	∞
$f_3(a)$	0	>	∞
$f_2(a)$	$f_1(s)$	>	0

для $p \geq 1$

- (5) Если $2p\pi < s \leq \sigma_{2p}$, то имеется таблица 7¹⁾.
 Если $\sigma_{2p} < s < \sigma_{2p}^{(2)}$, то имеется таблица 4.
 Если $\sigma_{2p}^{(2)} \leq s \leq \sigma_{2p+1}$, то имеется таблица 5.
 Если $\sigma_{2p+1} < s < \sigma_{2p+1}^{(2)}$, то имеется таблица 6.
 Если $\sigma_{2p+1}^{(2)} \leq s < (2p+2)\pi$ то имеется таблица 7.

В таблицах 4—7 обозначено (с помощью (2))

$$(5_1) \quad f_1(s) = \lim_{a \rightarrow b} f_2(a) = f_2(a)|_{a=b} = -1 + e^{bs} [2 \cos s + (1+b^2)s \sin s] - e^{2bs}.$$

(2) даёт

$$(6) \quad f_2(0) = -2 \sin \frac{s}{2} f_6(s), \text{ где } f_6(s) = \frac{1}{b} (1 - e^{bs}) \cos \frac{s}{2} + (1 + e^{bs}) \sin \frac{s}{2}$$

обращается в нуль, когда

$$s = f_7(s) = \frac{1}{b} \log \frac{\cos \frac{s}{2} + b \sin \frac{s}{2}}{\cos \frac{s}{2} - b \sin \frac{s}{2}},$$

стало быть

$$f_7'(s) = \frac{1}{\cos^2 \frac{s}{2} - b^2 \sin^2 \frac{s}{2}}, \quad f_7''(s) = \frac{1+b^2}{2} \frac{\sin s}{\left(\cos^2 \frac{s}{2} - b^2 \sin^2 \frac{s}{2}\right)^2}.$$

Если обозначать $0 < \beta = \arctg \left(-\frac{1}{b}\right) < \frac{\pi}{2}$, то ясно на рис. 2, что

$$(6_0) \quad \begin{cases} f_6(s) \text{ имеет корни} \\ s = \sigma_{2p}^{(3)} (2p\pi < \sigma_{2p}^{(3)} < (2p+1)\pi, \quad p = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

1) с той разницей что: 1°. для $s = \sigma_{2p}$ или $s = \sigma_{2p+1}$, $f_3'(a)|_{a=\infty} = (1+b^2) s e^{-bs} \sin s$,
 2°. не имеется обязательно $f_1(s) < 0$, как для $p = 0$ (см. соотношение (34₂)).

2) Уравнение $f_6(s) = 0$ можно написать в виде $b \operatorname{tg} \frac{s}{2} = \operatorname{th} \frac{bs}{2}$, где $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Значит

$$(6_1) \quad \begin{cases} \text{для } 2p\pi \leq s < \sigma_{2p}^{(3)}, & \operatorname{sg} f_6(s) = \operatorname{sg}(-1)^{p-1}, \\ \text{а для } \sigma_{2p}^{(3)} < s \leq (2p+2)\pi, & \operatorname{sg} f_6(s) = \operatorname{sg}(-1)^p (p = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

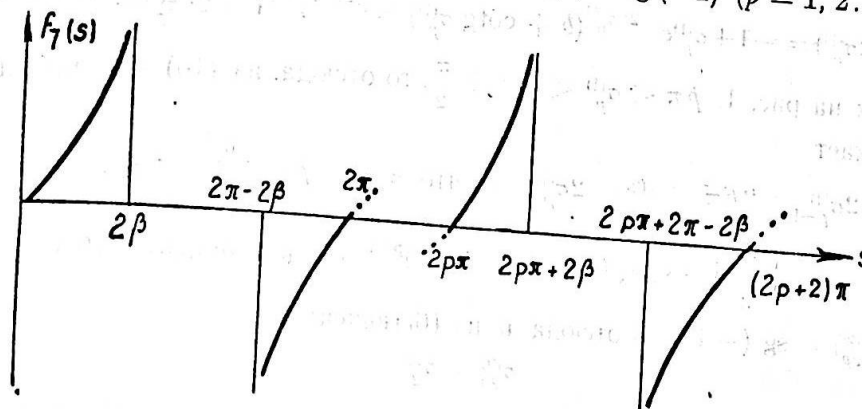


Рис. 2.

Отсюда и из 6 вытекает:

$$(7) \quad \begin{cases} \text{Для } 2p\pi < s < \sigma_{2p}^{(3)}, & f_2(0) > 0 \\ \text{а для } \sigma_{2p}^{(3)} < s < (2p+2)\pi, & f_2(0) < 0. \\ \text{Для } s = 2p\pi, \sigma_{2p}^{(3)} \text{ или } (2p+2)\pi, & f_2(0) = 0 (p = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

4. ТЕОРЕМА 1. Имеется

$$\sigma_{2p} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(2)} \quad (p = 1, 2, \dots),$$

$$\sigma_{2p+1} < \tau_{2p+1} < (2p+2)\pi \quad (p = 0, 1, \dots).$$

$$(\sigma_p, \sigma_p^{(2)}) \text{ даны соответственно (4') и (4'')}. \quad (8)$$

Доказательство. На черт. 2 ясно, что в $(0, 2\pi]$ у $f_6(s)$ нет корней, значит

$$(8) \quad \text{для } 0 < s < 2\pi, \quad f_2(0) < 0.$$

Учитывая, что в (3) и (4') $f_4(\sigma_{2p}) = 0$, имеем для $p \geq 1$ в (6)

$$f_6(\sigma_{2p}) = \frac{1+b^2}{b} \sin \frac{\sigma_{2p}}{2} \sin \sigma_{2p}, \text{ стало быть } \operatorname{sg} f_6(\sigma_{2p}) = \operatorname{sg}(-1)^{p-1},$$

а отсюда и из (6₁)

$$(9) \quad \sigma_{2p} < \sigma_{2p}^{(3)}.$$

Учитывая что в (3) и (4'') $S(\sigma_{2p}^{(2)}) = 0$, имеется в (6)

$$(9_1) \quad f_6(\sigma_{2p}^{(2)}) = \frac{1+b^2}{2} \sin \sigma_{2p}^{(2)} f_8\left(\frac{\sigma_{2p}^{(2)}}{2}\right), \text{ где } f_8(s) = (1+bs) \sin s - s \cos s$$

обращается в нуль вместе с $S'(s)$ из (3), стало быть для $s = \sigma_p^{(1)}$ из (4₁).

Учитывая дальше, что $f_8(\sigma_p^{(1)}) = 0$, имеется поэтому

$$(10) S(2\sigma_p^{(1)}) = -1 + \sigma_p^{(1)} e^{-2b\sigma_p^{(1)}} (b + \cotg \sigma_p^{(1)}) = e^{-2b\sigma_p^{(1)}} (1 + 2b\sigma_p^{(1)} - e^{2b\sigma_p^{(1)}}) < 0.$$

Так как на рис. 1. $p\pi < \sigma_p^{(1)} < p\pi + \frac{\pi}{2}$, то отсюда, из (10) и из таблицы 3 вытекает

$$2\sigma_{p-1}^{(1)} < 2p\pi < \sigma_{2p}^{(2)} < 2\sigma_p^{(1)}, \text{ так что } \sigma_{p-1}^{(1)} < p\pi < \frac{\sigma_{2p}^{(2)}}{2} < \sigma_p^{(1)}.$$

