MATHEMATICA VOL. 3 (26), 1, 1961, pp. 5 – 18

UNE PROPRIETE DES POLYNOMES DE BERNSTEIN

par

O. ARAMĂ et D. RIPIANU

à Cluj

On connaît [1–3] ce résultat que si une fonction $f(x)$ est non-concave du premier ordre dans l'intervalle $[0, 1]$, c'est-à-dire si toutes ses différences divisées du second ordre sont non-négatives dans cet intervalle, alors la suite des polynomes d'interpolation de Bernstein relatifs à cette fonction et à l'intervalle $[0, 1]$ est non croissante quelque soit $x \in [0, 1]$. On sait également que la suite des dérivées du premier ordre des polynomes de Bernstein possède une propriété semblable au cas où la fonction $f(x)$ est non-concave du premier et du deuxième ordre.

Le professeur TIBERIU POPOVICIU a proposé l'extension de ces résultats, en posant notamment le problème de l'étude des propriétés de monotonie d'ordre supérieur de la suite des polynomes de Bernstein, c'est-à-dire le problème de l'étude du signe des différences de différents ordres des termes d'une telle suite.

En nous occupant de ce problème, nous avons pu démontrer le

THÉORÈME. *Si la fonction $f(x)$ est analytique dans l'intervalle $[0, 1]$ et si dans cet intervalle toutes ses dérivées d'ordre supérieur au premier sont non-négatives, alors l'inégalité suivante*

$$\Delta_2 B_n(x; f) = B_{n+2}(x; f) - 2B_{n+1}(x; f) + B_n(x; f) \geqq 0$$

a lieu pour tout $x \in [0, 1]$ et pour chaque nombre entier et positif n.

Nous avons désigné par $B_n(x; f)$ le polynome d'interpolation de Bernstein de degré n, relatif à la fonction $f(x)$ et à l'intervalle $[0, 1]$, c'est-à-dire

$$B_n(x; f) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, x^i (1 - x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

Si l'on désigne par $\Delta_1 B_n(x;f) = B_{n+1}(x;f) - B_n(x;f)$ les différences du premier ordre des termes de la suite des polynomes de Bernstein $B_n(x;f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ qui, ainsi qu'il a été mentionné précédemment, sont non-positives aux hypothèses du théorème dans l'intervalle $[0,1]$, le théorème affirme que

$$\Delta_1 B_1(x;f) \leqq \Delta_1 B_2(x,f) \leqq \ldots \leqq \Delta_1 B_n(x;f) \leqq \ldots \leqq 0; \ x \in [0, 1].$$

Il est évident qu'attendu que $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(x;f) = f(x)$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_1 B_n(x;f) = 0$. Le théorème énoncé apporte cependant la précision que la suite $\Delta_1 B_n(x;f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tend vers zéro de manière *monotone* alors que n croît indéfiniment, pour chaque x de l'intervalle $[0,1]$.

Démonstration. Aux hypothèses du théorème, la fonction $f(x)$ admet au voisinage de l'origine un développement de la forme

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \ldots + \frac{x^k}{k!} f^k(0) + \ldots \tag{1}$$

dont tous les coefficients $\frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$ $(k = 2, 3, \ldots)$ sont non-négatifs.

Par ailleurs on connaît la propriété suivante:

Si une série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ à rayon de convergence R $(0 < R < \infty)$ possède uniquement des coefficients réels et non-négatifs, alors le point d'affixe R est un point singulier pour la fonction $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Il en résulte qu'aux hypothèses de notre théorème, le rayon de convergence de la série (1) est plus grand que 1. D'autre part, $\Delta_2 B_n(x;\varphi)$ est un opérateur défini dans l'espace $C[0,1]$, à valeurs dans le même espace. Il est facile de voir que c'est un opérateur linéaire, c'est-à-dire additif, homogène et continu, relativement à la norme $\|\varphi\| = \max\limits_{x\in[0,1]} |\varphi(x)|$.

À l'aide de ces remarques et attendu que la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est uniformément convergente dans l'intervalle $[0,1]$, on déduit de suite l'égalité

$$\Delta_2 B_n(x;f) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot \Delta_2 B_n(x; x^k), \tag{2}$$

valable pour toute fonction $f(x)$ qui remplit les conditions du théorème.

