MATHEMATICA VOL. 3 (26), 2, 1961, pp. 197 – 216

# SUR UN THÉORÈME DE W. A. MARKOV

par

OLEG ARAMĂ

à Cluj

**1.** On connaît le théorème suivant établi par W. A. MARKOV [6].

*Si les racines des deux polynomes du même degré, $P(x)$ et $Q(x)$ sont toutes réelles et se séparent, alors les racines de leurs dérivées se séparent aussi.*

La démonstration donnée par W. A. Markov utilise le polynome d'interpolation de Lagrange et une célèbre inégalité établie par A. A. Markov.

On a écrit plusieurs travaux concernant ce théorème.

Nous citons ainsi les résultats de P. MONTEL [8], obtenus à l'occasion de l'étude des propriétés des fonctions de la forme $\frac{P(z)}{Q(z)}$ où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynomes d'une variable complexe $z$, dont les racines sont situées sur une courbe $(C)$ et se séparent sur cette courbe.

Dans un récent travail [10], T. POPOVICIU obtient une généralisation du théorème de W. A. Markov, en utilisant la propriété qui exprime que les racines de la dérivee d'un polynome ayant toutes les racines réelles et distinctes, sont des fonctions croissantes par rapport aux racines du polynome considéré. À cette occasion, T. Popoviciu obtient dans le travail cité de nouveaux théorèmes du type W. A. Markov.

D'autres démonstrations du théorème de W. A. Markov ont été données par F. CONSTANTINESCU dans les travaux [3, 4]. Le premier de ces travaux donne une nouvelle démonstration du théorème du W. A. Markov, en employant le théorème de Sturm, concernant la séparation des racines des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre.

Nous citons aussi les résultats obtenus par I. RUSU [11], concernant l'extension du théorème de W. A. Markov aux polynomes généralisés, qui s'obtiennent au moyen de combinaisons linéaires à coefficients constants d'un système de fonctions formant un système Tchebycheff. I. Rusu établit dans le travail cité une telle extension, dans l'hypothèse supplémentaire que l'espace vectoriel des polynomes considérés se transforme en lui-même si on applique une translation à la variable indépendante. Comme application, on étudie le cas des polynomes trigonométriques.

Nous citerons enfin la remarquable généralisation du théorème de W. A. Markov, obtenue par ELENA MOLDOVAN [7], à l'occasion des recherches concernant la notion de fonction convexe. On obtient cette généralisation en remplaçant l'ensemble des polynomes de degré au plus $n$, par un autre ensemble de fonctions, non forcément linéaire, ayant des propriétés d'interpolation analogues à celles des polynomes. Le théorème obtenu par Elena Moldovan, contient en particulier la majorité des théorèmes de type W. A. Markov connus et en même temps il fournit de nouveaux théorèmes de ce type pour les solutions des équations différentielles. Ainsi, dans le cas particulier des équations différentielles linéaires et homogènes du $n^{\text{ème}}$ ordre, en employant quelques résultats supplémentaires [2], on peut obtenir le théorème 1 énoncé dans le présent travail.

Nous donnons ici une autre démonstration du théorème 1, propre au cas particulier des équations différentielles linéaires d'ordre $n$. À cette occasion, nous obtenons aussi quelques compléments du théorème 1, en démontrant les théorèmes 2 et 3 du présent travail.

**2.** Nous commencerons par donner quelques définitions et résultats préliminaires, dont nous nous servirons dans cette exposition.

Soit une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre $n$

$$(1)\qquad L_n[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\, y = 0 \quad (n > 2),$$

ayant les coefficients continus dans un intervalle $[a, b)$ et soit $\mathcal{Y}_n$ l'ensemble des solutions de cette équation dans l'intervalle considéré.

Définition 1. *Nous dirons que les solutions de l'équation* (1) *sont non-oscillatoires* **au sens large** *dans l'intervalle* $[a, b)$, *respectivement dans* $(a, b)$, *si toute solution* $y(x) \in \mathcal{Y}_n$, *ne s'annulant pas identiquement dans l'intervalle* $(a, b)$, *ne peut avoir plus de* $n-1$ *racines distinctes dans l'intervalle* $[a, b)$, *respectivement* $(a, b)$.

