

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R. P. R.
FILIALA CLUJ

MATHEMATICA

VOLUMUL 2 (25)

FASCICOLA 2

1960

CLUJ

MATHEMATICA

Vol. 2 (25), fasc. 2

1960

SUMAR — СОДЕРЖАНИЕ — SOMMAIRE

L. Ascu Bal, Quelques types de nomogrammes tangentiels	201
Florin Constantinescu, Sur un théorème de W. A. Markov	211
M. Fertig, Über das Verhalten der Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen mit kleinem Parameter	217
S. Golab, Sur les comitants scalaires du premier ordre des champs de scalaires	253
A. Халанай, Условие Перрона в теории общих систем с последствием	257
Béla Jankó, Sur l'analogue de la méthode de Tchebycheff et de la méthode des hyperboles tangentes	269
I. Kolumbán, A theorem regarding the best approximation in abstract spaces	277
Ladislav Kosmák, A note on Bernstein polynomials of convex functions	281
I. Munteanu, Un critère pour décider si l'intégrale d'un système d'équations différentielles non linéaires est bornée	283
B. М. Остиану, Линейное кодирование для небинарных кодов с коррекцией ошибок	291
Tiberiu Popoviciu, Sur un théorème de W. A. Markov	299
Tiberiu Popoviciu, Remarques sur une formule de la moyenne des différences divisées généralisées	323
F. Radó, Eine Bedingung für die Regularität der Gewebe	325
D. D. Stancu, Sur l'approximation des dérivées des fonctions par les dérivées correspondantes de certains polynômes du type Bernstein	335
P. Теодореску, О цепях с полными связями	349
P. Turán, Remark on a theorem of Erhard Schmidt	373

SUR UN THÉORÈME DE W. A. MARKOV

par

TIBERIU POPOVICIU

à Cluj

W. A. MARKOV dans son travail [2] sur la généralisation de la célèbre inégalité de A. A. Markov a donné, comme lemme préliminaire, le théorème suivant :

Si les racines de deux polynômes de degré n , ayant toutes leurs racines réelles, se séparent, il en est de même pour les racines des dérivées de ces polynômes.

Dans la seconde partie de ce travail nous donnerons une démonstration de ce théorème. Notre démonstration diffère un peu de celle de W. A. MARKOV et aussi de celle de P. MONTEL [3] donnée, il y a près de 30 ans, dans cette même revue.

La démonstration que nous donnons est basée sur la continuité et la monotonie des racines de la dérivée d'un polynôme ayant toutes ses racines réelles, par rapport aux racines du polynôme. Dans la première partie de ce travail nous analyserons un peu cette propriété de monotonie.

Enfin, dans la troisième partie de ce travail, nous donnerons un nouveau théorème sur les polynômes ayant toutes leurs racines réelles, analogue à celui de W. A. Markov, cité plus haut.

Nous considérons seulement des polynômes d'une variable ayant leurs racines toutes réelles et par le degré d'un polynôme nous entendons toujours son degré effectif, même si ces propriétés ne sont pas spécifiées expressément. Les accents désignent des dérivées. Nous pouvons considérer comme égaux deux polynômes qui diffèrent seulement par une constante multiplicative non nulle.

I

1. Si un polynôme a toutes ses racines réelles, sa dérivée a également ses racines toutes réelles. Il existe une importante propriété, bien connue, de séparation des racines de la dérivée par celles du polynôme. Dans la suite nous utiliserons cette propriété.

Les racines d'un polynôme dont le plus haut coefficient est égal à 1 (donc de la forme $x^n + \text{polynôme de degré } < n$) sont des fonctions continues par rapport aux coefficients du polynôme et les coefficients sont des fonctions continues (des polynômes) par rapport aux racines du polynôme. Si nous tenons compte des relations qui existent entre les racines et les coefficients d'un polynôme, nous en déduisons la continuité des racines de la dérivée par rapport aux racines du polynôme.

2. La propriété de monotonie des racines de la dérivée par rapport aux racines du polynôme peut être énoncée de la manière suivante :

Les racines de la dérivée sont des fonctions non-décroissantes des racines du polynôme.

Cette propriété est bien connue et a été beaucoup utilisée, par exemple par Laguerre dans ses recherches sur les polynômes ayant toutes leurs racines réelles.

Pour mieux mettre en lumière la propriété de monotonie, nous introduisons la relation $P \xrightarrow{c} Q$ entre deux polynômes, qui a lieu si et seulement si :

1° Les polynômes P, Q sont du même degré $n \geq 1$.

2° Les racines respectives

$$(1) \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, \quad y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$$

de ces polynômes vérifient les inégalités

$$(2) \quad x_i \leq y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Cette relation est (reflexive et) transitive. Il est inutile de considérer le cas $n = 0$ lorsque la relation précédente n'a pas de sens. Si $n = 1$ il suffit de mentionner seulement l'inégalité (2) de définition et on voit que dans ce cas l'une au moins des relations $P \xrightarrow{c} Q, Q \xrightarrow{c} P$ est toujours vraie. Pour tout $n > 1$ on peut construire des polynômes P, Q tels qu'aucune des relations $P \xrightarrow{c} Q, Q \xrightarrow{c} P$ ne soit vraie.

La propriété de monotonie des racines de la dérivée par rapport à celles du polynôme, s'exprime alors par le

THÉORÈME 1. Si P, Q sont deux polynômes de degré $n > 1$, de $P \xrightarrow{c} Q$ il résulte que $P' \xrightarrow{c} Q'$.

Nous introduisons également la relation $P \xrightarrow{cc} Q$ entre deux polynômes, qui a lieu si et seulement si :

1° Les polynômes P, Q sont du même degré $n \geq 1$ et ont tous les deux leurs racines toutes simples.

2° Les racines respectives

$$(1') \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n, \quad y_1 < y_2 < \dots < y_n$$

de ces polynômes vérifient les inégalités

$$(2') \quad x_i < y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Cette relation, qui est aussi transitive, est un cas particulier de la relation précédente et s'obtient lorsque partout dans (1) et (2) le signe $\leq$ est remplacé par $<$.

Les deux relations considérées sont liées aussi par une sorte de transitivité mixte, analogue à la propriété correspondante des relations d'inégalité $<$ et $\leq$. Si $P \xrightarrow{cc} R, R \xrightarrow{c} Q$ et si Q a toutes ses racines simples, nous avons $P \xrightarrow{cc} Q$. De $P \xrightarrow{cc} R, R \xrightarrow{c} S, S \xrightarrow{cc} Q$ il résulte que $P \xrightarrow{cc} Q$.

Si les racines de P, Q sont des fonctions continues d'un paramètre λ sur un intervalle qui contient le point λ_0 et si la relation $P \xrightarrow{cc} Q$ est vérifiée pour $\lambda \neq \lambda_0$, nous avons $P \xrightarrow{c} Q$, mais non pas en général $P \xrightarrow{cc} Q$, pour $\lambda = \lambda_0$. Cette propriété est vraie aussi pour les couples de relations $\xrightarrow{s}, \xrightarrow{ss}, \xrightarrow{m}, \xrightarrow{mm}, \xrightarrow{mc}, \xrightarrow{mcc}$, que nous introduisons plus loin.

Nous avons le

THÉORÈME 2. Si P, Q sont deux polynômes de degré $n > 1$, de $P \xrightarrow{cc} Q$ il résulte que $P' \xrightarrow{cc} Q'$.

3. Nous allons d'abord démontrer que le théorème 1 résulte du théorème 2. En effet, soient $P \xrightarrow{c} Q$, (1) les racines des polynômes $P, Q, n > 1$ et

$$(3) \quad \xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_{n-1}, \quad \eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_{n-1}$$

les racines respectives des polynômes P', Q' . Considérons les polynômes $P_\varepsilon, Q_\varepsilon$ de degré n , ayant respectivement les racines $x_i + i\varepsilon, i = 1, 2, \dots, n, y_i + (i+1)\varepsilon, i = 1, 2, \dots, n$ où ε est un nombre positif. Les polynômes

$P_\varepsilon, Q_\varepsilon$ ont toutes leurs racines simples, nous avons $P_\varepsilon \xrightarrow{cc} Q_\varepsilon$ et si

$$\xi_1^{(\varepsilon)} < \xi_2^{(\varepsilon)} < \dots < \xi_{n-1}^{(\varepsilon)}, \quad \eta_1^{(\varepsilon)} < \eta_2^{(\varepsilon)} < \dots < \eta_{n-1}^{(\varepsilon)}$$

sont respectivement les racines des polynômes $P'_\varepsilon, Q'_\varepsilon$, nous avons

$$(4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \xi_i^{(\varepsilon)} = \xi_i, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_i^{(\varepsilon)} = \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Si nous supposons que le théorème 2 soit vrai, il résulte que $P'_\varepsilon \xrightarrow{cc} Q'_\varepsilon$ et de (4) on en déduit, en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$, $P' \xrightarrow{c} Q'$. On a donc démontré que le théorème 1 résulte du théorème 2.