Pour démontrer le théorème en question, il suffira donc de démontrer que chaque terme de la série (2) est non-négatif, quelque soit $x \in [0,1]$. Nous démontrerons par conséquent le

THÉORÈME (*). *On a l'inégalité* $\Delta_2 B_n(x; x^k) > 0$ *pour tout nombre entier* k *supérieur à l'unité et pour tout* $x \in (0, 1)$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est basée sur l'identité suivante, appartenant au professeur TIBERIU POPOVICIU:

$$B_{n+1}(x;f) - B_n(x;f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)}[f]\, x^i (1-x)^{n-i+1}, \tag{3}$$

où

$$\lambda_i^{(n)}[f] = -\frac{1}{n(n+1)} C_{n-1}^{i-1} \cdot \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n+1}, \frac{i}{n}; f\right], \tag{4}$$

et où $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n+1}, \frac{i}{n}; f\right]$ désigne la différence divisée du deuxième ordre de la fonction $f(x)$ par rapport aux noeuds

$$x_1 = \frac{i-1}{n}, \quad x_2 = \frac{i}{n+1}, \quad x_3 = \frac{i}{n}. \tag{5}$$

On déduit de (3) l'identité

$$\Delta_2 B_n(x;f) = B_{n+2}(x;f) - 2B_{n+1}(x;f) + B_n(x;f) =$$

$$= B_{n+2}(x;f) - B_{n+1}(x;f) - [x + (1-x)][B_{n+1}(x;f) - B_n(x,f)] =$$

$$= x(1-x) \cdot \sum_{i=0}^{n} \delta_i^{(n)}[f]\, x^i (1-x)^{n-i}, \tag{6}$$

où

$$\begin{cases} \delta_i^{(n)}[f] = \lambda_{i+1}^{(n+1)}[f] - \lambda_{i+1}^{(n)}[f] - \lambda_i^{(n)}[f] \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \lambda_0^{(n)}[f] = \lambda_{n+1}^{(n)}[f] = 0. \end{cases} \tag{7}$$

À l'aide de la relation

$$[x_1, x_2, x_3; x^k] = \frac{x_1^k}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{x_2^k}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)} + \frac{x_3^k}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \tag{8}$$

$$= \sum x_1^p x_2^q x_3^r,$$

où la somme s'étend à tous les groupes de nombres entiers non-négatifs p, q, r qui satisfont à la relation $p + q + r = k - 2$, k étant un nombre entier supérieur à l'unité, on déduit de (4) et (7) que

$$\delta_i^{(n)}[x^k] = \frac{C_n^i}{n+1} \sum G_{p,q,r}(i), \tag{9}$$

où

$$G_{p,q,r}(i) = \frac{i}{n^2}\left(\frac{i-1}{n}\right)^p \left(\frac{i}{n+1}\right)^q \left(\frac{i}{n}\right)^r +$$

$$+ \frac{n-i}{n^2}\left(\frac{i}{n}\right)^p \left(\frac{i+1}{n+1}\right)^q \left(\frac{i+1}{n}\right)^r - \frac{1}{n+2}\left(\frac{i}{n+1}\right)^p \left(\frac{i+1}{n+2}\right)^q \left(\frac{i+1}{n+1}\right)^r. \tag{10}$$

La sommation s'étend dans la relation (9) aux mêmes valeurs des indices p, q, r que dans la relation (8).

Pour démontrer le théorème, il suffira donc de démontrer qu'au cas où $f(x) \equiv x^k$, les coefficients $\delta_i^{(n)}[x^k]$ de la formule (6) sont tous positifs. À cet effet, nous nous servirons du lemme suivant:

Lemme. *On a*

$$G_{p,q,r}(i) \geqq 0 \tag{11}$$

pour toutes les valeurs de n, p, q, r, i indiquées ci-dessous:

$n = 1, 2, \ldots$; $p = 0, 1, \ldots$; $q = 0, 1, \ldots$; $r = 0, 1, \ldots$; $i = 0, 1, \ldots, n-1$, *l'égalité ayant lieu au seul cas où $i = 0$, $p > 0$.*

Démonstration. La relation (11) se réduit pour $i=0$ à l'identité $0=0$ pour $p > 0$ et à l'inégalité évidente $\frac{1}{n(n+1)^q n^r} > \frac{1}{(n+2)(n+2)^q (n+1)^r}$ pour $p > 0$. Au cas où $n = 2$, $i = 1$, la même relation devient $\frac{1}{2^r 3^q} + \frac{1}{2^q}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^q - \left(\frac{2}{3}\right)^r\right] > 0$ pour $p = 0$ et $\left(\frac{3}{2}\right)^p \left(\frac{4}{3}\right)^q - \left(\frac{2}{3}\right)^r > 0$ pour $p \geqq 1$, les deux inégalités étant évidentes aux conditions du lemme.

On supposera donc dans ce qui suit $i \geqq 1$ et $n \geqq 3$. L'on déduit alors de (10) la relation

$$H_{p,q,r}(i) = (n+2)\left(\frac{n+1}{i}\right)^p \left(\frac{n+2}{i+1}\right)^q \left(\frac{n+1}{i+1}\right)^r G_{p,q,r}(i) = \tag{12}$$

$$= \frac{n+2}{n^2}\,[i e_1^p e_2^q e_3^r + (n-i) e_4^{p+r} e_5^q] - 1,$$

où

$$e_1 = \frac{n+1}{n}\frac{i-1}{i},\quad e_2 = \frac{n+2}{n+1}\frac{i}{i+1},\quad e_3 = \frac{n+1}{n}\frac{i}{i+1},\quad e_4 = \frac{n+1}{n},\quad e_5 = \frac{n+2}{n+1}. \tag{13}$$

