

et que les différences divisées sur $n+2$ noeuds d'une fonction non-concave d'ordre n sont non-négatives, il en résulte que $R[x^{n+1}]R[B_m] \geq 0$, pour une fonction f non-concave d'ordre n . Compte tenant de (8), la propriété cherchée en résulte.

4. Pour donner une application soit $R[f]$ le reste dans la formule de quadrature numérique

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{5} f'(0) + \frac{1}{30} f''(0) + \frac{1}{360} f'''(0) + \frac{1}{3} f(1) - \frac{1}{30} f'(1) + R[f],$$

où f a une dérivée d'ordre 3 continue sur $[0, 1]$.

Dans ce cas $R[f]$ est du degré d'exactitude $n = 5$ et est borné par rapport à la norme (7) pour $j = 3$. Dans notre cas

$$\pi_{k,l} = \frac{1}{5!} \int_0^1 (t-x)^5 t^k (1-t)^l dt.$$

Nous déduisons

$$R[x^6] = \frac{1}{105} > 0, \quad \int_0^1 \pi_{k,l} dx = \frac{1}{6!} \int_0^1 t^{6+k} (1-t)^l dt$$

et un calcul simple nous donne

$$R[\pi_{k,l}] = \frac{1}{6!} \int_0^1 t^{k+2} (1-t)^{l+4} dt > 0.$$

La délimitation (4) est donc bien applicable dans ce cas et nous avons

$$|R[f]| \leq \frac{1}{105} \sup_{x_i \in [0,1]} |x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7; f|.$$

Si la dérivée d'ordre 6, $f^{(6)}$, existe sur $[0, 1]$, nous avons

$$|R[f]| \leq \frac{1}{150} \cdot \frac{1}{6!} \sup_{x \in [0,1]} |f^{(6)}(x)|.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bernstein S. N., Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. Сообщ. Харьк. Матем. Об-ва, серия 2, 13, 1-2 (1912).
- [2] Popoviciu T., Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur. Mathematica, 10, 49-54 (1934).
- [3] — Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse. Mathematica 1(24), 95-142 (1960).
- [4] Wigert S., Sur l'approximation par polynômes des fonctions continues. Arkiv för Mat., Astr., och Fysik, 22 B, No. 9, 1-4 (1932).

Reçu le 28. II. 1960.

REMARQUES SUR LA PREMIERE ET SUR LA SECONDE FORMULE DE LA MOYENNE DU CALCUL INTEGRAL

par

TIBERIU POPOVICIU

à Cluj

1. Considérons deux fonctions réelles $f(x)$, $g(x)$, définies et R-intégrables sur l'intervalle fini et fermé $[a, b]$ ($a < b$). Si nous désignons par $\bar{f}$ une moyenne des valeurs de $f(x)$, donc un nombre tel que

$$\inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq \bar{f} \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x),$$

nous avons la première formule de la moyenne

$$(1) \quad \int_a^b f(x) g(x) dx = \bar{f} \int_a^b g(x) dx,$$

qui est valable si $g(x)$ ne change pas de signe (est constamment ≥ 0 ou constamment ≤ 0 sur $[a, b]$) et $f(x)$ est quelconque.

On peut démontrer que, sous l'hypothèse de sa continuité, l'invariance du signe de $g(x)$ est aussi nécessaire pour la valabilité de la formule (1), pour $f(x)$ quelconque.

En effet, supposons que $g(x)$ soit continue et qu'il change de signe sur $[a, b]$. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que

$$(2) \quad \int_a^b g(x) dx \geq 0,$$

(car dans le cas contraire il suffit de prendre $-g(x)$ au lieu de $g(x)$) et il existe alors un point $x_0 \in (a, b)$ tel que $g(x_0) < 0$. Par suite de la continuité

de $g(x)$, si $\varepsilon > 0$ est assez petit on a $a < x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon < b$ et $g(x)$ est négatif sur l'intervalle $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Nous allons construire maintenant une fonction $f^*(x)$ qui soit :

1°. Continue, positive et au plus égale à 1 sur $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

2°. Nulle sur $[a, x_0 - \varepsilon]$ et sur $[x_0 + \varepsilon, b]$.

La fonction $f^*(x)$ est R-intégrable sur $[a, b]$ et nous avons $0 \leq \bar{f}^* \leq 1$.