4. Il reste à démontrer le théorème 2. Soient P, Q deux polynômes de degré $n > 1$ tels que $P \xrightarrow{cc} Q$ et soient (1') les racines respectives de ces polynômes. Soit P_i un polynôme de degré n ayant comme racines $x_1, x_2, \dots, x_{n-i}, y_{n-i+1}, y_{n-i+2}, \dots, y_n$, pour $i = 1, 2, \dots, n$. Le polynôme P_0 est égal à P et P_n est égal à Q . Les polynômes P_i ont toutes leurs racines simples, mais nous avons, en général, seulement $P_i \xrightarrow{c} P_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Si nous démontrons que

$$(5) \quad P'_i \xrightarrow{cc} P'_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

alors, par suite de la transitivité de la relation considérée, il résulte que $P' \xrightarrow{cc} Q'$ et le théorème 2 est démontré.

Il reste à démontrer les relations (5). Ces relations résultent du

L e m m e 1. Les racines de la dérivée d'un polynôme dont toutes les racines sont réelles et simples, sont des fonctions croissantes par rapport à chacune des racines du polynôme.

Soit g un polynôme de degré $n (\geq 1)$ ayant toutes ses racines $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ réelles et simples. La propriété du lemme 1 revient au fait que chacune des racines de la dérivée du polynôme $f_\alpha = (x - \alpha)g$ est une fonction croissante de α . Ces racines $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n$ sont des fonctions continues de α et restent distinctes. Nous pouvons démontrer d'abord qu'elles sont des fonctions strictement monotones de α . En effet, si, par exemple, β_k ne serait pas une fonction strictement monotone de α , nous pourrions trouver deux valeurs différentes α', α'' de α pour lesquelles les polynômes

$$(6) \quad f_{\alpha'} = (x - \alpha')g' + g, \quad f_{\alpha''} = (x - \alpha'')g' + g$$

aient une racine commune égale à β_k . Ceci est impossible car toute racine commune des polynômes (6) devrait être une racine commune des polynômes g, g' ce qui contredit l'hypothèse que g ait seulement des racines simples. La monotonie stricte des racines β_i , fonctions de α , est ainsi démontrée. Il reste seulement à préciser le sens de cette monotonie. Si nous remarquons que les racines de la dérivée sont séparées par celles du polynôme et si nous tenons compte de

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_i} \beta_i = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

nous trouvons bien que les β_i sont des fonctions croissantes de α .

Le lemme 1 est donc démontré.

On peut donner d'autres démonstrations au lemme 1. On peut, en particulier, donner des démonstrations basées sur des considérations analogues à celles utilisées dans la seconde et la troisième parties de ce travail. Nous n'insistons pas sur ces démonstrations.

Remarque. Si $\alpha'_1 < \alpha'_2 < \dots < \alpha'_{n-1}$ sont les racines du polynôme g' , les racines β_i , $i = 1, 2, \dots, n$, varient respectivement dans les intervalles $(-\infty, \alpha'_1], [\alpha'_{i-1}, \alpha'_i]$, $i = 2, 3, \dots, n-1$, $[\alpha'_{n-1}, \infty)$, si $n > 2$. Si $n = 1$, la racine β_1 varie de $-\infty$ à ∞ et si $n = 2$, les racines β_1, β_2 varient respectivement dans les intervalles $(-\infty, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}]$, $[\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \infty)$.

II

5. Nous allons nous occuper de la démonstration signalée du théorème de W. A. Markov.

Nous introduisons la relation $P \xrightarrow{s} Q$ entre deux polynômes, qui a lieu si et seulement si:

1° Les polynômes P, Q ont le même degré $n \geq 1$.

2° Les racines respectives (1) de ces polynômes vérifient les inégalités

$$(7) \quad x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq \dots \leq x_n \leq y_n.$$

Si $P \xrightarrow{s} Q$ ou $Q \xrightarrow{s} P$ nous pouvons dire que les racines des polynômes P, Q se séparent. En général, de $P \xrightarrow{s} Q$ il résulte que $P \xrightarrow{c} Q$ et, pour $n = 1$, les relations $P \xrightarrow{s} Q, P \xrightarrow{c} Q$ sont équivalentes. Compte tenant d'une remarque précédente, nous pouvons trouver, pour tout $n > 1$, deux polynômes P, Q de degré n tels qu'aucune des relations $P \xrightarrow{s} Q, Q \xrightarrow{s} P$ ne soit pas vérifiée.

Le théorème de W. A. Markov peut s'énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME 3. Si P, Q sont deux polynômes de degré $n > 1$, de $P \xrightarrow{s} Q$ il résulte que $P' \xrightarrow{s} Q'$.

Si $n = 2$ le théorème 3 résulte du théorème 1. En effet, dans ce cas, de $P \xrightarrow{s} Q$ il résulte que $P \xrightarrow{c} Q$ d'où, en vertu du théorème 1, il résulte que $P' \xrightarrow{c} Q'$. Mais cette relation est équivalente à $P' \xrightarrow{s} Q'$ et la propriété est démontrée.

Nous introduisons également la relation $P \xrightarrow{ss} Q$ entre deux polynômes, qui a lieu si et seulement si :

1° Les polynômes P, Q ont le même degré $n \geq 1$ et tous les deux ont leurs racines toutes simples.

2° Les racines respectives (1') de ces polynômes vérifient les inégalités

$$(7') \quad x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_n < y_n.$$

De $P \xrightarrow{ss} Q$ il résulte que $P \xrightarrow{cc} Q$ et pour $n = 1$ ces relations sont équivalentes.

Nous avons le cas particulier suivant du théorème de W. A. Markov :

THÉORÈME 4. Si P, Q sont deux polynômes de degré $n > 1$, de $P \xrightarrow{ss} Q$ il résulte que $P' \xrightarrow{ss} Q'$.

On démontre, comme plus haut, que pour $n = 2$ le théorème 4 résulte du théorème 2.

6. Il suffit de démontrer le théorème 4 car alors le théorème 3 en résulte. Pour le voir, nous procédons comme au nr. 3, où nous avons montré que le théorème 1 résulte du théorème 2.

Si nous avons $P \xrightarrow{s} Q$ et si nous prenons maintenant les polynômes $P_\varepsilon, Q_\varepsilon$ ayant respectivement comme racines $x_i + (2i-1)\varepsilon, i = 1, 2, \dots, n, y_i + 2i\varepsilon, i = 1, 2, \dots, n$, où ε est un nombre positif, nous avons $P_\varepsilon \xrightarrow{ss} Q_\varepsilon$.

Si nous supposons que le théorème 4 soit vrai, il en résulte que $P'_\varepsilon \xrightarrow{ss} Q'_\varepsilon$. Si nous faisons $\varepsilon \rightarrow 0$, les racines de $P'_\varepsilon, Q'_\varepsilon$ tendent vers les racines respectives de P', Q' et nous déduisons que $P' \xrightarrow{s} Q'$. Le théorème 3 est donc démontré.

7. Nous pouvons démontrer le théorème 4, en nous basant sur le théorème 2, sur le lemme 1 et sur la continuité des racines de la dérivée.

Si $P \xrightarrow{ss} Q$ il résulte que $P \xrightarrow{cc} Q$ donc aussi $P' \xrightarrow{cc} Q'$. Pour démontrer que nous avons de plus $P' \xrightarrow{ss} Q'$ il suffit de montrer que les dérivées des polynômes P, Q (qui ont toutes leurs racines simples) ne peuvent avoir des racines communes. En effet, il est facile de voir qu'alors la relation $P' \xrightarrow{ss} Q'$ se maintient pendant que les racines de P croissent vers les racines respectives de Q .