Il en résulte pour $1 \leqq i \leqq n - 1$ les inégalités $e_1 < e_2 < e_3$ et $e_5 < e_4$. Par conséquent

$$H_{p,q,r}(i) \geqq F(i) = \frac{n+2}{n^2}\left[i\left(\frac{n+1}{n}\,\frac{i-1}{i}\right)^s + (n-i)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^s\right] - 1, \tag{14}$$

où $s = p + q + r = k - 2 \geqq 0$. On a donc

$$F(i)\Big|_{s=0} = \frac{2}{n} > 0;\quad F(i)\Big|_{s=1} = \frac{2n^3 - 5n - 2 + i(n+2)}{n^3(n+1)} > 0 \quad \text{pour} \quad n \geqq 2;$$

$$F(i)\Big|_{s=2} = \frac{1}{n^4(n+1)^2 i}\,[n^2(n^3 + 6n^2 + 14n + 16) + in^2(n-4)(2n^2 + 7n + 8) +$$

$$+ 2(n+4)i^2n^2 + (9n+2)(1-i)^2] > 0$$

pour $n \geqq 4$. Pour $n = 2$, $i = 1$ et $n = 3$, $i = 1$ ou $i = 2$, la relation $F(i)|_{s=2} > 0$ est évidente.

Nous supposerons donc dans ce qui suit $s \geqq 3$ et nous démontrerons tout d'abord que la fonction $F(i)$ de (14) est décroissante par rapport à la variable i. À cet effet, en remplaçant i par $\frac{1}{\sigma}$, on déduit de (14)

$$f_1(\sigma) = \frac{n^2}{n+2}F(i) = \frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^s (1-\sigma)^s - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^s\right] + n\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^s - \frac{n^2}{n+2},$$

de sorte que

$$f_2(\sigma) = -\sigma^2 f_1'(\sigma) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^s [1 + (s-1)\sigma](1-\sigma)^{s-1} - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^s,$$

$$f_2'(\sigma) = -\left(\frac{n+1}{n}\right)^s s(s-1)\sigma(1-\sigma)^{s-2} < 0, \text{ si } s > 1;$$

$$f_3(s) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^s f_2\left(\frac{1}{n-1}\right) = 1 + \frac{s}{n-2} - \left[\frac{n(n+2)(n-1)}{(n+1)^2(n-2)}\right]^s,$$

$$f_4(s) = \left[\frac{(n+1)^2(n-2)}{n(n+2)(n-1)}\right]^s f_3'(s) = \frac{1}{n-2}\left[\frac{(n+1)^2(n-2)}{n(n+2)(n-1)}\right]^s + \ln\frac{(n+1)^2(n-2)}{n(n-1)(n+2)}.$$

Il en résulte que la fonction $f_4(s)$ est décroissante par rapport à la variable s, attendu que pour $n \geqq 3$ on a $0 < \frac{(n+1)^2(n-2)}{n(n+2)(n-1)} < 1$.

Considérons la fonction

$$f_5(n) = f_4(2) = \frac{(n+1)^4(n-2)}{n^2(n-1)^2(n+2)^2} + \ln \frac{(n+1)^2(n-2)}{n(n+2)(n-1)}.$$

On obtient de suite

$$f_5'(n) = \frac{n^8 + 12n^7 + 37n^6 - 3n^5 - 90n^4 - 101n^3 - 84n^2 + 20n + 16}{(n-2)(n-1)^3n^3(n+1)(n+2)^3} > 0$$

pour $n \geqq 3$, d'où il résulte que $f_5(n) < \lim\limits_{n\to\infty} f_5(n) = 0$, et donc que $f_4(2) < 0$. Par conséquent $f_4(s) \leqq f_4(2) < 0$, d'où il s'ensuit que $f_3'(s) < 0$ pour $s \geqq 2$ et que par suite $f_3(s) \leqq f_3(3) = -\frac{10n^6 + 27n^5 - 9n^4 - 71n^3 - 57n^2 - 24n - 4}{(n-2)^3(n+1)^6} < 0$ pour $s \geqq 3$ et $n \geqq 3$. Ainsi donc $f_2\left(\frac{1}{n-1}\right) < 0$ pour $s \geqq 3$ et $n \geqq 3$; le tableau 1 donne alors $\frac{1}{n-1} > \sigma_1$, donc $\frac{1}{i} \geqq \frac{1}{n-1} > \sigma_1$. On a obtenu en définitive l'inégalité $F'(i) = -\frac{n+2}{n^2 i^2} f_1'(\sigma)\Big|_{\sigma=\frac{1}{i}} < 0$. Si donc on démontrera que

σ	0	σ_1	1
$f_2(\sigma)$	>0 $+$	0 $-$	<0
$f_1'(\sigma)$	$-$	0	$+$

Tableau 1

$F(n-1) > 0$, il en résultera $F(i) \geqq F(n-1) > 0$. En tenant compte de cette relation, on déduira successivement, de (14) l'inégalité $H_{p,q,r}(i) > 0$ et de (12) l'inégalité du lemme $G_{p,q,r}(i) > 0$.