On peut, par ex., prendre

$$(3) \quad f^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{pour } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \\ 0, & \text{pour } x \in [a, b] - (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon). \end{cases}$$

Si nous cherchons à appliquer la formule (1), en prenant pour $f(x)$ la fonction $f^*(x)$, nous avons, compte tenant de (2),

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f^*(x) g(x) dx < 0, \quad \bar{f} \int_a^b g(x) dx \geq 0,$$

ce qui nous montre que l'égalité (1) est impossible.

Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante :

I. Pour que la première formule de la moyenne (1) soit vraie pour toute fonction continue $g(x)$ et pour toute fonction R-intégrable $f(x)$, il faut et il suffit que $g(x)$ ne change pas de signe sur $[a, b]$.

2. A la formule intégrale (1) correspond la formule de la moyenne „en termes finis”

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n a_i b_i = \bar{a} \sum_{i=1}^n b_i,$$

où les suites (a_i) , (b_i) sont réelles et

$$\min(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \bar{a} \leq \max(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Nous désignons par (c_i) la suite à n termes $c_1, c_2, \dots, c_n$, ($n > 1$).

La formule de la moyenne (4) est vraie pour toute suite (a_i) si les termes de la suite (b_i) sont du même signe (tous ≥ 0 ou bien tous ≤ 0).

Il est encore facile de voir que l'invariance du signe des b_i est nécessaire pour que la formule de la moyenne (4) soit vraie pour toute suite (a_i) . En effet, supposons que les b_i ne soient pas tous du même signe. On peut

supposer, sans restreindre la généralité, que $\sum_{i=1}^n b_i \geq 0$ (car dans le cas contraire on raisonne de la même manière sur la suite $(-b_i)$). Il existe alors un indice k tel que $b_k < 0$. Si nous prenons alors $a_k = 1$, $a_i = 0$, pour $i \neq k$, nous avons $0 \leq \bar{a} \leq 1$ et $\sum_{i=1}^n a_i b_i = b_k < 0$, $\bar{a} \sum_{i=1}^n b_i \geq 0$ et l'égalité (4) est impossible.

Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante :

I'. Pour que la formule de la moyenne (4) soit vraie pour toute suite (a_i) , il faut et il suffit que les termes de la suite (b_i) soient du même signe.

La propriété I peut d'ailleurs être déduit de la propriété I' par un passage à la limite, en tenant compte de la définition de l'intégrale R. Sans insister plus en détail, disons que les propriétés II, III, IV qui vont suivre résultent de la même manière respectivement des propriétés II', III', IV'.

3. C. BONFERRONI a démontré [1] que la première formule de la moyenne (1) est vraie pour toute fonction monotone $f(x)$ si $g(x)$ est R-intégrable et si son intégrale $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ reste comprise entre 0 et $G(b)$ pour $x \in [a, b]$. La dernière propriété signifie que nous avons $0 \leq G(x) \leq G(b)$ pour $x \in [a, b]$ resp. $G(b) \leq G(x) \leq 0$ pour $x \in [a, b]$ suivant que $0 \leq G(b)$ resp. $G(b) \leq 0$.

On peut encore démontrer que la condition imposée à $g(x)$ est nécessaire. Pour cela prenons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pour } x \in [a, \lambda], \\ 0, & \text{pour } x \in (\lambda, b], \end{cases}$$

où $a \leq \lambda \leq b$ (nous avons $f(x) = 1$ sur $[a, b]$ lorsque $\lambda = b$). Cette fonction est monotone (donc à fortiori R-intégrable) et nous avons $0 \leq \bar{f} \leq 1$. La formule (1) nous donne alors $G(\lambda) = \bar{f} G(b)$ pour $\lambda \in [a, b]$, ce qui démontre la propriété.

Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante :

II. Pour que la première formule de la moyenne (1) soit vraie pour toute fonction monotone $f(x)$, il faut et il suffit que l'intégrale $G(x) = \int_a^x g(t) dt$, de la fonction R-intégrable $g(x)$, reste comprise entre 0 et $G(b)$ pour $x \in [a, b]$.

4. C. Bonferroni obtient la suffisance de la condition de la propriété II par un passage à la limite de la propriété correspondante relative à la formule (4).