Mais, si (1') sont les racines des polynômes P, Q de degré n , la relation $P \xrightarrow{ss} Q$ est équivalente à l'égalité

$$(8) \quad Q = P \left(a + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x - x_i} \right),$$

où a est une constante différente de zéro et $a_1, a_2, \dots, a_n$, des constantes différentes de zéro et du même signe. D'ailleurs, le produit aa_i est de signe contraire avec le plus haut coefficient de P , donc avec P pour x très grand.

Par dérivation de (8) il résulte que

$$(9) \quad Q' = P' \left(a + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x - x_i} \right) - P \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(x - x_i)^2}.$$

On voit que si P', Q' aurait une racine commune, cette racine devrait annuler aussi le polynôme P , ce qui est impossible puisque, par hypothèse P n'a que de racines simples.

8. Les relations $P \xrightarrow{s} Q$ et $P \xrightarrow{ss} Q$ peuvent être étendues au cas où le polynôme P est de degré n et le polynôme Q de degré $n-1$. Si $n > 1$ et si

$$(10) \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{n-1}$$

sont respectivement les racines de P et de Q , la relation $P \xrightarrow{s} Q$ a lieu si et seulement si

$$(11) \quad x_i \leq y_i \leq x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1.$$

On peut encore dire que les racines des polynômes P, Q se séparent.

La relation $P \xrightarrow{ss} Q$ a lieu si et seulement si, de plus, les racines des polynômes P, Q sont toutes simples et si au lieu de (11) nous avons les inégalités

$$(11') \quad x_i < y_i < x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Nous avons alors la

Conséquence 1. Si P est un polynôme de degré n et Q un polynôme de degré $n-1$, $n > 1$, de $P \xrightarrow{s} Q$ il résulte que $P' \xrightarrow{s} Q'$.

La propriété résulte du théorème 3 par un passage à la limite. Pour le voir soient (10) les racines de P et Q qui vérifient la relation $P \xrightarrow{s} Q$. Considérons le polynôme $R = (x - y_n)Q$ de degré n . Si $x_n \leq y_n$ nous avons $P \xrightarrow{s} R$, d'où, compte tenant du théorème 3, $P' \xrightarrow{s} R'$. Si nous faisons $y_n \rightarrow \infty$, l'une des racines de R' (la plus grande) tend vers ∞ et les autres vers les racines respectives de Q' . Compte tenant de la continuité des racines de la dérivée par rapport aux racines du polynôme on voit que si nous faisons $y_n \rightarrow \infty$, de $P' \xrightarrow{s} R'$ il résulte que $P' \xrightarrow{s} Q'$.

Nous avons aussi la

Conséquence 2. Si P est un polynôme de degré n et Q un polynôme de degré $n-1$, $n > 1$, de $P \xrightarrow{ss} Q$ il résulte que $P' \xrightarrow{ss} Q'$.

Cette propriété résulte du théorème 4 de la même manière que la conséquence 1 du théorème 3. Nous construisons, comme plus haut, le polynôme R . Si $P \xrightarrow{ss} Q$ et si $x_n < y_n$, nous avons $P \xrightarrow{ss} R$, donc par suite du théorème 4, $P' \xrightarrow{ss} R'$. De là, si nous faisons $y_n \rightarrow \infty$ il résulte que $P' \xrightarrow{s} Q'$. Pour démontrer que nous avons même $P' \xrightarrow{ss} Q'$ il suffit de démontrer que si $P \xrightarrow{ss} Q$, les polynômes P' , Q' ne peuvent pas avoir des racines communes.

Si $P \xrightarrow{s} Q$ nous avons la formule (8), où $a = 0$ et a_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sont n constantes différentes de zéro et du même signe. La formule (9) nous montre que P' , Q' ne peuvent avoir des racines communes.

La conséquence 2 est démontrée.

9. Comme une application, considérons une suite de polynômes orthogonaux

$$\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-1}, \Pi_n, \dots$$

On sait que les racines de Π_n sont toutes réelles, simples et que les racines de Π_{n-1} sont séparées au sens strict par les racines de Π_n . Nous avons donc $\Pi_n \xrightarrow{ss} \Pi_{n-1}$ pour $n > 1$. De la conséquence 2 il résulte donc la

Conséquence 3. Si Π_{n-1} , Π_n sont deux termes consécutifs d'une suite de polynômes orthogonaux ($n > 1$), nous avons $\Pi'_n \xrightarrow{ss} \Pi'_{n-1}$.

III

10. Nous allons nous occuper d'un théorème analogue au théorème de W. A. Markov.

Nous introduisons la relation $P \xrightarrow{m} Q$ entre deux polynômes, qui a lieu si et seulement si :

1° Les polynômes P , Q sont du même degré $n \geq 1$.

2° Les racines (1) de ces polynômes vérifient les inégalités

$$(12) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_i \leq y_1 + y_2 + \dots + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

et l'égalité

$$(13) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

Si $n = 1$, nous avons seulement l'égalité (13). Si $n = 1$ la relation $P \xrightarrow{m} Q$ signifie que P , Q ont la même racine, donc, d'après le sens adopté au début de ce travail, qu'ils sont égaux. On voit facilement que pour tout $n > 1$ nous pouvons trouver deux polynômes P , Q de degré n tels qu'aucune des relations $P \xrightarrow{m} Q$, $Q \xrightarrow{m} P$ ne soit pas vérifiée.

D'après G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. PÓLYA [1], la relation $P \xrightarrow{m} Q$ est équivalente au fait que les racines de Q se déduisent de celles de P par une sorte de procédé de „médiation”. Ceci signifie qu'il existe une matrice $(a_{i,j})$ à n lignes et n colonnes, avec des éléments non-négatifs, la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne étant égale à 1,

$$\sum_{v=1}^n a_{i,v} = \sum_{v=1}^n a_{v,j} = 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

et telle que

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dans la suite nous n'utiliserons pas directement cette propriété.

La relation considérée est (réflexive et) transitive et nous avons le théorème suivant, analogue au théorème de W. A. Markov :

THÉORÈME 5. Si P , Q sont deux polynômes de degré $n > 1$, de $P \xrightarrow{m} Q$ il résulte que $P' \xrightarrow{m} Q'$.

Nous introduisons également la relation $P \xrightarrow{mm} Q$ entre deux polynômes, qui a lieu si et seulement si :

1° Les polynômes P, Q sont du même degré $n \geq 1$ et ont toutes leurs racines simples.

2° Les racines respectives (1') de ces polynômes vérifient les inégalités

$$(12') \quad x_1 + x_2 + \dots + x_i < y_1 + y_2 + \dots + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

et l'égalité (13).

Pour $n = 1$ nous gardons pour la définition seulement l'égalité (13) et alors la relation $P \xrightarrow{mm} Q$ est équivalente à $P \xrightarrow{m} Q$.

La relation $\xrightarrow{mm}$ est transitive. Nous avons aussi des propriétés de transitivité mixtes entre les deux relations considérées. Si $P \xrightarrow{mm} R, R \xrightarrow{m} Q$ et si Q a toutes ses racines simples, nous avons $P \xrightarrow{mm} Q$. De $P \xrightarrow{mm} R, R \xrightarrow{m} S, S \xrightarrow{mm} Q$ il résulte que $P \xrightarrow{mm} Q$.

Enfin, nous avons le :

THÉORÈME 6. Si P, Q sont deux polynômes de degré $n > 1$, de $P \xrightarrow{mm} Q$ il résulte que $P' \xrightarrow{mm} Q'$.

La démonstration des théorèmes 5 et 6 est immédiate pour $n = 2$ puisque la racine de la dérivée d'un polynôme de degré 2 est égale à la demi somme des racines du polynôme. Dans ce cas les théorèmes 5 et 6 résultent de l'égalité (13).

11. Il existent deux cas où la démonstration du théorème 5 ne présente pas de difficultés. Ces cas ont lieu si l'un des polynômes P, Q a toutes ses racines confondues.