En utilisant les mêmes notations que dans notre travail [2], nous noterons dans ce qui suit cette propriété de l'ensemble $\mathcal{Y}_n$ par le symbole $I_n[a, b)$, respectivement $I_n(a, b)$.

Définition 2. *Nous dirons que les solutions de l'équation* (1) *sont non oscillatoires* **au sens strict** *dans l'intervalle* $[a, b)$, *respectivement dans* $(a, b)$, *si pour toute solution* $y(x) \in \mathcal{Y}_n$ *ne s'annulant pas identiquement dans l'intervalle considéré, si l'on désigne par* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *ses racines distinctes dans l'intervalle* $[a, b)$, *respectivement* $(a, b)$, *et par* $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *leurs ordres de multiplicité, a lieu l'inégalité* $p_1 + p_2 + \cdots + p_m \leq n-1$.



*Nous noterons cette propriété de l'ensemble* $\mathcal{Y}_n$ *par le symbole* $I_n^*[a, b)$, *respectivement* $I_n^*(a, b)$.

On sait que la propriété de non-oscillation de l'ensemble $\mathcal{Y}_n$, exprimée dans la définition 2 est équivalente à la propriété suivante d'interpolation de l'ensemble $\mathcal{Y}_n$:

*Quels que soient les noeuds* $x_1, x_2, \ldots x_m$ *situés dans l'intervalle* $[a, b)$, *respectivement* $(a, b)$ $(m \leq n)$ *et quels que soient les systèmes de nombres* $\{y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, \ldots, y_i^{(p_i-1)}\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *où* $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *sont des nombres naturels satisfaisant à la condition* $p_1 + p_2 + \cdots + p_m = n$, *l'équation* (1) *admet une solution* $y(x)$, *unique pour le choix fait, satisfaisant aux conditions*

$$(2)\qquad y(x_i) = y_i^{(0)},\ y'(x_i) = y_i^{(1)}, \ldots, y^{(p_i-1)}(x_i) = y_i^{(p_i-1)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Dans ce qui suit nous nous servirons aussi des quatre théorèmes suivants, les deux premiers étant établis dans le travail [2], et les deux derniers appartenant à G. PÓLYA [9][1].

THÉORÈME (*). *Si l'ensemble* $\mathcal{Y}_n$ *des solutions de l'équation* (1) *possède la propriété* $I_n(a, b)$, *alors cet ensemble possède aussi la propriété* $I_n^*(a, b)$.

THÉORÈME (**). *Si les coefficients de l'équation* (1) *sont continus dans l'intervalle* $[a, b)$, *alors de la propriété* $I_n^*(a, b)$ *de l'ensemble* $\mathcal{Y}_n$, *il résulte la propriété* $I_n^*[a, b)$.

THÉORÈME (***). *Si l'ensemble* $\mathcal{Y}_n$ *possède la propriété* $I_n^*[a, b)$, *alors l'équation* (1) *admet au moins un système de* $n-1$ *solutions* $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ *satisfaisant dans l'intervalle ouvert* $(a, b)$ *aux relations*

$$(3)\qquad h_1(x) \neq 0,\ W[h_1(x), h_2(x)] \neq 0, \ldots, W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)] \neq 0.$$

Ici nous avons noté par $W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_i(x)]$ le wronskien des fonctions $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_i(x)$. *Un tel système est donné par exemple par un système de solutions de l'équation* (1), *satisfaisant aux conditions*

$$(4)\qquad \begin{aligned} &h_1(a) = h_1'(a) = \cdots\cdots = h_1^{(n-2)}(a) = 0,\ h_1^{(n-1)}(a) = 1, \\ &h_2(a) = h_2'(a) = \cdots = h_2^{(n-3)}(a) = 0,\ h_2^{(n-2)}(a) = 1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &h_{n-1}(a) = 0,\ h_{n-1}'(a) = 1. \end{aligned}$$

[1]) Voir aussi le mémoire de G. Mammana [5].

THÉORÈME (****). *Si l'équation* (1) *ayant les coefficients continus dans un intervall* $(a, b)$, *admet un système de* $n-1$ *solutions* $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ *satisfaisant dans l'intervalle* $(a, b)$ *aux relations* (3), *alors l'ensemble* $\mathcal{Y}_n$ *de ses solutions possède aussi la propriété* $I_n^*(a\ b)$.

Enfin, nous démontrerons le lemme suivant, dont nous nous servirons dans cette exposition.