Si nous considérons les sommes partielles $s_i = b_1 + b_2 + \dots + b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ de la suite (b_i) , la formule de la moyenne (4) est vérifiée pour toute suite monotone (a_i) si les termes de la suite (s_i) restent compris (au sens large) entre 0 et s_n .

La démonstration de C. Bonferroni est la suivante. Remarquons que si les s_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sont compris entre 0 et s_n , $s_n - s_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ sont aussi compris entre 0 et s_n . La monotonie de la suite (a_i) nous montre,

d'une part, que $\bar{a}$ est compris entre a_1 et a_n et, d'autre part, qu'en utilisant la formule de transformation d'Abel, nous avons

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i - a_n s_n \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i - a_1 s_n \right) = \\ = \left[\sum_{i=1}^{n-1} s_i (a_i - a_{i+1}) \right] \left[\sum_{i=1}^{n-1} (s_n - s_i) (a_{i+1} - a_i) \right] \leq 0.$$

La formule de la moyenne (4) en résulte immédiatement.

La nécessité de la condition résulte en prenant la suite monotone (a_i) , où $a_1 = a_2 = \dots = a_i = 1$, $a_{i+1} = a_{i+2} = \dots = a_n = 0$.

Nous pouvons énoncer la propriété suivante :

II'. Pour que la formule de la moyenne (4) soit vraie pour toute suite monotone (a_i) il faut et il suffit que les termes de la suite (s_i) des suites partielles de la suite (b_i) restent compris entre 0 et s_n .

5. Considérons maintenant la seconde formule de la moyenne

$$(5) \quad \int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x) dx,$$

où

$$a \leq \xi \leq b.$$

Cette formule est valable pour toute fonction $f(x)$ R-intégrable si la fonction $g(x)$ est monotone sur $[a, b]$.

Supposons que $g(x)$ ait une dérivée continue $g'(x)$ sur $[a, b]$. Nous pouvons alors démontrer que la monotonie de $g(x)$ est nécessaire pour que la formule (5) ait lieu pour $f(x)$ quelconque. En effet, si $g'(x)$ est une fonction continue et si nous posons $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, nous avons

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = F(b) g(b) - \int_a^b F(x) g'(x) dx$$

et la formule (5) devient

$$\int_a^b F(x) g'(x) dx = F(\xi) \int_a^b g'(x) dx,$$

donc revient à la première formule de la moyenne ($F(\xi) = \bar{F}$).

Dans notre cas la monotonie de $g(x)$ sur $[a, b]$ est équivalente au fait que la dérivée $g'(x)$ ne change pas de signe sur $[a, b]$. La nécessité de la condition que nous avons en vue résulte comme au nr. 1. Il faut seulement prendre la fonction $g'(x)$ au lieu de $g(x)$ et pour $F(x)$ une fonction $f^*(x)$

convenable. Puisque par construction $F(x)$ est une intégrale, pour satisfaire aux conditions 1°, 2° du nr. 1, il suffit, par ex., de prendre pour $F(x)$ la fonction

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{2}{\varepsilon^3} (x - x_0 + \varepsilon)^2 \left(x_0 - x + \frac{\varepsilon}{2} \right), & \text{pour } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0], \\ \frac{2}{\varepsilon^3} (x - x_0 - \varepsilon)^2 \left(x - x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right), & \text{pour } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon), \\ 0, & \text{pour } x \in [a, b] - (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon). \end{cases}$$

Ceci revient, d'ailleurs, à prendre pour $f(x)$ la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{\varepsilon^3} (x_0 - x) (x - x_0 + \varepsilon), & \text{pour } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0], \\ \frac{6}{\varepsilon^3} (x - x_0) (x - x_0 - \varepsilon), & \text{pour } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon), \\ 0, & \text{pour } x \in [a, b] - (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon). \end{cases}$$

Nous pouvons énoncer la propriété suivante :

III. Pour que la formule de la moyenne (5) soit vraie pour toute fonction $g(x)$ ayant une dérivée continue sur $[a, b]$ et pour toute fonction $f(x)$ R-intégrable sur $[a, b]$, il faut et il suffit que $g(x)$ soit monotone sur $[a, b]$.