Pour démontrer l'inégalité $F(n-1) > 0$, on considère la fonction

$$f_6(s) = F(n-1) = \frac{n+2}{n^2}\left[(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^s\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^s + \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^s\right] - 1, \tag{15}$$

qui s'obtient de la formule (14) pour $i = n - 1$. La dérivée de cette fonction

$$f_6'(s) = \frac{n+2}{n^2}\left[\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^s \ln \frac{n+2}{n+1} - (n-1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^s \ln \frac{n(n-1)}{(n+1)(n-2)}\right]$$

a une seule racine réelle, que l'on désignera par $s_1(n)$:

$$s_1 = s_1(n) = \left[\ln \frac{\ln \frac{n(n-1)}{(n+1)(n-2)}}{\ln \frac{n+2}{n+1}}\right]\left[\ln \frac{n(n-1)(n+2)}{(n+1)^2(n-2)}\right]^{-1}. \tag{16}$$

On obtient

$$f_6(s_1) = e^B - 1, \tag{17}$$

où l'on a noté

$$B = \ln \frac{n+2}{n^2} + \theta \ln (n-1) - [\theta \ln \theta + (1-\theta) \ln (1-\theta)] \tag{18}$$

et

$$\theta = \left[\ln \frac{n+2}{n+1}\right]\left[\ln \frac{n(n-1)(n+2)}{(n+1)^2(n-2)}\right]^{-1}. \tag{19}$$

Si l'on fait dans (16) la substitution $n = \frac{1}{u}$, on obtient $s_1 = \frac{1}{u} \ln 2 + a_0 + a_1 u + \ldots$, d'où il résulte que

$$\lim_{n\to\infty} s_1 = \infty. \tag{20}$$

Nous allons montrer que la racine s_1 est positive. Ceci revient à l'inégalité $f_7(n) = \ln \frac{n(n-1)}{(n+1)(n-2)} - \frac{1}{n-1} \ln \frac{n+2}{n+1} > 0$. Pour démontrer cette inégalité, on tient compte que

$$f_8(n) = (n-1)^2 f_7'(n) = \ln \frac{n+2}{n+1} - \frac{(n-1)(3n^2+8n-4)}{n(n+1)(n-2)(n+2)},$$

$$f_8'(n) = \frac{2n^6 + 11n^5 - 13n^4 + 12n^3 + 72n^2 - 32n - 16}{n^2(n+1)^2(n-2)^2(n+2)^2} > 0$$

pour $n \geqq 3$; il en résulte les inégalités

$$f_8(n) < \lim_{n\to\infty} f_8(n) = 0,\ f_7'(n) < 0,\ f_7(n) > \lim_{n\to\infty} f_7(n) = 0,$$

dont la dernière démontre la positivité de la racine s_1.

On peut donc construire le tableau 2 de la variation de la fonction $f_6(s)$ dans l'intervalle $[0, \infty)$, duquel on déduit que le minimum de cette fonction dans l'intervalle $[0, \infty)$ est atteint pour la valeur s_1 de la variable s.

s	0	s_1	∞
$f_6'(s)$	$-$	0	$+$
$f_6(s)$	$\frac{2}{n}$ $\searrow$	$f_6(s_1)$	$\nearrow$ ∞

Tableau 2

Pour démontrer que la fonction $f_6(s)$ est positive dans cet intervalle, il suffira donc de démontrer que ce minimum est positif. À cet effet nous allons démontrer que le nombre B qui intervient dans l'expression (17) du minimum en question est positif; il en résultera la positivité de ce minimum.

Pour cela, nous remarquerons d'abord que si $n \geqq 3$, il résulte de (19) que $0 < \theta < 1$. Nous allons démontrer d'ailleurs que dans la même hypothèse il existe la délimitation plus précise: $1 - \frac{3}{n} < \theta < 1$. À cet effet, nous considérons la fonction auxiliaire

$$f_9(n) = n\left[\theta - \left(1 - \frac{3}{n}\right)\right] \ln \frac{n(n-1)(n+2)}{(n+1)^2 (n-2)},$$

qu'on peut écrire, en tenant compte de (19)

$$f_9(n) = 3 \ln \frac{n(n-1)(n+2)}{(n+1)^2 (n-2)} - n \ln \frac{n(n-1)}{(n+1)(n-2)}.$$

On obtient

$$f_9'(n) = \frac{n^3 + 3n^2 - 28n + 12}{n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)} - \ln \frac{n(n-1)}{(n+1)(n-2)},$$

$$f_9''(n) = \frac{2n^7 - 3n^6 + 88n^5 - 75n^4 - 236n^3 + 216n^2 - 16n - 48}{n^2(n-1)^2 (n+1)^2 (n-2)^2 (n+2)^2} > 0.$$

On en déduit successivement pour $n \geqq 3$ les inégalités:

$$f_9'(n) < \lim_{n\to\infty} f_9'(n) = 0, \qquad f_9(n) > \lim_{n\to\infty} f_9(n) = 0,$$

dont la dernière démontre que $\theta > 1 - \frac{3}{n}$.