Nous allons faire d'abord quelques remarques. Si

$$(14) \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$

sont les racines du polynôme P , nous avons

$$(15) \quad x_1 \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \leq \dots \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Si (1) sont les racines des polynômes P, Q et si $P \xrightarrow{m} Q$, nous avons $x_1 \leq y_1, y_n \leq x_n$, donc aussi

$$(16) \quad x_n - x_1 \geq y_n - y_1 \geq 0.$$

Si $n > 1$ et $P \xrightarrow{mm} Q$ nous avons les inégalités plus précises

$$(16') \quad x_n - x_1 > y_n - y_1 > 0.$$

Démontrons maintenant le théorème 5 dans les deux cas particuliers signalés.

Cas 1. Le polynôme P a toutes ses racines confondues. De $P \xrightarrow{m} Q$ et (16) il résulte alors que Q a également toutes ses racines confondues et notamment avec l'unique racine distincte de P . Dans ce cas P', Q' ont également toutes leurs racines confondues avec l'unique racine distincte de P et le théorème 5 en résulte.

Cas 2. Le polynôme Q a toutes ses racines confondues. Soient (3) les racines des polynômes P', Q' et tenons compte des inégalités (15) correspondantes à ces racines. Alors si $P \xrightarrow{m} Q$, nous avons

$$\xi_1 \leq \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \leq \dots \leq \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n-1}}{n-1} = \eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_{n-1},$$

d'où il résulte que $P' \xrightarrow{m} Q'$ et le théorème 5 est démontré.

12. Pour aller plus loin nous introduisons deux opérations sur les racines d'un polynôme. Nous appellerons ces opérations : la *dilatation* et la *contraction* de deux racines. Ces opérations ont déjà été utilisées par G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. PÓLYA dans leur livre cité.

Une dilatation de deux des racines $x' \leq x''$ d'un polynôme revient à la substitution de ces racines par $x' - \rho, x'' + \rho$ respectivement, où $\rho > 0$ et les autres racines du polynôme restent inchangées.

Une contraction de deux des racines $x' < x''$ d'un polynôme revient à la substitution de ces racines par $x' + \rho, x'' - \rho$ respectivement, où $\rho > 0$ et les autres racines du polynôme restent inchangées.

Le nombre ρ peut être appelé le *coefficient* de la dilatation respectivement de la contraction correspondant au couple des racines considérées.

Dans la suite, à moins que le contraire ne soit pas expressément spécifié, nous considérons seulement des dilatations et des contractions qui ne dérangent pas l'ordre des racines du polynôme. Ceci signifie que le coefficient est soumis à la restriction que, dans le cas de la dilatation les intervalles $[x' - \rho, x']$, $(x'', x'' + \rho]$ et dans le cas de la contraction les intervalles $(x', x' + \rho]$, $[x'' - \rho, x'')$ ne contiennent aucune racine du polynôme initial ou du polynôme transformé. Si (14) sont les racines du polynôme initial et si $n > 1$, avec la restriction précédente, l'opération

de la dilatation est applicable aux racines $x_r, x_s, r < s$ seulement dans les cas suivants :

$r = 1, s = n$, pour $0 < \rho$ quelconque,

$r = 1, s < n$, si $x_1 \leq x_s < x_{s+1}$, pour $0 < \rho < x_{s+1} - x_s$,

$r > 1, s = n$, si $x_{r-1} < x_r \leq x_n$, pour $0 < \rho < x_r - x_{r-1}$,

$r > 1, s < n$, si $x_{r-1} < x_r \leq x_s < x_{s+1}$, pour

$$0 < \rho < \min(x_r - x_{r-1}, x_{s+1} - x_s).$$

De même, l'opération de la contraction est applicable seulement dans les cas suivants :

$$s - r = 1, \text{ si } x_r < x_{r+1} \leq x_{s-1} < x_s, \text{ pour } 0 < \rho < \frac{x_{r+1} - x_r}{2},$$

$$s - r > 1, \text{ si } x_r < x_{r+1} \leq x_{s-1} < x_s, \text{ pour } 0 < \rho < \min(x_{r+1} - x_r, x_s - x_{s-1}).$$

Les opérations de dilatation et de contraction étant ainsi précisées, on voit qu'une telle opération est parfaitement caractérisée par le couple de racines considérées et le coefficient ρ correspondant. En particulier, si nous pouvons appliquer une opération de dilatation ou de contraction de coefficient ρ , nous pouvons aussi appliquer aux mêmes racines, toute dilatation resp. contraction de coefficient $< \rho$.

On en déduit que si nous appliquons aux racines $x_r, x_s, r < s$ du polynôme, une dilatation ou une contraction, les racines du polynôme deviennent des fonctions continues du coefficient ρ . Il en est de même pour les sommes $x_1 + x_2 + \dots + x_i, i = 1, 2, \dots, n$. Ces sommes se transforment en $x_1 + x_2 + \dots + x_i - \rho$ respectivement en $x_1 + x_2 + \dots + x_i + \rho$ pour $i = r, r+1, \dots, s-1$, suivant qu'il s'agit d'une dilatation respectivement d'une contraction de coefficient ρ des racines $x_r, x_s, r < s$. Les sommes $x_1 + x_2 + \dots + x_i$, pour les autres valeurs de i restent invariables. Il faut retenir, en particulier, le fait que la somme de toutes les racines reste invariable par une dilatation ou une contraction de deux racines.

Si P^* est un polynôme qui se déduit du polynôme P par l'application d'une dilatation ou d'une contraction de coefficient ρ , les racines de P^* tendent, pour $\rho \rightarrow 0$, vers les racines correspondantes de P . En même temps les racines de $P^{*'}$, qui sont également des fonctions continues de ρ , tendent vers les racines correspondantes de P' .

Il est important d'étendre ces propriétés à la limite, au cas où P^* se déduit de P par l'application successive d'un nombre fini de dilatations ou de contractions relatives à divers couples de racines du polynôme. Cette extension doit être faite avec certaines précautions car l'application successive de plusieurs opérations dépend de leur ordre. Les opérations

de dilatation et de contraction ne sont donc pas commutatives lorsqu'elles s'appliquent à des couples de racines différentes.

Exemple. Soient $n = 3$ et $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 2$. La première racine est donc égale à 0, la seconde et la troisième à 2. Si nous appliquons d'abord aux racines x_1, x_3 (à la première et à la troisième) une dilatation de coefficient 3, les racines deviennent $-3, 2, 5$. En appliquant ensuite une contraction de coefficient 1 aux racines x_2, x_3 (à la seconde et à la troisième) nous obtenons les racines $-3, 3, 4$. L'ordre des opérations ne peut être interverti car l'opération de contraction ne peut être appliquée aux racines $x_2 = 2, x_3 = 2$, si nous tenons compte de la restriction imposée de ne pas déranger l'ordre des racines.

Toujours dans ce cas, supposons que nous appliquions d'abord aux racines x_2, x_3 (à la seconde et à la troisième) une contraction de coefficient 1. Les racines deviennent $0, 1, 3$. Nous appliquons ensuite aux racines $0, 1$ (à la première et à la seconde) une dilatation de coefficient 3. Nous retrouvons les racines $-3, 3, 4$. Il est à remarquer que chaque fois nous avons dérangé l'ordre des racines.

De cet exemple on voit, d'une part, combien la restriction de ne pas déranger l'ordre des racines apporte des précisions sur les opérations de dilatation et de contraction. D'autre part, le même exemple nous montre comment il faut suivre les racines du polynôme lorsqu'on applique successivement plusieurs dilatations ou contractions de deux racines.

Nous n'insisterons pas sur ce problème de permutabilité car les propriétés à la limite de plus haut seront appliquées dans la suite seulement dans des cas particuliers qui seront précisés lorsqu'ils interviendront effectivement.

13. Nous allons démontrer maintenant que le théorème 5 résulte du théorème 6.

Si le polynôme P^* s'obtient du polynôme P par l'application d'une dilatation de deux racines, nous avons $P^* \xrightarrow{m} P$. Cette relation est vraie aussi lorsque le polynôme P^* s'obtient de P par l'application successive d'un nombre quelconque de dilatations.