Значит $\operatorname{sg} f_8\left(\frac{\sigma_{2p}^{(2)}}{2}\right) = \operatorname{sg} f_8(p\pi) = \operatorname{sg}(-1)^{p-1}$, следовательно в (9₁)

$$\operatorname{sg} f_8(\sigma_{2p}^{(2)}) = \operatorname{sg}(-1)^p, \text{ а отсюда и из (6₁) вытекает}$$

$$(11) \quad \sigma_{2p}^{(3)} < \sigma_{2p}^{(2)}.$$

Из 1°. (стр. 172), вытекает $\tau_1 > \pi$, значит $\tau_1 \in (0, \sigma_0^{(2)})$, что легко вывести из (4₁). Из (8) и из таблицы 5 вытекает $\tau_1 \in [\pi, \sigma_1]$, так что

$$(12) \quad \sigma_1 < \tau_1 < 2\pi.$$

(5) и (7) дают

$$\tau_{2p} \in [2p\pi, \sigma_{2p}], \tau_{2p} \in [\sigma_{2p}^{(2)}, (2p+1)\pi], \tau_{2p+1} \in [(2p+1)\pi, \sigma_{2p+1}],$$

поскольку из распоряжения (4₂) и из таблиц (5) и (7) вытекает, что в рассматриваемых промежутках $f_2(a) \neq 0$ для всякого $a > b$, стало быть в (2) $f(s) \neq 0$. Значит

$$(13) \quad \begin{aligned} \sigma_{2p} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(2)} & \quad (p = 1, 2, \dots) \\ \sigma_{2p+1} < \tau_{2p+1} < (2p+2)\pi & \quad (p = 0, 1, \dots) \end{aligned}$$

(в неравенствах для τ_{2p+1} можно с помощью (12) принять $p=0, 1, \dots$) что и доказывает теорему. Сделаем ещё следующее замечание:

Из (6₀) и (6) вытекает

$$\lim_{a \rightarrow 0} \tau_{2p} = \sigma_{2p}^{(3)} \quad (p = 1, 2, \dots).$$

5. Очевидно, что для известных промежутков изменения s , можно иметь с помощью соотношений (5) и таблиц 4—7 более точные ограничения для корней τ_n функции $f(s)$, чем те, данные (13). Приведём простой пример такого ограничения. Из (13) вытекает

$$(14) f_3(a)|_{a=0} = (1+b^2)(1-e^{-bs}) \sin s - bs(b+e^{-bs} \sin s - be^{-bs} \cos s).$$

Если обозначить

$$(14_1) \quad f_9(s) = b + e^{-bs} (\sin s - b \cos s),$$

Таблица 8.

s	$2p\pi$	$2p\pi + \frac{\pi}{2}$	$\sigma_{2p}^{(4)}$	$(2p+1)\pi$
$f_9'(s)$		$+0-$		
$f_9(s)$	0	$\nearrow \text{Max} \searrow$	0	$b(1+e^{-b\pi})$

то $\frac{f_9'(s)}{1+b^2} = e^{-bs} \cos s$, значит

(14₂) $f_9(s)$ имеет в $[2p\pi, (2p+1)\pi]$ корень $s = \sigma_{2p}^{(4)}$ и $f_9(\sigma_{2p}^{(2)}) = (1+b^2)e^{-b\sigma_{2p}^{(2)}} \sin \sigma_{2p}^{(2)} \left(1 + \frac{b}{2} \sigma_{2p}^{(2)}\right)$ как вытекает из (14₁) и (4₁).

ТЕОРЕМА 2. Если $1 \leq p < -\frac{1}{2} - \frac{1}{b\pi}$, то $\sigma_{2p} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(3)}$. Если $p > -\frac{1}{p\pi}$ то или $\sigma_{2p} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(3)}$ или $\sigma_{2p}^{(4)} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(2)}$. ($\sigma_p, \sigma_p^{(2)}, \sigma_p^{(3)}, \sigma_p^{(4)}$ даны соответственно (4₁), (4₁), (6₀) и (14₂)).

Доказательство. Если

$$(15) \quad 1 \leq p < -\frac{1}{2} - \frac{1}{b\pi}$$

(если имеются такие значения p , то есть $|b|$ достаточно мало), то $1 + \frac{b}{2} \sigma_{2p}^{(2)} > 0$, значит $f_9(\sigma_{2p}^{(2)}) > 0$; в таком случае таблица 8 даёт

$$(15_1) \quad \sigma_{2p}^{(2)} \leq \sigma_{2p}^{(4)}.$$

Из (14₁) и (6₀) вытекает

$$(15_2) \quad f_9(\sigma_{2p}^{(3)}) = (1+b^2) \frac{1 + \cos \sigma_{2p}^{(3)}}{b + \cotg \frac{\sigma_{2p}^{(3)}}{2}}.$$

Но на рис. 2, $2p\pi < \sigma_{2p}^{(3)} < 2p\pi + 2\beta$, значит

$$p\pi < \frac{1}{2} \sigma_{2p}^{(3)} < p\pi + \beta, \text{ так что } \operatorname{tg} \frac{1}{2} \sigma_{2p}^{(3)} < \operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{b},$$

стало быть $\cotg \frac{1}{2} \sigma_{2p}^{(3)} > -b$, так что в (15₂) $f_9(\sigma_{2p}^{(3)}) > 0$. В таком случае, таблица 8 даёт

$$(16) \quad \sigma_{2p}^{(3)} < \sigma_{2p}^{(4)} \quad (p = 1, 2, \dots)$$

(впрочем, данное соотношение непосредственно вытекает из (11) и (15₁), но для одних значений (15)_p). Для значений (15)_p, имеется таким образом для $\sigma_{2p}^{(3)} < s < \sigma_{2p}^{(4)}$, что $f_3(s) > 0$, значит в (14) $f_3(a)|_{a=0} < 0$, а в таком случае таблица 4 даёт $a_3 < 0$, значит $f_2(a)$ убывает, когда a возрастает от 0 до ∞ . Так как $f_2(0) < 0$, то $f_2(a) < 0$, значит $\tau_{2p} \in [\sigma_{2p}^{(3)}, \sigma_{2p}^{(2)}]$, так что в (13) имеется

$$(17) \quad \sigma_{2p} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(3)}.$$

Это лучшее ограничение для значений (15)_p. Используя соотношение (16), приходим также к заключению $\tau_{2p} \in [\sigma_{2p}^{(3)}, \sigma_{2p}^{(4)}]$.

$$(17) \quad \text{Если } \sigma_{2p}^{(4)} < \sigma_{2p}^{(2)}, \text{ то это значит что } \sigma_{2p} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(3)},$$

или что $\sigma_{2p}^{(4)} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(2)}$. Это ограничение, имеющее место для всякого $p > -\frac{1}{2\pi}$ и тоже лучше, чем данное в (13) чем и доказывается теорема.

Очевидно, что более обстоятельным исследованием знака $f_3(a)|_{a=0}$ из (14) при $\sigma_{2p} < s < \sigma_{2p}^{(2)}$, можно было бы достигнуть лучших ограничений для τ_{2p} . Впрочем, из таблицы 4 вытекает, что при данном $s = \sigma$ из промежутка (17), существует единственное значение a для которого $\tau_{2p} = \sigma$ а из таблиц 6 и 7, что при $s = \sigma$ из промежутка (13) для τ_{2p+1} существует единственное значение a , для которого $\tau_{2p+1} = \sigma$ (конечно, при данном значении b).

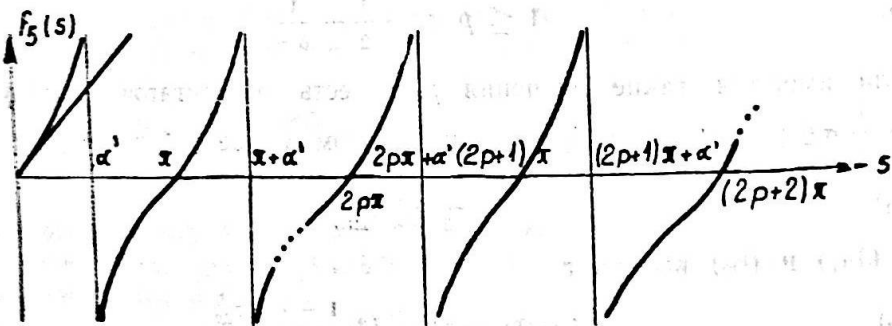


Рис. 3.