Nous allons considérer dans l'expression (18) de B, le nombre n fixe et θ comme une variable indépendante qui parcourt l'intervalle $\left[1 - \frac{3}{n}, 1\right]$.

θ	$1-\frac{3}{n}$		$1-\frac{1}{n}$		1
$B'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$B(\theta)$	$B\left(1-\frac{3}{n}\right)$	$\nearrow$	$B\left(1-\frac{1}{n}\right)$	$\searrow$	$\ln\left(1+\frac{n-2}{n^2}\right) > 0$

Tableau 3

En notant $B = B(\theta)$, on obtient de (18) $B'(\theta) = \ln\left[(n-1)\frac{1-\theta}{\theta}\right]$. On peut donc construire le tableau 3 de la variation de la fonction $B(\theta)$ dans l'intervalle considéré.

Nous allons démontrer que $B\left(1 - \frac{3}{n}\right) > 0$; en tenant compte du tableau 3, il en résultera la positivité de la fonction $B(\theta)$ dans l'intervalle $1 - \frac{3}{n} \leqq$

$\leqq \theta \leqq 1$, par conséquent la positivité du nombre B donné par (18), où θ a l'expression (19). À cet effet, on déduit de (18)

$$f_{10}(n) = B\left(1 - \frac{3}{n}\right) = \ln \frac{(n-1)(n+2)}{n(n-3)} + \frac{3}{n} \ln \frac{n-3}{3(n-1)}$$

de sorte que

$$f_{11}(n) = -\frac{n^2}{3} f_{10}'(n) = \frac{2n(2n+1)}{3(n-1)(n+2)} + \ln \frac{n-3}{3(n-1)},$$

$$f_{11}'(n) = 4 \frac{2n^3 - n^2 + 11n - 3}{3(n-3)(n-1)^2(n+2)^2}.$$

On en déduit que pour $n > 3$ on a $f_{11}'(n) > 0$. On peut donc construire le tableau 4 de la variation de la fonction $f_{10}(n)$ dans l'intervalle $[3, \infty)$.

n	3		6	n_1	7		n_2			∞
$f_{11}(n)$	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$		$\frac{4}{3} - \ln 3 > 0$
$f_{10}'(n)$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	
$f_{10}(n)$	$-\ln\frac{9}{5}$		$\nearrow$	0		$\nearrow$	$f_{10}(n_2)$		$\searrow$	0

Tableau 4

Étant donné que $f_{10}(6) = \ln \frac{20}{9\sqrt{5}} < 0$ et $f_{10}(7) = \ln \frac{27}{14}\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{3}{7}} =$
$= \frac{1}{7} \ln \frac{14348907}{13176688} > 0$, il s'ensuit que le nombre n_1 qui figure au tableau
4 vérifie les inégalités $6 < n_1 < 7$. On en déduit à l'aide de ce tableau que
pour $n \geqq 7$ on a $B\left(1 - \frac{3}{n}\right) > 0$, ce qui, joint à la relation $\theta > 1 - \frac{3}{n}$
établie antérieurement, démontre que pour $n \geqq 7$ le nombre B de (18) est
positif. Il en résulte, en vertu de la relation (17) et du tableau 2, que la
fonction $f_6(s)$ et par conséquent $F(n-1)$ de (15) sont positives pour $n \geqq 7$,
ce qui, conformément à une remarque antérieure, démontre que $G_{p,q,r}(i) > 0$.
Le lemme est ainsi démontré pour $n \geqq 7$. La vérification pour les valeurs
3, 4, 5, 6, de n peut se faire facilement comme suit:

Attendu que dans l'expression (16) de $s_1(n)$ figurent uniquement des
quotients de logarithmes, sa valeur ne change pas si l'on remplace les
logarithmes naturels par des logarithmes décimaux. Si on fait cette sub-
stitution et on augmente, respectivement on diminue les logarithmes déci-
maux qui interviennent dans les expressions de $s_1(n)$ $(n = 3, 4, 5, 6)$ d'une

unité de l'ordre de la dernière décimale considérée, afin d'augmenter les valeurs de ces expressions, on obtient de (16):

$$s_1(3) = \left(\log \frac{2 \log \frac{2}{3}}{\log \frac{5}{4}}\right)\left(\log \frac{15}{8}\right)^{-1} < \frac{\log 2 + \log 2}{0{,}27298} < 3,$$

$$s_1(4) = \frac{\log 3}{2 \log \frac{6}{5}} < \frac{0{,}47713}{0{,}15834} < 4,$$

$$s_1(5) = \left[\log\left(\frac{4 \log \frac{10}{9}}{\log \frac{7}{6}}\right)\right]\left[\log \frac{35}{27}\right]^{-1} < \frac{\log 4 + \log 7 - 1}{0{,}11269} < 4,$$