Lemme 1. *Soient* $m$ *fonctions* $h_1(x), \ldots, h_m(x)$ $(m \geq 2)$ *de classe* $C^{m-1}(a, b)$ *et satisfaisant dans l'intervalle* $(a, b)$ *aux relations*

$$(5)\quad h_1(x) \neq 0,\ W[h_1(x), h_2(x)] \neq 0, \ldots, W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_m(x)] \neq 0,\ x \in (a, b).$$

*Soit* $k$ *un nombre naturel, satisfaisant à l'inégalité* $k \leq m-1$. *Alors les fonctions*

$$(6)\quad H_i(x) = W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), h_{k+i}(x)] \quad (i = 1, 2, \ldots, m-k),$$

*satisfont dans l'intervalle* $(a, b)$ *aux relations*

$$(7)\quad H_1(x) \neq 0,\ W[H_1(x), H_2(x)] \neq 0, \ldots, W[H_1(x), H_2(x), \ldots, H_{m-k}(x)] \neq 0.$$

Nous faisons la démonstration de ce lemme par induction relativement au nombre $k$. Ainsi, pour $k = 1$, l'affirmation du lemme résulte de l'identité suivante (voir le travail [9])

$$W\left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)', \left(\frac{h_3}{h_1}\right)', \ldots, \left(\frac{h_m}{h_1}\right)'\right] \equiv \frac{1}{h_1^m} W(h_1, h_2, \ldots, h_m),\ x \in (a, b),$$

valable dans l'hypothèse que les fonctions $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_m(x)$ appartiennent à la classe $C^{m-1}(a, b)$ et que $h_1(x) \neq 0$ dans l'intervalle $(a, b)$. Ces conditions sont assurées par les hypothèses du lemme. De cette identité résulte aussitôt l'identité

$$(8)\quad W[W(h_1, h_2), W(h_1, h_3), \ldots, W(h_1, h_m)] \equiv h_1^{m-2}\, W(h_1, h_2, \ldots, h_m).$$

Ensuite, en notant

$$H_1^{(1)}(x) = W[h_1(x), h_2(x)], \ldots, H_{m-1}^{(1)}(x) = W[h_1(x), h_m(x)]$$

et tenant compte que par hypothèse, $H_1^{(1)}(x) \neq 0$ pour $x \in (a, b)$, on peut appliquer de nouveau l'identité (8) aux fonctions $H_1^{(1)}(x), \ldots, H_{m-1}^{(1)}(x)$. On obtient ainsi

$$(9)\quad W[W(H_1^{(1)}, H_2^{(1)}), W(H_1^{(1)}, H_3^{(1)}), \ldots, W(H_1^{(1)}, H_{m-1}^{(1)})] \equiv$$
$$\equiv (H_1^{(1)})^{m-3}\, W(H_1^{(1)}, H_2^{(1)}, \ldots, H_{m-1}^{(1)}).$$



En tenant compte de l'identité (8) où on considère $m = 3$, on obtient

$$(10)\quad W(H_1^{(1)}, H_i^{(1)}) = h_1\, W(h_1, h_2, h_{i+1}) \quad (i = 2, 3, \ldots, m-1).$$

En tenant compte aussi de l'identité (8), le deuxième membre de l'identité (9) est égal à $h_1^{m-2}\, W^{m-3}(h_1, h_2)\, W(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ et ainsi l'identité (9) devient

$$(11)\quad W[h_1\, W(h_1, h_2, h_3),\ h_1\, W(h_1, h_2, h_4), \ldots,\ h_1\, W(h_1, h_2, h_m)] \equiv$$
$$\equiv h_1^{m-2}\, W^{m-3}(h_1, h_2)\, W(h_1, h_2, \ldots, h_m).$$

On vérifie facilement que si les fonctions $u(x)$ et $f_1(x), \ldots, f_\nu(x)$ appartiennent à la classe $C^{\nu-1}(a, b)$, alors on a l'identité

$$(12)\quad W(uf_1, uf_2, \ldots, uf_\nu) \equiv u^\nu\, W(f_1, f_2, \ldots, f_\nu).$$

En tenant compte de (12), on peut écrire l'identité (11) sous la forme

$$(13)\quad W[W(h_1, h_2, h_3), W(h_1, h_2, h_4), \ldots, W(h_1, h_2, h_m)] \equiv$$
$$\equiv W^{m-3}(h_1, h_2)\, W(h_1, h_2, \ldots, h_m).$$