Случай $b > 0$.

6. Рисунок 1 заменяется рисунком 3¹⁾, значит в соотношении (4₁) принимают $p=1, 2, \dots$. Сокращая в таблице 3 $\sigma_0^{(1)}$ и учитывая, что для достаточно малого $s > 0$, $S''(s) < 0$, вытекает, что

$$(17_0) \quad \begin{cases} \text{для } b > 0, \text{ значения } s \text{ обращающие } S(s) \text{ в максимум,} \\ \text{соответственно в минимум, суть } s = \sigma_{2p}^{(1)}, \text{ соответственно } s = \sigma_{2p+1}^{(1)} \\ \text{(конечно, } S(2p\pi) < 0). \end{cases}$$

¹⁾ где $0 < \alpha' = \arctg \frac{1}{b} < \frac{\pi}{2}$.

ТЕОРЕМА 3. Если $b \geq b_2$, то $f(s) < 0$ при всяком $s > 0$. Здесь b_2 — корень (заключённый между $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$) уравнения

$$e^{2\pi b} = 1 + \frac{\pi}{b} (1 + b^2).$$

Доказательство. На рис. 3, $2p\pi < \sigma_{2p}^{(1)} < 2p\pi + \frac{\pi}{2}$, отсюда из (3) и (4₁) вытекает

$$(18) \quad \begin{cases} \text{где} \\ f_{10}(s) = -1 + e^{-bs} \frac{1 + 2bs + \frac{1}{2}(1 + b^2)s^2}{\sqrt{1 + 2bs + (1 + b^2)s^2}}, \\ \text{так что} \\ f'_{10}(s) = -e^{-bs} \frac{bs[b + \frac{1}{2}(1 + b^2)s][2 + \frac{1}{b}(-1 + 3b^2)s + (1 + b^2)s^2]}{[1 + 2bs + (1 + b^2)s^2]\sqrt{1 + 2bs + (1 + b^2)s^2}} \end{cases}$$

обращается в нуль для $s = 0$, $s = \frac{-2b}{1 + b^2}$,

$$(18_1) \quad \begin{cases} s = \bar{s}_1 = \bar{s}_1(b) = \frac{1}{2b(1 + b^2)} (1 - 3b^2 - \sqrt{1 - 14b^2 + b^4}) \\ \text{и } s = \bar{s}_2 = \bar{s}_2(b) = \frac{1}{2b(1 + b^2)} (1 - 3b^2 + \sqrt{1 - 14b^2 + b^4}). \end{cases}$$

(18₂) Корни $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$ различны и вещественны для $0 < b < 2 - \sqrt{3}$ или $b > 2 + \sqrt{3}$. Для $b > 2 + \sqrt{3}$, (18) даёт $f_{10}(s) < 0$ для всякого $s > 0$ (поскольку тогда $\bar{s}_1 < 0$, $\bar{s}_2 < 0$). Если $2 - \sqrt{3} \leq b \leq 2 + \sqrt{3}$, то в (18) имеется снова $f_{10}(s) < 0$, для всякого $s > 0$ (поскольку $f'_{10} s \leq 0$).

Значит

$$(19) \quad f_{11}(b) = f_{10}(\bar{s}_2) = -1 + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \sqrt{(1 + b^2)(1 + b^2 + \sqrt{1 - 14b^2 + b^4})} e^{-\frac{1 - 3b^2 + \sqrt{1 - 14b^2 + b^4}}{2(1 + b^2)}}.$$

Если обозначить ради удобства

$$(20) \quad x = \frac{1 - 3b^2 + \sqrt{1 - 14b^2 + b^4}}{2(1 + b^2)},$$

то откуда имеется

$$(20_1) \quad b^2 = \frac{x(1-x)}{(1+x)(2+x)},$$

а если заменить это значение в (19), то получается

$$(21) \quad f_{11}(b) = f_{12}(x) = -1 + \sqrt{\frac{1+2x}{1-x^2}} e^{-x}$$

и из (20) вытекает

$$(21_1) \quad \frac{dx}{db} = -4b \frac{2(1-b^2) + \sqrt{1-14b^2+b^4}}{(1+b^2)^2 \sqrt{1-14b^2+b^4}} < 0.$$

Так что когда b возрастает от 0 до $2 - \sqrt{3}$, x убывает от 1 до $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, значит,

$2x^2 + 2x - 1 \geq 0$, (это соотношение появляется в ходе проверки того, что b^2 данное (20₁) удовлетворяет соотношению (20)), стало быть

$$f'_{12}(x) = x \frac{-1 + 2x + 2x^2}{(1-x^2)^2 \sqrt{\frac{1+2x}{1-x^2}}} e^{-x} \geq 0$$

$$\text{и } f'_{11}(b) = f'_{12}(x) \frac{dx}{db} \leq 0$$

Таблица 9.

x	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	x_0	1
$f_{12}(x)$	$-1 + \sqrt{2}e^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} < 0$	0	∞

Таблица 10.

b	0	b_0	$2 - \sqrt{3}$
$f_{11}(b)$	∞	≥ 0	$-1 + \sqrt{2}e^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$

(легко видеть, что $-1 + \sqrt{2}e^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} < 0$ поскольку данное неравенство пишется $\sqrt{3}-1 = 0,7... > \log 2 = 0,6...$); из (20₁) вытекает, что

$$(22) \quad \begin{cases} \text{в таблице 10 } x_0 - \text{положительный корень функции } f_{12}(x) \\ \text{из (21), а} \end{cases} \quad b_0 = \sqrt{\frac{x_0(1-x_0)}{(1+x_0)(2+x_0)}}.$$

Для $0 < b < b_0$, имеется таким образом из (18) таблица 11.

Таблица 11.

s	0	$\bar{s}_1$	$\bar{s}_3 = \bar{s}_3(b)$	$\bar{s}_2$	$\bar{s}_4 = \bar{s}_4(b)$	∞
$f'_{10}(s)$	0	-	0	+	0	-
$f_{10}(s)$	0	$\geq f_{10}(\bar{s}_1)$	≥ 0	$\geq f_{11}(b)$	≥ 0	≥ -1

Если обозначить в (18) $f_{10}(s) = f_{13}(b)$, то имеется

$$(23) \quad f'_{13}(b) = -s^2 e^{-bs} \frac{4b + 8b^2s + 5b(1+b^2)s^2 + (1+b^2)s^3}{2[1+2bs+(1+b^2)s^2]\sqrt{1+2bs+(1+b^2)s^2}} < 0.$$

Так что если $0 < b_1 < b_2 < b_0$, то при обозначении в (18) $f_{10}(s) = f_{10}(s, b)$,

$$f_{10}(\bar{s}_4(b_2), b_2) = 0 < f_{10}(\bar{s}_4(b_2), b_1)$$

$$f_{10}(\bar{s}_3(b_2), b_2) = 0 < f_{10}(\bar{s}_3(b_2), b_1).$$

Это вместе с таблицей 11, построенной для $b = b_1$, означает что $\bar{s}_4(b_2) < \bar{s}_4(b_1)$, а $\bar{s}_3(b_2) > \bar{s}_3(b_1)$, стало быть

$$(24) \quad \bar{s}_3(b) \text{ возрастает с } b, \text{ а } \bar{s}_4(b) \text{ убывает, когда } b \text{ возрастает.}$$

На рис. 4 построены с помощью таблицы 11 и соотношения (23) кривые с уравнениями соответственно $y = f_{10}(s)$ для некоторого $b < b_0$ (плотно) и $y = f_{10}(s)$ для $b = b_0$ (пунктиром). На этом рисунке видно, что

$$(24_1) \quad \bar{s}_3(b_0) = \bar{s}_4(b_0) = \bar{s}_2(b_0),$$

но из (18₁), (20) и (20₁) вытекает

$$(25) \quad \bar{s}_2(b) = \frac{x}{b} = f_{14}(x) = \sqrt{\frac{x(1+x)(2+x)}{1-x}},$$