$$s_1(6) = \left[\log\left(\frac{5 \log \frac{15}{14}}{\log \frac{8}{7}}\right)\right]\left[\log \frac{60}{49}\right]^{-1} < \frac{\log 5 + \log 6 - 1}{0{,}08794} < 6,$$

et de (15)

$$F(n-1)\Big|_{\substack{n=3\\ s=3}} > \frac{5}{9}\left(\frac{16}{17} + \frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{79}{486},$$

$$F(n-1)\Big|_{\substack{n=4\\ s=3}} > \frac{3}{8}\left(\frac{125}{72} + 1\right) - 1 = \frac{5}{192}; \quad F(n-1)\Big|_{\substack{n=4\\ s=4}} > \frac{3}{8}\left(\frac{625}{432} + \frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{363}{3456};$$

$$F(n-1)\Big|_{\substack{n=5\\ s=3}} > \frac{7}{25}\left(\frac{729}{250} + 1\right) - 1 = \frac{603}{6250}; \quad F(n-1)\Big|_{\substack{n=5\\ s=4}} > \frac{7}{25}\left(\frac{6561}{2500} + \frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{9677}{62500};$$

$$F(n-1)\Big|_{\substack{n=6\\ s=3}} > \frac{2}{9}\left(\frac{2744}{675} + 1\right) - 1 = \frac{763}{6075}; \quad F(n-1)\Big|_{\substack{n=6\\ s=4}} > \frac{2}{9}\left(\frac{38416}{10125} + \frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{16082}{91125};$$

$$F(n-1)\Big|_{\substack{n=6\\ s=5}} > \frac{2}{9}\left(\frac{537824}{151875} + \frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{164398}{1366875};$$

$$F(n-1)\Big|_{\substack{n=6\\ s=6}} > \frac{2}{9}\left(\frac{7529536}{2278125} + \frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{1390322}{20503125}.$$

En tenant compte de ces inégalités, ainsi que du fait que $f_6(s) > 0$ pour $s \geq \sigma > s_1$ si $f_6(\sigma) > 0$ (ainsi qu'on peut le constater par une simple inspection du tableau 2), il résulte que l'inégalité $F(n-1) > 0$ se maintient également pour $n = 3, 4, 5, 6$, ce qui complète la démonstration du lemme.

Démonstration du théorème (*). On déduit de la relation (9) et du lemme précédemment établi, les inégalités $\delta_i^{(n)}[x^k] \geq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Pour démontrer le theorème (*) il faut établir que les inégalités en question sont strictes, et que, de plus, on a $\delta_n^{(n)}[x^k] > 0$.

À cet effet, nous supposerons d'abord $0 \leq i \leq n-1$. Si $k = 2$, alors dans la relation (9) on a $p = q = r = 0$, donc $G_{0,0,0}(i) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} > 0$, de sorte que $\delta_i^{(n)}[x^2] > 0$ et si $k > 2$, alors conformément au lemme on a $G_{p,q,r}(i) > 0$ pour $i > 0$ et $G_{0,q,r}(i) > 0$ pour $i = 0$. Ainsi donc, les termes de la somme de (9) sont non-négatifs et parmi eux il existe des termes positifs, de sorte que pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$ on a $\delta_i^{(n)}[x^k] > 0$. Pour $i = n$, on déduit de (7) la relation

$$\delta_n^{(n)}[x^k] = \lambda_{n+1}^{(n+1)}[x^k] - \lambda_n^{(n)}[x^k]. \tag{21}$$

Mais, ainsi qu'il a été démontré dans [1]

$$\lambda_i^{(n)}[f] = C_n^i\left[\frac{n+1}{n-i+1} f\left(\frac{i}{n+1}\right) - \frac{i}{n-i+1} f\left(\frac{i-1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right]. \tag{22}$$

L'expression (21) devient alors

$$\delta_n^{(n)}[x^k] = (n+2)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^k - 2(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^k + n\left(\frac{n-1}{n}\right)^k = \tag{23}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)(n+2)}[x_1, x_2, x_3; x^k] > 0,$$

ainsi qu'il résulte de (8) si l'on y fait $x_1 = \frac{n-1}{n}$, $x_2 = \frac{n}{n+1}$, $x_3 = \frac{n+1}{n+2}$.

Le théorème (*) est par suite démontré.

Remarques. 1. La relation (20) affirme qu'on ne peut indiquer un nombre entier S, indépendent de n, tel que l'inégalité $s_1 < S$ soit vérifiée pour chaque valeur de n, en d'autres termes, tel que dans le tableau 2 la fonction $f_6(s)$ croisse avec s quand $s \geq S$. De l'hypothèse de l'existence d'un tel nombre et de l'hypothèse qu'on pourrait le prendre assez grand pour qu'on ait $f_6(S) > 0$ pour chaque valeur de n, il résulterait que $f_6(s) > 0$ pour $s \geq S$

et pour chaque valeur de n. En ce cas, la relation $F(i) > 0$, $F(i)$ étant la fonction donnée par la formule (14), resterait à vérifier pour les seules valeurs $s = 0, 1, \ldots, S-1$ de s et pour $n = 1, 2, \ldots$.