Soient (14) les racines du polynôme P et soit $n > 1$. Désignons par P_ρ un polynôme ayant comme racines les nombres

$$x'_i = x_i - (n-i)\rho, i = 1, 2, \dots, n-1, x'_n = x_n + \frac{n(n-1)}{2}\rho,$$

où ρ est un nombre positif. Le polynôme P_ρ s'obtient de P en appliquant successivement les opérations de dilatation, de coefficient $(n-i)\rho$ aux racines x_i, x_n , pour $i = 1, 2, \dots, n-1$ (dans cet ordre). Nous avons $P_\rho \xrightarrow{m} P$. Remarquons que P_ρ a toutes ses racines simples qui, pour $\rho \rightarrow 0$, tendent vers les racines correspondantes de P . En même temps les racines de P'_ρ tendent vers les racines correspondantes de P' .

Soient P, Q deux polynômes de degré $n > 1$, (1) les racines de ces polynômes et supposons que $P \xrightarrow{m} Q$. Soient

$$x'_1 < x'_2 < \dots < x'_n, \quad y'_1 < y'_2 < \dots < y'_n$$

les racines des polynômes $P_{2\rho}, Q_\rho$, où ρ est un nombre positif et qui s'obtiennent de P, Q de la même manière que plus haut le polynôme P_ρ de P . Nous avons alors

$$y'_1 + y'_2 + \dots + y'_i - (x'_1 + x'_2 + \dots + x'_i) =$$

$$= y_1 + y_2 + \dots + y_i - (x_1 + x_2 + \dots + x_i) + \frac{i(2n-i-1)}{2} \rho > 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n = y'_1 + y'_2 + \dots + y'_n.$$

Nous avons donc $P_{2\rho} \xrightarrow{mm} Q_\rho$. En supposant donc que le théorème 6 soit vrai, il en résulte que $P'_{2\rho} \xrightarrow{mm} Q'_\rho$. Mais, si $\rho \rightarrow 0$, les racines de $P'_{2\rho}, Q'_\rho$ tendent vers les racines de P', Q' respectivement. En faisant donc $\rho \rightarrow 0$, nous déduisons que $P' \xrightarrow{m} Q'$.

Nous avons ainsi démontré que le théorème 5 résulte du théorème 6.

Remarque. La relation $P^* \xrightarrow{m} P$ est vraie si P^* s'obtient de P par une dilatation de deux racines, sans la restriction de la conservation de l'ordre des racines. En effet, on le voit facilement, si nous appliquons une dilatation aux racines $x' \leq x''$ et si nous supposons que le coefficient ρ croît, on peut remplacer $x' - \rho$ ou $x'' + \rho$ par une racine qu'il traverse. Convenons de dire qu'une dilatation des racines $x' \leq x''$ ne dérange pas au sens large l'ordre des racines lorsque les intervalles $(x' - \rho, x')$, $(x'', x'' + \rho)$ ne contiennent pas des racines du polynôme. Alors la propriété précédente résulte du fait que toute dilatation, sans la restriction de l'ordre des racines, s'obtient par l'application successive d'un nombre fini de dilatations qui ne dérange pas au sens large l'ordre des racines.

On voit aussi que la relation $P^* \xrightarrow{m} P$ est vraie lorsqu'on obtient P^* de P par l'application successive d'un nombre quelconque (fini ou non) de dilatations, avec ou sans la restriction de la conservation de l'ordre des racines.

14. Nous nous proposons maintenant de démontrer le théorème 6. Nous le déduirons d'une série de lemmes préliminaires.

Lorsque le polynôme P^* s'obtient de P par une contraction de deux racines, nous avons $P \xrightarrow{m} P^*$. Cette relation reste vraie si P^* s'obtient de

P par une succession d'un nombre fini de contractions. Si le polynôme P a toutes ses racines simples, il en est de même pour le polynôme P^* .

Lemme 2. Étant donné un polynôme P de degré $n > 1$ et un nombre positif ε quelconque, on peut trouver un polynôme de degré n tel que: 1° Ce polynôme se déduise de P par l'application successive d'un nombre fini de contractions de deux racines consécutives, 2° Les racines de ce polynôme soient toutes comprises dans un intervalle de longueur $< \varepsilon$.

Il est clair que si P a toutes ses racines confondues nous n'avons rien à démontrer. Ici nous considérons seulement le cas où P a toutes ses racines simples, ce que nous supposerons plus loin. Il est d'ailleurs clair que le lemme reste vrai aussi sans cette restriction.

Dans l'énoncé on a précisé qu'il s'agit seulement de contractions appliquées à des racines consécutives; donc si (14) sont les racines du polynôme seulement à des couples de racines de la forme x_i, x_{i+1} .

Nous démontrerons le lemme par induction complète.

Pour $n = 2$ la propriété est vraie puisque si $x_1 < x_2$ sont les racines de P , il suffit de leur appliquer une contraction de coefficient ρ qui vérifie les inégalités $\max \left(0, \frac{x_2 - x_1 - \varepsilon}{2} \right) < \rho < \frac{x_2 - x_1}{2}$.

Supposons maintenant que $n > 2$ et que la propriété soit vraie pour les polynômes de degré $n-1$. Démontrons que la propriété sera vraie aussi pour les polynômes de degré n .

Nous allons d'abord démontrer que si P est un polynôme de degré n ayant les racines (14) ($x_1 < x_n$), en appliquant un nombre fini de contractions de racines consécutives, on peut en déduire un polynôme dont les racines soient comprises dans un intervalle de longueur $< \frac{x_n - x_1}{2} + \frac{\varepsilon}{4}$.

En effet, par hypothèse, par l'application d'un nombre fini de contractions de racines consécutives, nous pouvons déduire de P un polynôme P_1 dont les racines $x'_1 < x'_2 < \dots < x'_n$ vérifient les relations $x'_1 = x_1, x'_n - x'_2 < \frac{\varepsilon}{4}$.

Les contractions sont appliquées seulement à des couples de la forme x_i, x_{i+1} , où $i > 1$. Ensuite nous appliquons au polynôme P_1 une contraction des racines x'_1, x'_2 de coefficient ρ , où $\max \left(0, \frac{x'_2 - x'_1 - \varepsilon}{2} \right) < \rho < \frac{x'_2 - x'_1}{2}$.

Les racines du polynôme ainsi obtenu sont alors comprises dans un intervalle de longueur $< x'_n - (x_1 + \rho) < x'_n - x'_1 - \frac{x'_2 - x'_1}{2} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{x'_n - x'_1}{2} + \frac{x'_2 - x'_1}{2} + \frac{\varepsilon}{8} < \frac{x_n - x_1}{2} + \frac{\varepsilon}{4}$, justement ce qu'il fallait démontrer.

Il en résulte que si un polynôme de degré n a toutes ses racines comprises dans un intervalle de longueur $< l$, par l'application d'un nombre fini

de contractions de racines consécutives, on peut en déduire un polynôme dont les racines soient comprises dans un intervalle de longueur $< \frac{l}{2} + \frac{\varepsilon}{4}$.

En répétant ce procédé, on voit que, pour tout nombre naturel k on peut déduire, par l'application successive d'un nombre fini de contractions de deux racines consécutives, un polynôme de degré n dont les racines soient comprises dans un intervalle de longueur plus petite que

$$\frac{l}{2^k} + \varepsilon \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \right) < \frac{l}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il suffit de choisir le nombre k de manière que $\frac{l}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$ et le lemme est démontré.

Remarque. On peut faire une remarque analogue à celle faite au no. 13.

La relation $P \xrightarrow{m} P^*$ est vraie aussi lorsque P^* s'obtient de P par une contraction de deux racines $x' < x''$, sans la restriction de la conservation de l'ordre des racines, mais avec la condition que le coefficient ρ soit $< x'' - x'$. La démonstration est analogue, en remplaçant $x' + \rho$ ou $x'' - \rho$ avec toute racine qu'il traverse et, en particulier, en permutant ces racines lorsqu'elles se traversent, pendant que ρ croît. Ici encore on peut convenir de dire que les racines $x' < x''$ ne dérangent pas au sens large l'ordre des racines lorsque les intervalles $(x', x' + \rho)$, $(x'' - \rho, x'')$ ne contiennent aucune racine du polynôme transformé et lorsque $0 < \rho < x'' - x'$. Alors la propriété précédente résulte du fait que toute contraction de deux racines, avec la seule restriction que son coefficient ρ vérifie les inégalités $0 < \rho < x'' - x'$, peut être obtenue par un nombre fini de contractions successives qui ne dérangent pas au sens large l'ordre des racines.