стало быть

$$f_{14}(x) = \frac{1+3x-x^3}{(1-x)^2 \sqrt{\frac{x(1+x)(2+x)}{1-x}}} > 0, \quad \left(\text{для } \frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq x \leq 1 \right).$$

Но

$$(26) \quad f_{14}\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{1}{8} \sqrt{2415} < 2\pi$$

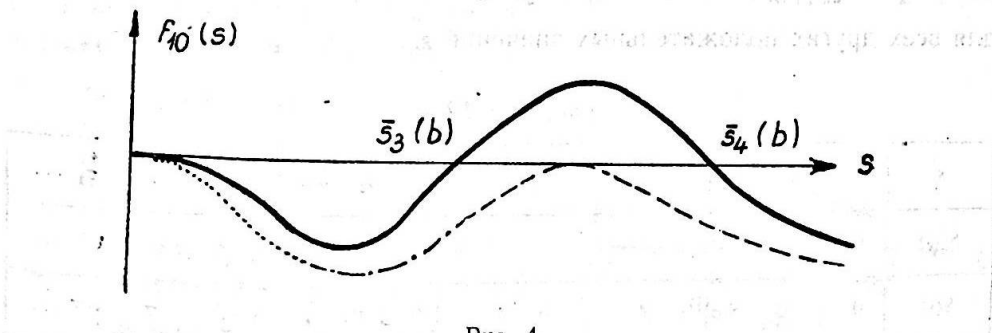


Рис. 4.

(поскольку данное неравенство напишется $\sqrt{2415} < 50 < 50,24 < 16\pi$). Из (21) вытекает далее

$$f_{12}\left(\frac{7}{8}\right) = e^{-\frac{7}{8}} \left(-e^{\frac{7}{8}} + 4 \sqrt{\frac{11}{15}} \right) > e^{-\frac{7}{8}} \left(4 \sqrt{\frac{11}{15}} - 3 \right) > 0.$$

Значит, из таблицы 9 вытекает $x_0 < \frac{7}{8}$ а отсюда из (25) и (26)

$$f_{14}(x_0) = \bar{s}_2(b_0) < f_{14}\left(\frac{7}{8}\right) < 2\pi; \text{ его соотношение и (24)}_1 \text{ дают}$$

$$(26)_1 \quad \bar{s}_3(b_0) < 2\pi.$$

Отсюда и из (24) вытекает

$$(27) \quad \bar{s}_3(b) < 2\pi \text{ для всякого } 0 < b \leq b_0.$$

(18)₁ даёт $\lim_{b \rightarrow 0} \bar{s}_2(b) = \infty$. Так как $\bar{s}_4 > \bar{s}_2$, то тем более

$$(27)_1 \quad \lim_{b \rightarrow 0} \bar{s}_4(b) = \infty.$$

Так что с помощью (24) и (24)₁ можно заключить, что

$$(28) \quad \begin{cases} \text{если } b \text{ возрастает от } 0 \text{ до } b_0, \text{ то } \bar{s}_4(b) \text{ убывает от } \infty \text{ до} \\ \bar{s}_4(b_0) = f_{14}(x_0) < 2\pi. \end{cases}$$

Следовательно, если дано некоторое целое положительное число p_1 , можно найти такое $\eta = \eta(p_1) > 0$, чтобы при всяком (конечно, положительном) $b < \eta$ иметь $\bar{s}_4(b) > 2p_1\pi + \frac{\pi}{2}$. Пусть, таким образом

$$(28^*) \quad \sigma_{2p_1}^{(1)} < \bar{s}_4 \leq \sigma_{2(p_1+1)}^{(1)}.$$

Из (18), (27) и таблицы 11 вытекает, что $S(\sigma_{2p}^{(1)}) > 0$ ($p = 1, 2, \dots, p_2$) и $S(\sigma_{2p}^{(1)}) < 0$ ($p = p_2 + 1, p_2 + 2, \dots$); для $S(s)$ имеется, таким образом, таблица 12 (построена с помощью (17)₀) вместо таблицы 3, из которой вытекает, что $S(\bar{\sigma}_{2p}) = S(\bar{\sigma}_{2p}) = 0$ ($p = 1, 2, \dots, p_2$); возможно $S(\sigma_{2(p_2+1)}^{(1)}) = 0$ (если $\bar{s}_4 = \sigma_{2(p_2+1)}^{(1)}$); $S(s) > 0$ при $\bar{\sigma}_{2p} < s < \bar{\sigma}_{2p+1}$ ($p = 1, 2, \dots, p_2$); $S(s) < 0$ для всех других положительных значений s .

Таблица 12.

s	0	π	$\sigma_1^{(1)}$	2π	$\bar{\sigma}_2$	$\sigma_2^{(1)}$	$\bar{\sigma}_2$	3π	$\sigma_3^{(1)}$	4π	$\bar{\sigma}_4 \dots$				
$S'(s)$	0	-	0	-		0		-	0	+	...				
$S(s)$	0	$\succ$	$S(\sigma_1^{(1)})$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$S(\sigma_2^{(1)})$	$\succ$	0	$\succ$	$S(\sigma_3^{(1)})$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	...

s	$2p_2\pi$	$\bar{\sigma}_{2p_2}$	$\sigma_{2p_2}^{(1)}$	$\bar{\sigma}_{2p_2}$	$(2p_2+1)\pi$	$\sigma_{2p_2+1}^{(1)}$	$(2p_2+2)\pi$
$S'(s)$		+	0		-	0	+
$S(s)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$S(\sigma_{2p_2}^{(1)}) \succ 0$	$\succ$	$S(\sigma_{2p_2+1}^{(1)})$	$\nearrow$

s	$(2p_2+2)\pi$	$\sigma_{2(p_2+1)}^{(1)}$	$(2p_2+3)\pi$	$\sigma_{2p_2+3}^{(1)}$	$2(p_2+2)\pi$	$\sigma_{2(p_2+2)}^{(1)} \dots$
$S'(s)$	+	0	-	0	+	0 - \dots
$S(s)$	$\nearrow$	$S(\sigma_{2(p_2+1)}^{(1)}) \leq 0 \succ$		$S(\sigma_{2p_2+3}^{(1)})$	$\nearrow$	$S(\sigma_{2(p_2+2)}^{(1)}) < 0 \succ$

На таблице 1 видно что

$$(28_0) \quad f_4(s) > 0 \text{ для всякого } s > 0.$$

$$(28_1) \quad \begin{cases} \text{Значит, корень } a_1 \text{ из (3)}_1 \text{ существует для всякого} \\ s \in (2p\pi, (2p+1)\pi) \quad (p = 0, 1, \dots). \end{cases}$$

Если учитывать, что $\sigma_2^{(1)} = \sigma_2^{(1)}(b)$ удовлетворяет тождественно соотношению $b = -\frac{1}{\sigma_2^{(1)}} + \cotg \sigma_2^{(1)}$ (полученному из выражения (3) $S'(s)$), то путем дифференцирования полученного соотношения, получается

$$(29) \quad \frac{d}{db} \sigma_2^{(1)} = \frac{(\sigma_2^{(1)})^2}{1 - \left(\frac{(\sigma_2^{(1)})}{\sin \sigma_2^{(1)}} \right)^2} < 0.$$

С помощью (28) и (29) можно построить рис. 5, где кривая с уравнением $y = \bar{s}_4(b)$ изображена плотной чертой, а кривая с уравнением $y = \sigma_2^{(1)}(b)$ изображена пунктирной чертой, при этом мы учитывали, что из (24)₁ и (26)₁ вытекает $\bar{s}_4(b_0) < 2\pi$, и что из выражения (3) для $S'(s)$ вытекает

$$(29)_1 \quad \begin{cases} \sigma_2^{(1)}(0) = \sigma = \text{корень из интервала} \\ \left(2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \text{ уравнения } s = \tg s. \end{cases}$$

$$(29)_2 \quad \begin{cases} \text{Значит, в } (0, b_0) \text{ существует} \\ \text{единственное значение } (b=b_1) \\ \text{для которого } \bar{s}_4(b) = \sigma_2^{(1)}(b). \end{cases}$$

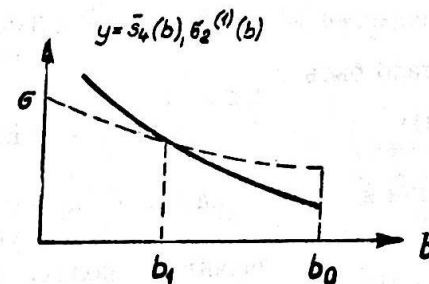


Рис. 5.