2. La relation (11) n'est plus vérifiée en général pour $i = n$, attendu que pour p et r suffisamment grands on déduit de (10) l'inégalité

$$n\left(\frac{n}{n-1}\right)^{p}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{r} G_{p,q,r}(n) = 1 - \frac{n}{n+2}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{p}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{r} < 0.$$

Pour démontrer que $\delta_n^{(n)}[x^k] > 0$, on ne peut donc plus se servir de l'expression (9) de $\delta_n^{(n)}[x^k]$; on a utilisé à cet effet son expression donnée par la formule (7).

3. Il semblerait naturel d'utiliser directement pour la démonstration du théorème (*) la relation (3). On en déduirait, à la place de la relation (6) la suivante:

$$\Delta_2 B_n(x;f) = \sum_{i=1}^{n}\{\lambda_i^{(n+1)}[f](1-x) - \lambda_i^{(n)}[f]\}\, x^i(1-x)^{n-i+1} + \lambda_{n+1}^{(n+1)}[f]\, x^{n+1}(1-x).$$

Il en résulterait

$$R(x) = \frac{\Delta_2 B_n(x;f)}{x^{n+1}(1-x)} = \lambda_{n+1}^{(n+1)}[f] + \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{n}\{\lambda_i^{(n+1)}[f](1-x) - \lambda_i^{(n)}[f]\}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{n-i},$$

par conséquent

$$R'(x) = \frac{1}{x^3}\sum_{i=1}^{n} P_i(x)\left(\frac{1-x}{x}\right)^{n-i-1}, \tag{24}$$

$$P_i(x) = (n-i+1)\{\lambda_i^{(n)}[f] - \lambda_i^{(n+1)}[f]\} - x\{\lambda_i^{(n)}[f] - (n-i+1)\lambda_i^{(n+1)}[f]\}. \tag{25}$$

On en déduirait

$$\operatorname{sgn} P_i(0) = \operatorname{sgn}\{\lambda_i^{(n)}[f] - \lambda_i^{(n+1)}[f]\}$$

et $P_i(1) = (n-i)\,\lambda_i^{(n)}[f] < 0$ pour $f(x) = x^k$, ainsi qu'il résulte des formules (4) et (8). Si donc l'inégalité $\lambda_i^{(n)}[x^k] - \lambda_i^{(n+1)}[x^k] < 0$, était vérifiée pour $i = 1, 2, \ldots, n$, on en déduirait pour $0 < x \leq 1$ l'inégalité $P_i(x) < 0$, par conséquent $R'(x) < 0$. Il en résulterait

$$R(x) \geqq R(1) = \lambda_{n+1}^{(n+1)}[x^k] - \lambda_n^{(n)}[x^k] = \delta_n^{(n)}[x^k].$$

En vertu de l'inégalité (23), il en résulterait $R(x) > 0$, ce qui démontrerait le théorème.

Cependant, l'inégalité $\lambda_i^{(n)}[x^k] - \lambda_i^{(n+1)}[x^k] < 0$ n'est pas toujours vérifiée. On déduit en effet de (22)

$$f_{12}(i) = \frac{\lambda_i^{(n)}[x^k] - \lambda_i^{(n+1)}[x^k]}{C_n^{i-1}} = \frac{n+1}{n-i+2}\left(\frac{i-1}{n+2}\right)^{k} - \frac{n+1}{n-i+2}\left(\frac{i}{n+2}\right)^{k-1} + 2\left(\frac{i}{n+1}\right)^{k-1} - \left(\frac{i-1}{n}\right)^{k} - \frac{n-i+1}{i}\left(\frac{i}{n}\right)^{k}. \tag{26}$$

Si dans cette relation on fait par exemple $i = n-1$, on obtient

$$f_{13}(n) = f_{17}(n-1) = 2\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{k-1} + \frac{n+1}{3}\left[\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{k} - \left(\frac{n-1}{2}\right)^{k-1}\right] - \frac{2}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k} - \left(\frac{n-2}{n}\right)^{k} = \frac{C_k^2}{n^2} + \frac{b_3}{n^3} + \ldots, \tag{27}$$

d'où il résulte que pour $n \geq N = N(k)$ on a $f_{13}(n) > 0$; dans ces conditions, l'inégalité en question n'a donc pas lieu. De même, si l'on fait par exemple dans la formule (27) $n = k-1$, on obtient

$$f_{14}(k) = f_{13}(k-1) = 2\left(1 - \frac{2}{k}\right)^{k-1} - \frac{2}{k-2}\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)^{k} - \left(1 - \frac{2}{k-1}\right)^{k} + \frac{k}{3}\left[\left(1 - \frac{3}{k}\right)^{k} - \left(1 - \frac{3}{k+1}\right)^{k-1}\right],$$