On voit aussi que la relation $P \xrightarrow{m} P^*$ est vraie lorsque P^* s'obtient de P par l'application successive d'un nombre quelconque (fini ou non) de contractions avec la conservation de l'ordre des racines ou seulement avec la restriction imposée plus haut aux coefficients des contractions.

15. Du lemme précédent il résulte le

Lemme 3. Si P, Q sont deux polynômes de degré $n > 2$ et si $P \xrightarrow{mm} Q$, on peut trouver un polynôme R de degré n , qui s'obtient de P par l'application successive d'un nombre fini de contractions de deux racines consécutives, tel que l'on ait $R \xrightarrow{m} Q$, sans que la relation $R \xrightarrow{mm} Q$ soit vérifiée.

Soient (1') les racines des polynômes P, Q et $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ les racines de R . Nous avons $P \xrightarrow{m} R$ et, en vertu des hypothèses vérifiées par R , nous avons les inégalités

$$(17) \quad z_1 + z_2 + \dots + z_i \leq y_1 + y_2 + \dots + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

dans l'une au moins la relation d'égalité étant vraie. Bien entendu, nous avons aussi $z_1 + z_2 + \dots + z_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$.

Pour démontrer le lemme prenons un nombre positif ε tel que

$$(18) \quad \varepsilon < y_n - y_1.$$

En vertu du lemme 2, nous pouvons trouver une suite finie de polynômes de degré n ,

$$P_0, P_1, \dots, P_k$$

tels que:

1° Chaque terme P_i s'obtient du précédent P_{i-1} par une contraction de deux racines consécutives.

2° Le premier terme P_0 est égal à P et le dernier P_k a toutes ses racines comprises dans un intervalle de longueur $< \varepsilon$.

Par hypothèse $P_0 \xrightarrow{mm} Q$. Il existe donc un plus grand indice r tel que $P_r \xrightarrow{mm} Q$. Nous ne pouvons pas avoir $r = k$, car autrement l'inégalité (18) serait en contradiction avec les inégalités (16'). Nous avons donc $r < k$, donc aussi $r + 1 \leq k$ et le polynôme P_{r+1} ne vérifie pas la relation $P_{r+1} \xrightarrow{mm} Q$. Soit ρ_1 le coefficient de contraction par laquelle P_{r+1} s'obtient de P_r . Soit P^* un polynôme qui s'obtient de P en appliquant au même couple de racines (consécutives) une contraction de coefficient $\rho \leq \rho_1$. Lorsque $\rho \rightarrow 0$, les racines de P^* tendent vers les racines correspondantes de P_r et lorsque $\rho \rightarrow \rho_1$ elles tendent vers les racines correspondantes de P_{r+1} . En vertu de la continuité par rapport à ρ des racines, il existe un nombre positif $\rho \leq \rho_1$ tel que l'on ait $P^* \xrightarrow{m} Q$, sans que la relation $P^* \xrightarrow{mm} Q$ soit vérifiée. En prenant le polynôme R égal au polynôme P^* correspondant à ce ρ , le lemme est démontré.

16. Nous avons aussi le

Lemme 4. Si P, Q sont deux polynômes de degré $n > 1$ et si $P \xrightarrow{mm} Q$, on peut trouver une suite finie de polynômes de degré n ,

$$(19) \quad P_0, P_1, \dots, P_k$$

tels que:

1° Chaque terme P_i s'obtient du terme précédent P_{i-1} par une contraction de deux racines consécutives.

2° Le premier terme est égal à P et le dernier terme est égal à Q .

Nous pouvons faire la démonstration par induction complète.

de contractions de racines consécutives, on peut en déduire un polynôme dont les racines soient comprises dans un intervalle de longueur $< \frac{l}{2} + \frac{\varepsilon}{4}$.

En répétant ce procédé, on voit que, pour tout nombre naturel k on peut déduire, par l'application successive d'un nombre fini de contractions de deux racines consécutives, un polynôme de degré n dont les racines soient comprises dans un intervalle de longueur plus petite que

$$\frac{l}{2^k} + \varepsilon \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \right) < \frac{l}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il suffit de choisir le nombre k de manière que $\frac{l}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$ et le lemme est démontré.

Remarque. On peut faire une remarque analogue à celle faite au no. 13.

La relation $P \xrightarrow{m} P^*$ est vraie aussi lorsque P^* s'obtient de P par une contraction de deux racines $x' < x''$, sans la restriction de la conservation de l'ordre des racines, mais avec la condition que le coefficient ρ soit $< x'' - x'$. La démonstration est analogue, en remplaçant $x' + \rho$ ou $x'' - \rho$ avec toute racine qu'il traverse et, en particulier, en permutant ces racines lorsqu'elles se traversent, pendant que ρ croît. Ici encore on peut convenir de dire que les racines $x' < x''$ ne dérangent pas au sens large l'ordre des racines lorsque les intervalles $(x', x' + \rho)$, $(x'' - \rho, x'')$ ne contiennent aucune racine du polynôme transformé et lorsque $0 < \rho < x'' - x'$. Alors la propriété précédente résulte du fait que toute contraction de deux racines, avec la seule restriction que son coefficient ρ vérifie les inégalités $0 < \rho < x'' - x'$, peut être obtenue par un nombre fini de contractions successives qui ne dérangent pas au sens large l'ordre des racines.

On voit aussi que la relation $P \xrightarrow{m} P^*$ est vraie lorsque P^* s'obtient de P par l'application successive d'un nombre quelconque (fini ou non) de contractions avec la conservation de l'ordre des racines ou seulement avec la restriction imposée plus haut aux coefficients des contractions.

15. Du lemme précédent il résulte le

Lemme 3. Si P, Q sont deux polynômes de degré $n > 2$ et si $P \xrightarrow{mm} Q$, on peut trouver un polynôme R de degré n , qui s'obtient de P par l'application successive d'un nombre fini de contractions de deux racines consécutives, tel que l'on ait $R \xrightarrow{m} Q$, sans que la relation $R \xrightarrow{mm} Q$ soit vérifiée.

Soient $(1')$ les racines des polynômes P, Q et $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ les racines de R . Nous avons $P \xrightarrow{m} R$ et, en vertu des hypothèses vérifiées par R , nous avons les inégalités

$$(17) \quad z_1 + z_2 + \dots + z_i \leq y_1 + y_2 + \dots + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

dans l'une au moins la relation d'égalité étant vraie. Bien entendu, nous avons aussi $z_1 + z_2 + \dots + z_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$.

Pour démontrer le lemme prenons un nombre positif ε tel que

$$(18) \quad \varepsilon < y_n - y_1.$$

En vertu du lemme 2, nous pouvons trouver une suite finie de polynômes de degré n ,

$$P_0, P_1, \dots, P_k$$

tels que:

1° Chaque terme P_i s'obtient du précédent P_{i-1} par une contraction de deux racines consécutives.

2° Le premier terme P_0 est égal à P et le dernier P_k a toutes ses racines comprises dans un intervalle de longueur $< \varepsilon$.

Par hypothèse $P_0 \xrightarrow{mm} Q$. Il existe donc un plus grand indice r tel que $P_r \xrightarrow{mm} Q$. Nous ne pouvons pas avoir $r = k$, car autrement l'inégalité (18) serait en contradiction avec les inégalités (16'). Nous avons donc $r < k$, donc aussi $r + 1 \leq k$ et le polynôme P_{r+1} ne vérifie pas la relation $P_{r+1} \xrightarrow{mm} Q$. Soit ρ_1 le coefficient de contraction par laquelle P_{r+1} s'obtient de P_r . Soit P^* un polynôme qui s'obtient de P en appliquant au même couple de racines (consécutives) une contraction de coefficient $\rho \leq \rho_1$. Lorsque $\rho \rightarrow 0$, les racines de P^* tendent vers les racines correspondantes de P_r et lorsque $\rho \rightarrow \rho_1$ elles tendent vers les racines correspondantes de P_{r+1} . En vertu de la continuité par rapport à ρ des racines, il existe un nombre positif $\rho \leq \rho_1$ tel que l'on ait $P^* \xrightarrow{m} Q$, sans que la relation $P^* \xrightarrow{mm} Q$ soit vérifiée. En prenant le polynôme R égal au polynôme P^* correspondant à ce ρ , le lemme est démontré.