Легко показать, что существование нескольких таких значений невозможно; в самом деле, из (3) и (17₁) вытекает

$$(29_3) \quad f_{15}(b) = S(\sigma_2^{(1)}) = f_{10}(\sigma_2^{(1)}) = -1 + e^{-b\sigma_2^{(1)}} \frac{\sigma_2^{(1)}}{\sin \sigma_2^{(1)}} \left(1 - \frac{1+b^2}{2} \sin^2 \sigma_2^{(1)}\right).$$

Значит, с помощью (29)

$$(30) \quad f'_{15}(b) = \frac{(\sigma_2^{(1)})^2 e^{-b\sigma_2^{(1)}}}{(\sigma_2^{(1)})^2 - \sin^2 \sigma_2^{(1)}} \left\{ -\frac{\sigma_2^{(1)}}{\sin \sigma_2^{(1)}} \left[1 - \frac{1+b^2}{2} \sin^2 \sigma_2^{(1)}\right] \left[\sigma_2^{(1)} - b \sin^2 \sigma_2^{(1)}\right] + \right. \\ \left. + \sin \sigma_2^{(1)} \left[-\frac{b}{\sigma_2^{(1)}} \left((\sigma_2^{(1)})^2 - \sin^2 \sigma_2^{(1)}\right) + \sigma_2^{(1)} \cos \sigma_2^{(1)} \left(\frac{1}{\sin \sigma_2^{(1)}} + \frac{1+b^2}{2} \sin \sigma_2^{(1)}\right) \right] \right\}.$$

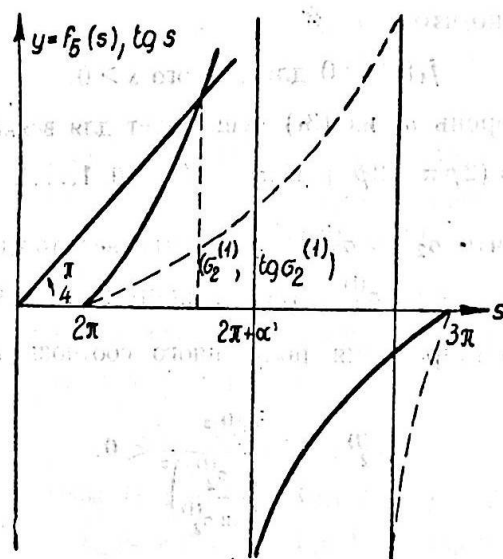


Рис. 6.

Но на рис. 3 видно, что

$$2\pi < \sigma_2^{(1)} < 2\pi + \arctg \frac{1}{b} < 2\pi + \frac{\pi}{2},$$

стало быть

$$(31) \quad \sin^2 \sigma_2^{(1)} < \sin^2 \left(\arctg \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{1+b^2}.$$

Если изобразить на рис. 6 кривые с уравнениями соответственно $y = f_5(s)$ (плотной чертой) и $y = tg s$ (пунктирной чертой), то там видно, что $\sigma_2^{(1)} > tg \sigma_2^{(1)}$, значит, поскольку $0 < b < b_0 < 1$,

$$(32) \quad \sigma_2^{(1)} > tg \sigma_2^{(1)} > b tg \sigma_2^{(1)} > b \sin^2 \sigma_2^{(1)}.$$

Следовательно, с помощью (31) и (32) имеется в (30)

$$f'_{15}(b) < \frac{(\sigma_2^{(1)})^3 e^{-b\sigma_2^{(1)}}}{2[(\sigma_2^{(1)})^2 + \sin^2 \sigma_2^{(1)}]} \left[2 - \frac{\sigma_2^{(1)} - b \sin^2 \sigma_2^{(1)}}{\sin \sigma_2^{(1)}} + (1+b^2) \sin^2 \sigma_2^{(1)} \right] < \\ (32_0) \quad < \frac{(\sigma_2^{(1)})^3 e^{-b\sigma_2^{(1)}}}{2[(\sigma_2^{(1)})^2 - \sin^2 \sigma_2^{(1)}]} (2 - \sigma_2^{(1)} + 1 + b + b^2) < 0,$$

поскольку $2 - \sigma_2^{(1)} < -4$, а для $0 < b < b_0 < 2 - \sqrt{3}$ имеем $1 + b + b^2 < 4$.

Имеем ещё в (29₃) с помощью (29₁) $f_{15}(0) = \frac{(1 - \cos \sigma)}{2 \cos \sigma} > 0$; так как на рис. 5 $\sigma_2^{(1)}(b_0) < \bar{s}_4(b_0)$, то из таблицы 11 вытекает, что $f_{15}(b_0) < 0$. Так как $f_{15}(b)$ — убывающая функция (см. соотношение (32₀)), то это значит, что в промежутке $(0, b_0)$ — единственное значение b , $b = b_1$ для которого $f_{15}(b_1) = f_{10}(\sigma_2^{(1)}(b_1)) = 0$, то есть для которого $\sigma_2^{(1)}(b_1) = \bar{s}_4(b_1)$; стало быть, кривые рис. 5 пересекаются один раз. (очевидно, что из соотношения $f_{10}(\sigma_2^{(1)}(b_1)) = 0$ нельзя заключить $\sigma_2^{(1)}(b_1) = \bar{s}_3(b_1)$ поскольку из (27) и из рис. 5 вытекает, что при $0 \leq b \leq b_0$ имеем $\sigma_2^{(1)}(b) > 2\pi > \bar{s}_3(b)$).

Значит, если $0 < b < b_1$ (причём b_1 определено в (29₂)), то на рис. 5 имеем $\bar{s}_4(b) > \sigma_2^{(1)}(b)$, то есть соотношение (28*) с $p_2 \geq 1$. Учитывая написанное над таблицей 12, вытекает, что

$$(32_1) \quad \begin{cases} \text{при } \bar{\sigma}_{2p} < s < \bar{\sigma}_{2p} & (p = 1, 2, \dots, p_2), \\ \text{так как } S(s) > 0 \text{ из (3}_2\text{) вытекает } a_1 > b. \end{cases}$$

Значит, с помощью (3) и (28₀) имеется таблица 4.

$$(33) \quad \begin{cases} \text{Для } 0 < s \leq \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_{2p} \leq s \leq \bar{\sigma}_{2p+2} \quad (p = 1, 2, \dots, p_2 - 1) \text{ если } p_2 \geq 2 \text{ или } s \geq \bar{\sigma}_{2p_2}, \\ \text{так как в (17}_0\text{) } \max S(s) \leq 0, \text{ то } S(s) \leq 0 \text{ для всякого } s > 0. \end{cases}$$