de sorte que $\lim\limits_{k\to\infty} f_{14}(k) = \frac{e-2}{e^3} > 0$; il en résulte, pour k suffisamment grand, les relations $f_{14}(k) = f_{13}(n)|_{n=k-1} = f_{12}(i)|_{i=n-1=k-2} > 0$, par conséquent l'expression $\lambda_{k-2}^{(k-1)}[x^k] - \lambda_{k-2}^{(k)}[x^k]$ est dans ces conditions à nouveau positive. Aux cas où l'expression $\lambda_i^{(n)}[x^k] - \lambda_i^{(n+1)}[x^k]$ est positive, on peut prendre x assez petit pour que l'expression $P_i(x)$ de (25) ait une valeur positive. En ces conditions, le terme respectif de l'expression (24) de $R'(x)$ est également positif. Par conséquent, la simple inspection de l'expression (24) de $R'(x)$ ne permet pas de décider si cette dérivée a toujours une valeur négative. C'est pourquoi on a utilisé dans la démonstration du théorème (*) la forme (6) de l'expression $\Delta_2 B_n(x;f)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aramă O., *Proprietăţi privind monotonia şirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein şi aplicarea lor la studiul aproximării funcţiilor.* Studii şi cercet. de matematică (Cluj), **VIII**, 195–210 (1957).

[2] Арамэ О., *Относительно свойств монотонности последовательности интерполяционных многочленов С. Н. Бернштейна и их применения к исследованию приближения функций.* Mathematica, **2 (25)**, *1*, 25–40 (1960).

[3] Lorentz G. G., *Bernstein Polynomials.* Toronto, 1953.

[4] Schoenberg I. J., *On Variation diminishing Approximation Methods.* On Numerical Approximation. Proceedings of a Symposium, Madison, April 21–23, 1958, pp. 249–274. Publication nr. 1 of the Mathematics Research Center, U. S. Army. The University of Wisconsin Press, Madison, 1959.

[5] Widder D. V., *Laplace Transformation.*

Reçu le 10. I. 1961.

MATHEMATICA VOL. 3 (26), 1, 1961, pp. 19 – 38

ÜBER DIE ABWEICHUNGEN ZWISCHEN DEN MIT GERADPROFILIGEN WERKZEUGEN BEARBEITETEN FLANKENPROFILEN VON SCHNECKEN

E. GERGELY, D. MAROS

Eines der wenig bekannten Probleme unserer Maschinenbauindustrie besteht in der Erreichung einer bestimmten Genauigkeit bei der Bearbeitung der Schnecken. Hierher gehören diejenigen Abweichungen, die bei der Herstellung von Schnecken entstehen, falls diese mit geradprofiligen Werkbeugen verschiedener Konstruktion bearbeitet werden.

Zur Einleitung diene ein Trapezprofil $a\ b\ c$ mit dem Spitzenwinkel 2α und der Symmetrieachse Oz normal zur Oy Achse des Teilzylinders der Schnecke (Abb1). Die Profilebene unterschneidet orthogonal die mittlere Teilschneckenlinie E_m in demjenigen Punkt, in welchem die Achse Oz den Zylinder durchdringt.

Die durch den Durchdringungspunkt S_c senkrecht auf die Oz Achse gehende Gerade gibt den Flankenabstand der Profile $a\ d$ und $b\ c$ an, welcher mit s_c notiert wird. Die Schneckenlinie E_m hat die gegebene Neigung δ gegenüber der Oy Achse.

Falls nun das Profil $a\ b\ c\ d$ die Schneidkante eines Drehmeissels darstellt und dieser eine vom Parameter h bestimmte relative Schraubbewegung ausführt, enstehen bei einer Bearbeitung durch Drehen konvolute Regelflächen.

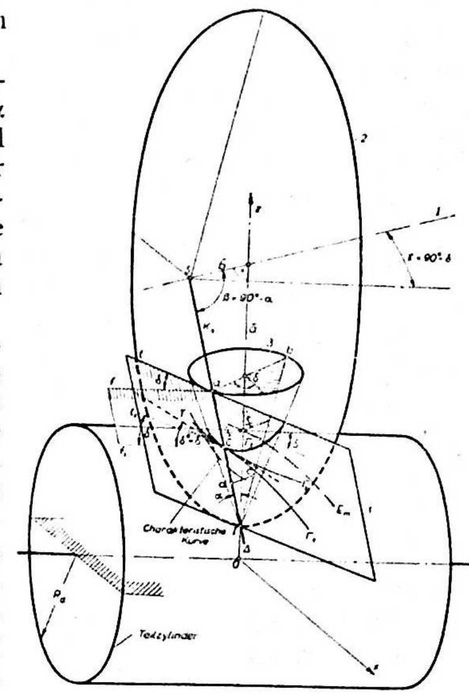

Abb. 1