16. Nous avons aussi le

Lemme 4. Si P, Q sont deux polynômes de degré $n > 1$ et si $P \xrightarrow{mm} Q$, on peut trouver une suite finie de polynômes de degré n ,

$$(19) \quad P_0, P_1, \dots, P_k$$

tels que:

1° Chaque terme P_i s'obtient du terme précédent P_{i-1} par une contraction de deux racines consécutives.

2° Le premier terme est égal à P et le dernier terme est égal à Q .

Nous pouvons faire la démonstration par induction complète.

Pour $n = 2$ il suffit de prendre $k = 1$, donc $P_0 = P$, $P_1 = Q$ et le lemme est démontré.

Prenons $n > 2$ et supposons que la propriété soit vraie pour les polynômes de degré $2, 3, \dots, n-1$. Démontrons qu'elle sera vraie aussi pour les polynômes de degré n .

Considérons donc deux polynômes P, Q de degré n et supposons que $P \xrightarrow{mm} Q$. En vertu du lemme 3 nous pouvons construire une suite finie de polynômes de degré n ,

$$(20) \quad P_0, P_1, \dots, P_r, R,$$

où P_0 est égal à P et dont les termes vérifient la condition 1 du lemme 4. De plus le dernier terme R , déterminé par le lemme 3, vérifie la relation $R \xrightarrow{m} Q$ mais non pas la relation $R \xrightarrow{mm} Q$. Nous continuerons de désigner par $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ les racines de R .

Si R est égal à Q , la suite (20) vérifie toutes les conditions imposées à la suite (19) et le lemme 4 est démontré.

Dans le cas contraire, seulement j , où $1 \leq j < n-1$, des relations (17) se réduisent à des égalités. Soient $i_1, i_2, \dots, i_j$ les valeurs de i pour lesquelles nous avons l'égalité dans (17), pour les autres valeurs de i l'inégalité au sens stricte (donc avec $<$) étant valable. Nous pouvons supposer $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_j < i_{j+1} = n$. Considérons maintenant les couples d'indices consécutifs i_s, i_{s+1} . Ces couples sont de deux catégories:

1° Si $i_{s+1} - i_s = 1$ les couples sont de la première catégorie et nous avons $z_{i_s+1} = y_{i_s+1}$.

2° Si $i_{s+1} - i_s > 1$ les couples sont de la seconde catégorie et dans ce cas nous avons

$$z_{i_s+1} + z_{i_s+2} + \dots + z_{i_s+v} < y_{i_s+1} + y_{i_s+2} + \dots + y_{i_s+v},$$

$$v = 1, 2, \dots, i_{s+1} - i_s - 1,$$

$$z_{i_s+1} + z_{i_s+2} + \dots + z_{i_{s+1}} = y_{i_s+1} + y_{i_s+2} + \dots + y_{i_{s+1}}.$$

Mais, nous avons $i_{s+1} - i_s < n$ et, en vertu des hypothèses faites le lemme 4 est vraie pour les polynômes de degré $< n$. Il en résulte que nous pouvons appliquer successivement à R un nombre fini de contractions de deux racines consécutives z_i, z_{i+1} , où $i_s + 1 \leq i \leq i_{s+1} - 1$ de manière que les racines $z_{i_s+1}, z_{i_s+2}, \dots, z_{i_{s+1}}$ deviennent respectivement égales à $y_{i_s+1}, y_{i_s+2}, \dots, y_{i_{s+1}}$, laissant les autres racines inchangées. Il en résulte donc que nous pouvons prolonger la suite (20) tel que

$$P_0, P_1, \dots, P_r, R, R_1, \dots, R_r,$$

où les termes vérifient les mêmes conditions que ceux de la suite (20), sauf que le dernier terme R_r , a un nombre d'une unité moindre de couples d'indices consécutifs de la seconde catégorie.

Puisque évidemment, seulement un nombre fini de couples d'indices consécutifs i_s, i_{s+1} de la seconde catégorie existent, on voit que, en répétant éventuellement un nombre fini de fois le procédé de plus haut, nous arrivons à construire une suite (19), en prolongeant convenablement la suite (20) et qui vérifie toutes les conditions du lemme 4.

Le lemme 4 est donc démontré.

17. Enfin, nous avons le

Lemme 5. Si P est un polynôme de degré $n > 1$, ayant toutes ses racines simples et si le polynôme Q s'obtient de P par une contraction de deux racines consécutives, on a $P' \xrightarrow{mm} Q'$.

Avant de démontrer ce lemme nous allons montrer qu'alors le théorème 6 en résulte. En effet, soient P, Q deux polynômes de degré $n > 1$ et supposons que $P \xrightarrow{mm} Q$. Nous appliquons le lemme 4, en construisant la suite (19) qui vérifie les propriétés 1°, 2° de ce lemme. En vertu du lemme 5, nous avons alors $P'_{i-1} \xrightarrow{mm} P'_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, d'où, compte tenant de la transitivité de la relation $\xrightarrow{mm}$, nous déduisons $P'_0 \xrightarrow{mm} P'_k$, donc aussi $P' \xrightarrow{mm} Q'$ et le théorème 6 est démontré.

18. Il reste à démontrer le lemme 5.

De ce qui précède il résulte qu'il suffit de faire la démonstration pour $n > 2$. On voit alors facilement que le lemme 5 est équivalent au

Lemme 6. Si $a < b$, $0 < \rho < \frac{b-a}{2}$ et si $f = (x-a)(x-b)h$, $g = (x-a-\rho)(x-b+\rho)h$, où h est un polynôme de degré $n > 0$ ayant toutes ses racines réelles, simples et situées en dehors de l'intervalle fermé $[a, b]$, nous avons $f' \xrightarrow{mm} g'$.

Le polynôme g résulte du polynôme f en appliquant une contraction aux racines a et b .

Désignons par

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n, \quad y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1}$$

les racines de h et h' (si $n > 1$) et désignons par

$$z_1 < z_2 < \dots < z_{n+1}, \quad z'_1 < z'_2 < \dots < z'_{n+1}$$

les racines des polynomes f' , g' . Soit k l'indice déterminé tel que

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < a < b < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n$$

si $1 < k < n + 1$ et posons $k = 1$ si toutes les racines x_i sont à droite de b et $k = n + 1$ si toutes les racines x_i sont à gauche de a . Le nombre naturel k est bien déterminé et prend les valeurs $1, 2, \dots, n + 1$. Alors z_k est la racine de f' qui est comprise entre a et b et z'_k la racine de g' qui est comprise entre $a + \rho$ et $b - \rho$. Les autres couples de racines z_i, z'_i sont respectivement compris dans les intervalles ouverts :

$$(x_i, x_{i+1}), \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, k - 2,$$

$$\left(x_{k-1}, \frac{a+b}{2}\right), \quad \text{pour } i = k - 1,$$

$$\left(\frac{a+b}{2}, x_k\right), \quad \text{pour } i = k + 1,$$

$$(x_{i-2}, x_{i-1}), \quad \text{pour } i = k + 2, k + 3, \dots, n + 1.$$

Dans ce tableau nous supprimons les deux premières lignes si $k = 1$, la première ligne si $k = 2$, la dernière ligne si $k = n$ et les deux dernières lignes si $k = n + 1$. Enfin, pour $n = 1$ et $n = 2$ nous gardons l'une ou les deux de la seconde et la troisième lignes.

Les formules

$$(21) \quad \begin{cases} f' = (x - a)(x - b)h' + (2x - a - b)h, \\ g' = (x - a - \rho)(x - b + \rho)h' + (2x - a - b)h, \end{cases}$$

nous montrent, puisque h, h' ne peuvent avoir des racines communes, que f', g' ne peuvent avoir que $\frac{a+b}{2}$ comme racine commune et ceci si et seulement si h' s'annule pour $x = \frac{a+b}{2}$. Alors $z_k = z'_k = \frac{a+b}{2}$. Si $i \neq k$, nous avons $z_i \neq z'_i$ et pour un tel i , z_i, z'_i ne peuvent être des racines de h' . D'ailleurs nous avons la formule

$$(22) \quad f' = g' - \rho(b - a - \rho)h',$$

qui résulte de (21).