Если $b_1 \leq b < b_0$, так как на рис. 5 $\bar{s}_4(b) \leq \sigma_2^{(1)}(b)$, имеем в таблице 11 $f_{10}(\sigma_{2p}^{(1)}) \leq 0$ ($p = 1, 2, \dots$), стало быть из (18) и (17₀) $\max S(s) \leq 0$, то есть опять $S(s) \leq 0$ для всякого $s > 0$. Если $b_0 \leq b < 2 - \sqrt{3}$, из таблицы 10 вытекает $f_{11}(b) \leq 0$, стало быть в таблице 11, $f_{10}(s) \leq 0$, и из (17₀) и (18) $S(s) \leq 0$ для всякого $s > 0$. Если $b \geq 2 - \sqrt{3}$, то из (18₂), (17₁) и (18) вытекает, что $S(s) < 0$ для всякого $s > 0$. Следовательно

$$(33_1) \quad \text{при } b \geq b_1, \text{ имеем } S(s) \leq 0 \text{ для всякого } s > 0.$$

Такое же соотношение имеется и для $0 < b < b_1$, для значений (33) s . В таком случае $(S(s) \leq 0)$ из (28₁) и (3₂) вытекает $a_1 \leq b$. С помощью (28₀) и (3) имеем таким образом, таблицу 5 для изменения $f_2(a)$. Стало быть:

$$(33_2) \quad \begin{cases} \text{для } b \geq b_1 \text{ и всякого } s > 0, \text{ или для } 0 < b < b_1 \text{ и значений (33) } s, \\ \text{имеем таблицу 5 для изменения } f_2(a): \end{cases}$$

Но из (51) вытекает

$$(34) \quad \begin{cases} f_{16}(s) = e^{-2bs} f_1'(s) = -2b + e^{-bs} [(-1 + b^2) \sin s + 2b \cos s + \\ + (1 + b^2) s (\cos s + b \sin s)], \\ \text{так что} \\ f_6(s) = -(1 + b^2)^2 s e^{-bs} \sin s, \quad f_{16}[(2p+1)\pi] = -2b - \\ - [2b + (2p+1)(1 + b^2)\pi] e^{-(2p+1)b\pi} < 0, \\ f_{16}(2p\pi) = f_{17}(p) = -2b + e^{-2bp\pi} [2b + 2(1 + b^2)p\pi] \quad (p=0, 1, \dots). \end{cases}$$

Стало быть

$$f_{17}'(p) = 2\pi [1 - b^2 - 2p\pi b(1 + b^2)] e^{-2pb\pi} < 0 \text{ для } p > p_0 = f_{18}(b) = \frac{1 - b^2}{2\pi b(1 + b^2)}$$

Так как $f_{17}(0) = 0$, то если $f_{18}(b) \leq 0$ (значит $b \geq 1$), $f_{17}(p) < 0$ а это, вместе с (34) даёт $f_{16}(s) < 0$, значит $f_1'(s) < 0$ для $s > 0$. Так как $f_1(0) = 0$, из таблицы 5 вытекает, что

$$(34_0) \quad \text{для } b \geq 1 \text{ имеем } f(s) < 0 \text{ для } s > 0.$$

Таким образом, предложение 2 (стр. 172) здесь частично доказано

Таблица 13.

s	0	π	2π	...	$2p\pi$	$(2p+1)\pi$	$(2p+2)\pi$	...					
$f'_{16}(s)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	...		
$f_{16}(s)$	0	$\geq f_{16}(\pi)$	$\nearrow f_{16}(2\pi)$	...	$f_{16}(2p\pi)$	$\searrow f_{16}((2p+1)\pi)$	$\nearrow f_{16}((2p+2)\pi)$	< 0	...				
$f_1(s)$	0	$\geq f_1(\pi)$	< 0	$f_1(2\pi)$	< 0	...	$f_1(2p\pi)$	< 0	$f_1((2p+1)\pi)$	< 0	$f_1((2p+2)\pi)$	< 0	...

Из (34) вытекает таблица 13 (сохраняющая силу и при $b < 0$ и при $b > 0$), в которой использовались соотношения

$$(34_1) \quad f_1(2p\pi) = -(1 - e^{-2bp\pi})^2 < 0, \quad f_1((2p+1)\pi) = -[1 + e^{-(2p+1)b\pi}]^2 < 0,$$

из которых вытекает: с одной стороны, что

$$(34_2) \quad \text{для } 0 < s \leq 2\pi, \quad f_1(s) < 0$$

и для $b < 0$ и для $b > 0$; это вместе с таблицей 5 и с (33) опять даёт для всякого $b > 0$, предложение 2° стр. 172 — а с другой стороны что

$$(35) \quad \text{для } (2p+1)\pi \leq s \leq (2p+2)\pi \quad f(s) < 0 \quad (p=0, 1, \dots).$$

Предложение (35) имеет место для всякого $b > 0$, потому что из (33) вытекает $S(s) \leq 0$ для $(2p+1)\pi \leq s \leq (2p+2)\pi$ и дано тоже в работе [2]. Если $b < 1$, то из (34) вытекает таблица 14.

Таблица 14.

p	0	$p_0 = f_{18}(b)$	$p_1 = f_{19}(b)$	∞
$f_{17}'(p)$	+	0	-	
$f_{17}(p)$	0	$\nearrow f_{17}(p_0)$	$\searrow 0$	$\searrow -\infty$

Если обозначить

$$(35_1) \quad f_{20}(b) = \begin{cases} f_{19}(b) & \text{если } f_{19}(b) \text{ — целое число} \\ 1 + [f_{19}(b)] & \text{если } f_{19}(b) \text{ — не целое число} \end{cases}$$

(причём под $[x]$ понимается целая часть x), то из таблицы 14 вытекает, что при $p \geq f_{20}(b)$, $f_{17}(p) \leq 0$, а при $p \leq f_{20}(b) - 1 < f_{19}(b)$, $f_{17}(p) > 0$. Следовательно, крайние значения функции $f_{16}(s)$ из (34), достигнутые для $s \geq 2\pi f_{20}(b)$, суть ≤ 0 , так что $f_{16}(s)$ сама ≤ 0 для $s \geq 2\pi f_{20}(b)$ так как $f_{16}(2\pi f_{20}(b)) = f_{17}(f_{20}(b)) \leq 0$. Стало быть:

$$(35_2) \quad \text{для } s \geq 2\pi f_{20}(b), \quad f_1'(s) \leq 0$$

Так как из (34) вытекает $\frac{1}{2\pi b} \frac{d}{dp} f_{17}(p) = -1 + e^{-2pb\pi} [1 - 2(1 + b^2)p^2\pi^2] < 0$ если взять два любых значения $0 < b' < b'' < 1$, то $f_{17}(p, b') > f_{17}(p, b'')$ (где обозначено $f_{17}(p) = f_{17}(p, b)$), так что $f_{17}(f_{19}(b'), b') = 0 > f_{17}(f_{19}(b''), b'')$, а это вместе с таблицей 14, построенной для $b = b''$ даёт $f_{19}(b') > f_{19}(b'')$, иными словами

$$(36) \quad f_{19}(b) \text{ — убывающая функция.}$$

Но для $p=1$ и $b=2-\sqrt{3}$ имеем в (34) $f_{17}(p) > 0$, так как данное неравенство напишется $1 + 4\pi > e^{2(2-\sqrt{3})\pi}$, а в таком виде оно очевидно, поскольку $2(2-\sqrt{3})\pi < 2$. Значит в таблице 14 имеем $f_{19}(2-\sqrt{3}) > 1$ и так как $b_1 < 2-\sqrt{3}$, то из (36) вытекает $f_{19}(b) > 1$. Для $b=1$ имеем в (34) $\frac{1}{2} f_{17}(p) = -1 + e^{-2p\pi} (1 + 2p\pi) = 0$ для $p=0$ и < 0 для $p > 0$, стало быть $f_{19}(1) = 0$. Значение b_2 из таблицы 15 при котором $f_{19}(b) = 1$ — корень уравнения $f_{17}(1) = 0$, то есть уравнения

$$(37) \quad f_{21}(b) = \left(1 + \pi \frac{1+b^2}{b}\right) e^{-2\pi b} - 1 = 0.$$

Так как

$$f_{21}'(b) = -\frac{\pi}{b^2} (1 + b^2)(1 + 2\pi b) e^{-2\pi b} < 0, \quad f_{21}(0) = \infty,$$

$$(37_1) \quad f_{21}(1) = (1 + 2\pi) e^{-2\pi} - 1 < 0,$$

то $f_{21}(b)$ имеет единственный положительный корень.