6. A la formule (5) correspond également une formule de la moyenne „en termes finis”

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n a_i b_i = \bar{r} b_1 + \left(\sum_{i=1}^n a_i - \bar{r} \right) b_n,$$

où $\bar{r}$ est une valeur moyenne des $n-1$ premiers termes de la suite (r_i) des suites partielles $r_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ de la suite (a_i) , donc

$$\min_{i=1, 2, \dots, n-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_i) \leq \bar{r} \leq \max_{i=1, 2, \dots, n-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_i)$$

La formule de la moyenne (6) est vraie pour toute suite (a_i) si la suite (b_i) est monotone. La démonstration est simple, puisque si nous remarquons que

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i - b_n \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{n-1} r_i (b_i - b_{i+1})$$

on revient à la première formule de la moyenne.

La nécessité de la monotonie de la suite (b_i) , pour que (6) reste vrai pour toute suite (a_i) , résulte immédiatement en prenant $a_i = 1$, $a_{i+1} = -1$ et $a_k = 0$, pour $k \neq i, i+1$, successivement pour $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante:
 III'. Pour que la formule de la moyenne (6) soit vraie pour toute suite (a_i) , il faut et il suffit que la suite (b_i) soit monotone.

7. C. Bonferroni dans son travail cité [1] a également démontré que la formule de la moyenne (5) est valable pour toute fonction $f(x)$ dont

l'intégrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est monotone si $g(x)$ reste compris (au sens large)

entre $g(a)$ et $g(b)$ pour $x \in [a, b]$.

En supposant $g(x)$ continue, la condition énoncée est aussi nécessaire. En effet, supposons que $g(x)$ soit continue et prenons pour $f(x)$ la fonction (3), où x_0 est un point de (a, b) et ε un nombre positif suffisamment petit. En supposant que la formule de la moyenne (5) soit vérifiée, nous avons l'une des égalités

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} g(x) dx = \begin{cases} g(b), & \text{pour } \xi \leq x_0 - \varepsilon, \\ \frac{(\xi - x_0 + \varepsilon)g(a) + (x_0 + \varepsilon - \xi)g(b)}{2\varepsilon}, & \text{pour } \xi \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \\ g(a), & \text{pour } \xi \geq x_0 + \varepsilon, \end{cases}$$

On voit donc que pour ε positif et assez petit,

$$(7) \quad \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} g(x) dx$$

reste compris entre $g(a)$ et $g(b)$. Mais si $\varepsilon \rightarrow 0$, la moyenne intégrale (7) tend vers $g(x_0)$, qui reste donc aussi compris entre $g(a)$ et $g(b)$.

Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante :

IV. Pour que la formule de la moyenne (5) soit vraie pour toute fonction $f(x)$, dont l'intégrale $\int_a^x f(t)dt$ est monotone, il faut et il suffit que la fonction $g(x)$, supposée continue, reste comprise entre $g(a)$ et $g(b)$ pour $x \in [a, b]$.

8. Ici encore C. Bonferroni obtient la suffisance de la condition de la propriété IV par un passage à la limite.

La formule de la moyenne (6) est vérifiée pour toute suite (a_i) dont les termes sont du même signe si les termes de la suite (b_i) restent compris entre b_1 et b_n . La démonstration est la suivante. Lorsque les a_i sont du même signe et les b_i sont compris entre b_1 et b_n , nous avons

$$\left[\sum_{i=1}^n a_i (b_i - b_n) + (b_n - b_1) \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right] \left[\sum_{i=1}^n a_i (b_i - b_n) + (b_n - b_1) a_1 \right] = \\ = \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i (b_i - b_1) \right] \left[\sum_{i=2}^n a_i (b_i - b_n) \right] \leq 0.$$

La formule de la moyenne en résulte immédiatement.

La nécessité de la condition résulte en prenant $a_i = 1$ et $a_k = 0$, pour $k \neq i$. Nous avons alors $0 \leq \bar{r} \leq 1$ et la formule (6) nous donne $b_i = \bar{r}b_1 + (1 - \bar{r})b_n$, qui montre bien que b_i est compris entre b_1 et b_n .

Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante :

IV'. Pour que la formule de la moyenne (6) soit vraie pour toute suite (a_i) dont les termes sont tous du même signe, il faut et il suffit que les b_i , $i = 1, 2, \dots, n$ restent compris entre b_1 et b_n .

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bonferroni C., Sulla validità dei teoremi della media nel Calcolo integrale. Boll. Un. Mat. Ital., XIII, 225-229 (1934).

Reçu le 8. II. 1960.