Pour étudier encore les couples z_i, z'_i pour $i \neq k$, nous allons distinguer deux cas :

Cas 1. Supposons que $k > 1$ et examinons les racines z_i, z'_i pour $i < k$. De la seconde formule (21) il résulte, pour un tel i ,

$$(23) \quad h(z'_i) h'(z'_i) > 0$$

et de la première formule (21) et de la formule (22) il résulte que

$$(24) \quad \text{sg } f'(x_i) = \text{sg } h'(x_i), \quad \text{sg } f'(z'_i) = -\text{sg } h'(z'_i),$$

en utilisant ici la fonction $\text{sg } x$ qui, par définition, est égale à $-1, 0$ respectivement 1 suivant que x est $<, =$ respectivement > 0 .

De (23) il résulte que z'_i est dans le voisinage droit de z_i , plus exactement dans l'intervalle (x_i, y_i) . Nous avons alors

$$(25) \quad h'(x_i) h'(z'_i) > 0$$

et de (24) il résulte que

$$(26) \quad \text{sg } f'(x_i) f'(z'_i) = -1,$$

ce qui nous montre que f' a au moins une racine dans l'intervalle (x_i, z'_i) . Mais, nous ne pouvons avoir qu'une racine qui n'est autre que z_i vérifiant cette propriété. Il résulte donc que nous avons

$$(27) \quad z_i < z'_i, \quad i = 1, 2, \dots, k - 1.$$

Si $k = n + 1$, comme y_n nous pouvons prendre le point impropre ∞ dans les considérations précédentes.

Cas 2. Supposons que $k < n + 1$ et examinons les racines z_i, z'_i pour $i > k$. En procédant comme plus haut, nous voyons qu'au lieu de (23) nous avons, pour ces valeurs de i ,

$$(23') \quad h(z_i) h'(z'_i) < 0$$

qui nous montre que z'_i est dans le voisinage gauche du point x_{i-1} , plus exactement qu'il est dans l'intervalle (y_{i-2}, x_{i-1}) . Au lieu de (24), (25) et (26) nous avons respectivement

$$(24') \quad \text{sg } f'(x_{i-1}) = \text{sg } h'(x_{i-1}), \quad \text{sg } f'(z'_i) = -\text{sg } h'(z'_i),$$

$$(25') \quad h'(x_{i-1}) h'(z'_i) > 0,$$

$$(26') \quad \text{sg } f'(x_{i-1}) f'(z'_i) = -1.$$

et on déduit, comme plus haut, que z_i est dans l'intervalle (z'_i, x_{i-1}) .

Nous avons donc,

$$(27') \quad z'_i < z_i, \quad i = k+1, k+2, \dots, n+1.$$

Si $k=1$, comme y_0 nous pouvons prendre le point impropre $-\infty$ dans nos considérations.

Les inégalités (27), (27') et l'égalité

$$z_1 + z_2 + \dots + z_{n+1} = z'_1 + z'_2 + \dots + z'_{n+1}$$

démontrent le lemme 6. En effet, en vertu de cette égalité, les inégalités

$$z_1 + z_2 + \dots + z_i < z'_1 + z'_2 + \dots + z'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

sont équivalentes avec les inégalités

$$(28) \quad \begin{cases} z_1 + z_2 + \dots + z_i < z'_1 + z'_2 + \dots + z'_i, & i = 1, 2, \dots, k-1, \\ z'_{i+1} + z'_{i+2} + \dots + z'_{n+1} < z_{i+1} + z_{i+2} + \dots + z_{n+1}, & i = k, k+1, \dots, n \end{cases}$$

Si $k=1$, on supprime les inégalités (27) et les premières inégalités (28) et si $k=n+1$ on supprime les inégalités (27') et les dernières inégalités (28). Le raisonnement reste toujours valable.

Le théorème 6 est donc complètement démontré.

Remarque. La cas 2 peut être déduit du cas 1 si nous utilisons la propriété que lorsque les racines d'un polynôme sont soumises à une transformation linéaire, les racines de la dérivée de ce polynôme souffrent la même transformation. Pour la même raison il suffirait de démontrer le lemme 6 seulement pour des valeurs particulières quelconques de a et de b (par exemple pour $a=0$, $b=1$ ou bien pour $a=-1$, $b=1$).

19. Des résultats précédents nous pouvons déduire des conséquences pour le cas où nous avons (12) ou (12'), mais l'égalité (13) se transforme dans une inégalité.

La relation $P \xrightarrow{mc} Q$ signifie que les racines (1) des polynômes P , Q de degré $n \geq 1$ vérifient les inégalités

$$x_1 + x_2 + \dots + x_i \leq y_1 + y_2 + \dots + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

et la relation $P \xrightarrow{mcmc} Q$ signifie que les racines (1') des polynômes P , Q de degré $n \geq 1$ vérifient les inégalités

$$x_1 + x_2 + \dots + x_i < y_1 + y_2 + \dots + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

La relation $\xrightarrow{mc}$ est (reflexive et) transitive et la relation $\xrightarrow{mcmc}$ est également transitive. De $P \xrightarrow{c} Q$ respectivement $P \xrightarrow{cc} Q$ il résulte $P \xrightarrow{mc} Q$ respectivement $P \xrightarrow{mcmc} Q$ et de $P \xrightarrow{m} Q$ il résulte que $P \xrightarrow{mc} Q$, etc.

Nous avons alors la

Conséquence 4. Si P , Q sont deux polynômes de degré $n > 1$, de $P \xrightarrow{mc} Q$ il résulte que $P' \xrightarrow{mc} Q'$.

En effet, si R est un polynôme de degré n ayant comme racines $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_1 + y_2 + \dots + y_n - (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})$, nous avons $P \xrightarrow{c} R$, $R \xrightarrow{m} Q$. Nous avons donc $P' \xrightarrow{c} R'$, $R' \xrightarrow{m} Q'$. Il en résulte que $P' \xrightarrow{mc} R'$, $R' \xrightarrow{mc} Q'$, d'où $P' \xrightarrow{mc} Q'$, ce qui démontre la conséquence 4.

Nous avons aussi la

Conséquence 5. Si P , Q sont deux polynômes de degré $n > 1$, de $P \xrightarrow{mcmc} Q$ il résulte que $P' \xrightarrow{mcmc} Q'$.

Soit R le polynôme précédent. Nous avons, dans ce cas, $P' \xrightarrow{m} R'$, sans que l'égalité (13) soit vérifiée, et $R' \xrightarrow{mm} Q'$. On voit facilement que la relation $P' \xrightarrow{mcmc} Q'$ en résulte.

La conséquence 4 peut être déduite de la conséquence 5. Désignons par (14) les racines du polynôme P de degré n et soit P_ρ un polynôme de degré n ayant comme racines $x_i - (n-i)\rho$, où ρ est un nombre positif. Le polynôme P_ρ a toutes ses racines simples et si $\rho \rightarrow 0$ les racines de P_ρ respectivement celles de P'_ρ tendent vers les racines de P respectivement vers celles de P' . Un calcul simple, analogue à celui du no. 13, nous montre que si $P \xrightarrow{mc} Q$ nous avons aussi $P_{2\rho} \xrightarrow{mcmc} Q_\rho$. En supposant donc la conséquence 5 démontrée, nous avons $P'_{2\rho} \xrightarrow{mcmc} Q'_\rho$, d'où, en faisant $\rho \rightarrow 0$, on déduit $P' \xrightarrow{mc} Q'$, ce qui démontre la conséquence 4.

Enfin, la conséquence 5 peut être démontrée aussi en tenant compte du lemme 1, du théorème 6 et en faisant croître la dernière racine x_n du polynôme P . Nous prions le lecteur de faire cette démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G., *Inequalities*, 1934.
- [2] Markov W. A., *Über Polynome die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen*. Mathematische Annalen, **77**, 213–258 (1916).
- [3] Montel P., *Sur les fractions rationnelles à termes entrelacés*, Mathematica, **5**, 110–129 (1931).

Reçu le 11. VI. 1960.