Таблица 15.

b	b_1	$2 - \sqrt{3}$	b_2	1
$f_{19}(b)$	$f_{19}(b_1)$	$\succ$	1	$\succ$ 0

Для $1 > b \geq b_2$, на таблице 15 видно, что в (35₁) $f_{20}(b) \leq 1$, стало быть из (35₂) вытекает $f'_1(s) \leq 0$ для $s \geq 2\pi$. Отсюда и из (34₁) вытекает, что $f_1(s) < 0$ для $s \geq 2\pi$, значит в таблице 5 $f_2(a) < 0$, стало быть $f(s) < 0$ а это вместе с 2^о стр. 172 даёт $f(s) < 0$ для $s > 0$.

Следовательно, отсюда и из (34₀) вытекает, что

$$(38) \quad \begin{cases} \text{если } b \geq b_2 \text{ (корень уравнения (37))}, \text{ то } f(s) < 0 \\ \text{для всякого } s > 0 \text{ и при всяком } a > b. \end{cases}$$

что и доказывает теорему.

7. ТЕОРЕМА 4. Если $b_1 \leq b < b_2$, то $f(s) < 0$ при всяком $s \geq \sigma = \sigma(b)$. Здесь b_2 — значение определённое в теореме 3, b_1 — значение b для которого наибольший корень уравнения

$$e^{bs} = \frac{1 + 2bs + \frac{1+b^2}{2}s^2}{\sqrt{1 + 2bs + (1+b^2)s^2}}$$

равен заключённому между 2π и 3π корню уравнения $s = (1+bs) \operatorname{tg} s$, а $\sigma(b)$ — функция от b определённая таким образом; пусть $\varphi(b)$ — положительный корень уравнения в p : $e^{2bp\pi} = 1 + \frac{1+b^2}{b} p\pi$. Тогда σ — наименьшее значение s , не меньшее $2\pi\varphi(b)$, соответственно $2\pi(1 + [\varphi(b)])$, смотря по тому, является $\varphi(b)$ целым числом или нет, для которого

$$-1 + e^{bs} [2 \cos s + (1+b^2)s \sin s] - e^{2bs} \leq 0.$$

$$\text{Для } b_1 \text{ имеется ограничение } 0 < b_1 < \sqrt{\frac{x_0(1-x_0)}{(1+x_0)(2+x_0)}} < 2 - \sqrt{3},$$

где x_0 — положительный корень уравнения $e^{2x} = \frac{1+2x}{1-x^2}$.

Доказательство. Если $b_1 \leq b < b_2$, имеем в (35₁) $f_{20}(b) \geq 2$, значит,

$$(39) \quad \begin{cases} \text{так как } f_1(\infty) = -\infty, \text{ из (35}_2\text{) вытекает, что если обозначить через} \\ \sigma = \sigma(b) \text{ наименьшее значение } s \geq 2\pi f_{20}(b) \text{ для которого } f_1(s) \leq 0, \\ \text{то при всяком } s \geq \sigma, f_1(s) \leq 0. \end{cases}$$

В таком случае, из таблицы 5 вытекает, что

$$(40) \quad \begin{cases} \text{если } b_1 \leq b < b_2, \text{ то } f(s) < 0 \text{ при всяком } s \geq \sigma \text{ (причём, } \sigma \\ \text{определено в (39)) и всяком } a > b. \\ \text{Здесь } b_1 \text{ определено в (29}_2\text{) и на рис. 5, из (22) и таблицы} \\ 10 \text{ вытекает } b_1 < b_0 < 2 - \sqrt{3}, \text{ что и показывает теорему.} \end{cases}$$

Впрочем (1) даёт $f(\infty) = -\infty$ (для $b > 0$), но теорема даёт верхнюю границу ($= \sigma$) корней функции $f(s)$.

8. ТЕОРЕМА 5. Если b достаточно мало, то $f(s)$ может иметь сколь угодно большие положительные корни.

Доказательство. Если даны произвольное целое положительное число $p = p_2$ и тоже произвольное $s = \bar{s}$ ($2p\pi < \bar{s} < (2p+1)\pi$), то из (5₁) вытекает, что для $s = 2p\pi + \frac{\pi}{2}$

$$(41) \quad f_{22}(b) = f_1\left(2p\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1 + (1+b)\left(2p\pi + \frac{\pi}{2}\right)e^{\left(2p\pi + \frac{\pi}{2}\right)b} - e^{2b\left(2p\pi + \frac{\pi}{2}\right)},$$

так что $f_{22}(0) > 0$ ($p \geq 1$), $f_{22}(\infty) = -\infty$.

Если $f_{23}(p)$ — наименьший положительный корень $f_{22}(b)$, то если взять $b = \bar{b} < f_{23}(p_2)$, имеем $f_1\left(2p_2\pi + \frac{\pi}{2}\right) > 0$ (впрочем, выражение (41) $f_{22}(b)$ даёт $\lim_{p \rightarrow \infty} f_{23}(p) = 0$). В таком случае таблицы 4 или 5 (смотря по тому, имеется ли в (3) для $b = \bar{b}$, $S(\bar{s}) > 0$ или $S(\bar{s}) \leq 0$), показывают, что $f_2(a)$ имеет корень $a = a_4 = a_4(\bar{b})$, так что $f(\bar{s}) = 0$ для $a = a_4(\bar{b})$, $b = \bar{b}$. Таким образом, можно выбирать бесконечное число пар значений для a и b , при которых $f(s)$ имела бы сколь угодно большой корень $s = \bar{s}$, чем и доказывается теорема.

9. ТЕОРЕМА 6. Если $f(s)$ имеет корней в интервале $(2p\pi, (2p+1)\pi)$, то их число обязательно два.

Доказательство. На таблице 16 ([2], где $\bar{f}_1(s) = e^{-(a+b)s} f'(s)$) видно, что для того, чтобы $f(s)$ имела бы корни в $(2p\pi, (2p+1)\pi)$ необходимо, чтобы $\bar{f}_1(2p\pi) > 0$, а в таком случае ясно, что в $(2p\pi, (2p+1)\pi)$ у $f(s)$ — корни $\tau_{2p}^{(1)}$ и $\tau_{2p}^{(2)}$ ($\tau_{2p}^{(1)} \leq \tau_{2p}^{(2)}$), чем теорема доказана.

Таблица 16.

s	$2p\pi$	$\tau_{2p}^{(1)}$	s_{2p}	$\tau_{2p}^{(2)}$	$(2p+1)\pi$
$\bar{f}_1(s)$	0	—	—	—	0
$\bar{f}_1(s)$	$\bar{f}_1(2p\pi) > 0$	$\succ$	0	$\succ$	$\bar{f}_1((2p+1)\pi) < 0$
$f(s)$	$f(2p\pi) < 0$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$f(s_{2p})$	$\succ$ 0 $\succ$	$f((2p+1)\pi) < 0$

10. Легко указать числа $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ между которыми лежит число b_2 из теоремы 3. В самом деле, (37) даёт $f_{21}\left(\frac{1}{2}\right) = f_{24}(\pi)$ где $f_{24}(x) = -1 + \left(1 + \frac{5}{2}x\right)e^{-x}$, значит $f_{24}(x) = \frac{1}{2}(3 - 5x)e^{-x}$ но $f_{24}(3) = e^{-3}\left(\frac{17}{2} - e^3\right) < 0$, так что в таблице 17 имеем $x_1 < 3 < \pi$, стало быть $f_{24}(\pi) = f_{21}\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, а это с помощью (37₁) даёт $b_2 < \frac{1}{2}$. Далее $f_{21}\left(\frac{1}{3}\right) = f_{25}(\pi)$ где $f_{25}(x) = -1 + \left(1 + \frac{10}{3}x\right)e^{-\frac{2}{3}x}$, так что $f_{25}(x) = \frac{4}{9}(6 - 5x)e^{-\frac{2}{3}x}$. Но $f_{25}\left(\frac{16}{5}\right) = e^{-\frac{32}{15}}\left(\frac{35}{3} - e^{\frac{32}{15}}\right) > 0$, Значит в таблице 18 имеем $\pi < \frac{16}{5} < x_2$, так что $f_{21}\left(\frac{1}{3}\right) = f_{25}(\pi) > 0$, а это вместе с (37₁) даёт $b_2 > \frac{1}{3}$.

Стало быть $\frac{1}{3} < b_2 < \frac{1}{2}$.

Таблица 17.

x	0	$\frac{3}{5}$	x_1	∞
$f'_{24}(x)$	+	0	-	
$f_{24}(x)$	0	$\nearrow f_{21}\left(\frac{3}{5}\right) \searrow 0 \searrow -1$		

Таблица 18.

x	0	$\frac{6}{5}$	x_2	∞
$f'_{25}(x)$	+	0	-	
$f_{25}(x)$	0	$\nearrow f_{25}\left(\frac{6}{5}\right) \searrow 0 \searrow -1$		

11. В этом пункте будут собраны сведения, полученные в данной заметке относительно корней τ_n функции $f(s)$, притом, сведения дополняются частью сведений, полученных в [2].

I. Если $b < 0$: 1°. $f(s)$ имеет бесконечное число положительных корней $s = \tau_n (n\pi < \tau_n < (n+1)\pi)$, (1°, стр. 172), причём

2°. $\sigma_{2p} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(2)}$ ($p = 1, 2, \dots$), $\sigma_{2p+1} < \tau_{2p+1} < (2p+2)\pi$ ($p = 0, 1, \dots$), где $\sigma_p (p\pi < \sigma_p < (p+1)\pi)$ — корни уравнения $e^{bs} = \cos s + b \sin s$, а $\sigma_p^{(2)} (p\pi < \sigma_p^{(2)} < (p+1)\pi)$ — корни уравнения $e^{bs} = \cos s + b \sin s + \frac{1+b^2}{2}s \sin s$ (теорема 1).

3°. Если $1 \leq p < -\frac{1}{2} - \frac{1}{b\pi}$, то $\sigma_{2p} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(3)}$, где $\sigma_{2p}^{(3)} (2p\pi < \sigma_{2p}^{(3)} < (2p+1)\pi)$ — корни уравнения $b \operatorname{tg} \frac{s}{2} = \operatorname{th} \frac{bs}{2}$, причём $\sigma_{2p}^{(3)} < \sigma_{2p}^{(2)}$ (теорема 2).

4°. Если $p > -\frac{1}{b\pi}$, то или $\sigma_{2p} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(3)}$, или $\sigma_{2p}^{(4)} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(2)}$ ($p = 1, 2, \dots$), где $\sigma_{2p}^{(4)} (2p\pi < \sigma_{2p}^{(4)} < (2p+1)\pi)$ — корни уравнения $e^{bs} = \cos s - \frac{1}{b} \sin s$ (теорема 2).

II. Если $b = 0$, то у $f(s)$ — корни $s = 2n\pi$ и $s = \tau_{2n}$ ($2n\pi < \tau_{2n} < (2n+1)\pi$, $n = 1, 2, \dots$) (1°, стр. 172).

III. Если $b > 0$, 1°. $f(s) < 0$ для $0 < s \leq 2\pi$ (2°, стр. 172).

2°. Если $ab \geq 1$, $f(s) < 0$ для всякого $s > 0$, (2°, стр. 172).

3°. Если $ab < 1$, промежуток $(0, 2\pi]$, в котором $f(s) < 0$ нельзя продолжать направо (2°, стр. 172).

4°. Если $(2p+1)\pi \leq s \leq (2p+2)\pi$, то $f(s) < 0$ ($p = 0, 1, \dots$) (см. (35)).

5°. Если $b \geq b_2$, то $f(s) < 0$ при всяком $s > 0$. Здесь b_2 — корень (заключённый между $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$) уравнения $e^{2\pi b} = 1 + \frac{\pi}{b}(1+b^2)$ (теорема 3)¹⁾.

6°. Если $b_1 \leq b < b_2$, то $f(s) < 0$ при всяком $s \leq \sigma = \sigma(b)$. Здесь b_2 — значение определённое в теореме 3, b_1 — значение b , для которого

наибольший корень уравнения $e^{bs} = \frac{1+2bs + \frac{1+b^2}{2}s^2}{\sqrt{1+2bs + (1+b^2)s^2}}$ равен заключённому между 2π и 3π корню уравнения $s = (1+bs) \operatorname{tg} s$, а $\sigma(b)$ функция от определённая таким образом:

Пусть $\varphi(b)$ — положительный корень уравнения в p : $e^{2bp\pi} = 1 + \frac{1+b^2}{b} p\pi$.

Тогда σ — наименьшее значение s , не меньшее $2\pi\varphi(b)$, соответственно $2\pi(1 + [\varphi(b)])$ смотря по тому, является ли $\varphi(b)$ целым числом или нет, для которого $-1 + e^{bs}[2\cos s + (1+b^2)s \sin s] - e^{2bs} \leq 0$. Для b_1 имеется ограничение $0 < b_1 < \sqrt{\frac{x_0(1-x_0)}{(1+x_0)(2+x_0)}} < 2 - \sqrt{3}$, где x_0 — положительный корень

уравнения $e^{2x} = \frac{1+2x}{1-x^2}$ (теорема 4).

7°. Если b достаточно мало, то $f(s)$ может иметь сколь угодно большие положительные корни (теорема 5).

8°. Если $f(s)$ имеет корни в интервале $(2p\pi, (2p+1)\pi)$ то их число обязательно два (теорема 6).

12. Легко видеть, что наибольший корень уравнения (18), проявляющийся в определении функции σ из (39) — $\bar{s}_4(b)$ из таблицы 11, потому что из таблиц 10 и 11 вытекает что $\bar{s}_3(b)$ и $\bar{s}_4(b)$ существуют при

¹⁾ Эта теорема не противоречит пункту 3° нашего случая, поскольку в парах a, b при которых у $f(s)$ корни произвольно близкие к 2π , a и b должны быть достаточно малыми (см. [2]).

$0 < b < b_0$, а с помощью (24), (27₁) и (24₁) можно построить таблицу 19, на которой видно, что корень (функция от b), который для некоторого значения b — меньше другого (функция от b), остаётся меньше другого при всяком $0 < b < b_0$, так что каждый корень теоретически имеет выражение в b , остающееся неизменным при всех значениях $b \in (0, b_0)$.

Таблица 19.

b	0	b_0
$\overline{s}_3(b)$	$\overline{s}_3(0)$	$\overline{s}_2(b_0)$
$\overline{s}_4(b)$	∞	$\overline{s}_2(b_0)$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Aramă O. și Ripianu D., *Asupra problemei polilocale pentru ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți*. Studii și Cercetări de Matematică (Cluj), VIII, nr. 1—2, 37—74; nr. 3—4, 211—265 (1957).
- [2] Aramă O., Ripianu D., *Asupra problemei polilocale cu noduri confundate pentru ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți*. Studia Universitatum Victor Babeș et Bolyai, III, nr. 3, seria 1, fasc. 1, 95—117 (1959).

Поступило, 10.I.1960.