Ensuite, en notant

$$H_1^{(2)}(x) = W[h_1(x), h_2(x), h_3(x)], \ldots, H_{m-2}^{(2)}(x) = W[h_1(x), h_2(x), h_m(x)]$$

et en utilisant successivement les identités (8) et (13), on obtient

$$(14)\quad W[W(H_1^{(2)}, H_2^{(2)}), W(H_1^{(2)}, H_3^{(2)}), \ldots, W(H_1^{(2)}, H_{m-2}^{(2)})] \equiv$$
$$\equiv (H_1^{(2)})^{m-4}\, W(H_1^{(2)}, H_2^{(2)}, \ldots, H_{m-2}^{(2)}) \equiv W^{m-3}(h_1, h_2)\, W^{m-4}(h_1, h_2, h_3) \times$$
$$\times W(h_1, h_2, \ldots, h_m).$$

Mais, de l'identité (13), où on considère $m = 4$, on obtient

$$W(H_1^{(2)}, H_i^{(2)}) \equiv W(h_1, h_2)\, W(h_1, h_2, h_3, h_{2+i}) \quad (i = 2, 3, \ldots, m-2)$$

et en tenant compte de (12), on peut écrire l'identité (14) sous la forme

$$W[W(h_1, h_2, h_3, h_4), W(h_1, h_2, h_3, h_5), \ldots, W(h_1, h_2, h_3, h_m)] \equiv$$
$$\equiv W^{m-4}(h_1, h_2, h_3)\, W(h_1, h_2, \ldots, h_m),$$

c'est-à-dire, sous la forme

$$W(H_1^{(3)}, H_2^{(3)}, \ldots, H_{m-3}^{(3)}) \equiv W^{m-4}(h_1, h_2, h_3)\, W(h_1, h_2, \ldots, h_m),$$

où on a noté $H_i^{(3)}(x) \equiv W[h_1(x), h_2(x), h_3(x), h_{3+i}(x)]$ $(i = 1, 2, \ldots, m-3)$.

Par répétition du procédé on obtient l'identité suivante, établie par LIA ARAMĂ dans le travail [1] :

$$(15)\quad W(H_1^{(k)}, H_2^{(k)}, \ldots, H_{m-k}^{(k)}) \equiv W^{m-k-1}(h_1, h_2, \ldots, h_k)\, W(h_1, h_2, \ldots, h_m),$$

où on a noté

$$H_i^{(k)}(x) \equiv W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), h_{k+i}(x)] \quad (i = 1, 2, \ldots, m-k).$$

Ici on a supposé évidemment $1 \leq k \leq m-1$ (voir l'énoncé du lemme).

De cette identité il résulte aussitôt le lemme.

O b s e r v a t i o n. Ainsi qu'on l'a démontré dans le travail antérieurement cité [1], l'identité (15) est valable aussi dans le cas où les relations (3) ne sont pas vérifiées. Cette affirmation résulte de la propriété de continuité des fonctions qui interviennent dans l'identité (15).

**3.** Dans ce qui va suivre, nous supposerons que $n \geqq 3$ et nous tiendrons compte de l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE. *L'ensemble $\mathcal{Y}_n$ des solutions de l'équation* (1) *possède la propriété $I_n(a, b)$.*

Alors du théorème (*) il résulte que l'ensemble $\mathcal{Y}_n$ possède la propriété $I_n^*(a, b)$, et du théorème (**) il résulte qu'il possède aussi la propriété $I_n^*[a, b)$ et en conséquence, en vertu du théorème (***), l'équation (1) admettra au moins un système de $n-1$ solutions $h_1(x), \ldots, h_{n-1}(x)$, satisfaisant dans l'intervalle $(a, b)$ aux relations (3). Nous choisissons un de ces systèmes.

Nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME 1. *Dans les hypothèses précédentes, soit $f(x)$ et $g(x)$ deux solutions non triviales de l'équation* (1), *ayant chacune $n-1$ racines distinctes dans l'intervalle $(a, b)$* [2]). *Alors :*

1°. *La fonction $F(x) = W[h_1(x), f(x)]$ possède dans l'intervalle $(a, b)$, $n-2$ racines distinctes. Toutes ces racines sont simples et en conséquence, elles correspondent à des points d'extrêmum de la fonction $\frac{f(x)}{h_1(x)}$ dans l'intervalle $(a, b)$. Des affirmations analogues sont valables aussi pour la fonction $G(x) = W[h_1(x), g(x)]$. Ici $h_1(x)$ représente une solution qui ne s'annule pas dans $(a, b)$, comme par exemple la fonction de Cauchy, associée à l'équation* (1) *et au noeud $x = a$* (c'est-à-dire, la solution de l'équation (1), qui satisfait à la première condition de (4)).

[2]) L'existence de telles solutions résulte de la propriété $I_n^*[a, b)$ de l'ensemble $\mathcal{Y}_n$.



2°. *Si les racines des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ se séparent dans $(a, b)$, alors les racines des fonctions $F(x)$ et $G(x)$ se séparent aussi dans $(a, b)$.*

*Démonstration.* 1°. On observe d'abord que la fonction de Cauchy $h_1(x)$ ne peut pas s'annuler en aucun point de l'intervalle $(a, b)$, ainsi qu'il résulte de l'hypothèse selon laquelle l'ensemble $\mathcal{Y}_n$ possède la propriété $I_n(a, b)$ et des théorèmes (*), (**), (***). Ainsi, les fonctions $F(x)$ et $G(x)$ sont définies et continues dans tout l'intervalle $(a, b)$.

Le fait que les fonctions $F(x)$ et $G(x)$ possèdent dans l'intervalle $(a, b)$ au moins $n-2$ racines distinctes, résulte immédiatement en appliquant le théorème de Rolle aux fonctions $\frac{f(x)}{h_1(x)}$ et $\frac{g(x)}{h_1(x)}$, chacune d'elles possédant par hypothèse $n-1$ racines distinctes dans l'intervalle $(a, b)$.

Montrons maintenant que les fonctions $F(x)$ et $G(x)$ n'ont pas plus de $n-2$ racines dans l'intervalle $(a, b)$. En effet, en effectuant dans l'équation (1) le changement de fonction $y = h_1(x)\, z(x)$, on obtient

$$(16)\quad L_n[y] \equiv h_1(x)\, [z^{(n)} + q_1(x)\, z^{(n-1)} + \ldots + q_{n-1}(x)\, z' + q_n(x)\, z],$$

où $q_1(x), \ldots, q_{n-1}(x)$ sont des fonctions continues dans $(a, b)$ et $q_n(x) \equiv L_n[h_1(x)] \equiv 0$ dans $(a, b)$. En notant $z' = v$, on obtient de (16)

$$(17)\quad L_n[y] \equiv h_1(x)\, [v^{(n-1)} + q_1(x)\, v^{(n-2)} + \ldots + q_{n-1}(x)\, v].$$

En effectuant enfin le changement de variable $v = \frac{1}{h_1^2(x)} Y$, on obtient de (17)

$$(18)\quad L_n[y] \equiv \frac{1}{h_1(x)}\, [Y^{(n-1)} + P_1(x)\, Y^{(n-2)} + \ldots + P_{n-1}(x)\, Y] \equiv \frac{1}{h_1(x)}\, L_{n-1}[Y].$$

La relation entre les variables $y$ et $Y$ est la suivante :

$$(19)\quad Y = W(h_1, y).$$

Considérons l'équation différentielle

$$(20)\quad L_{n-1}[Y] = Y^{(n-1)} + P_1(x)\, Y^{(n-2)} + \ldots + P_{n-1}(x)\, Y = 0.$$

En tenant compte de (19), on constate que l'équation (20) admet comme solutions les fonctions

$$(21)\quad H_1(x) = W[h_1(x), h_2(x)],\ H_2(x) = W[h_1(x), h_3(x)],\ \ldots,\ H_{n-2}(x) = W[h_1(x), h_{n-1}(x)].$$

Des relations (3), supposées vraies par hypothèse, en tenant compte de l'identité (8) où on fait successivement $m = 2, 3, \ldots, n-1$, il résulte que les solutions $H_i(x)$ satisfont dans l'intervalle $(a, b)$ aux relations

$$(22)\quad H_1(x) \neq 0,\ W[H_1(x), H_2(x)] \neq 0,\ \ldots,\ W[H_1(x), H_2(x), \ldots, H_{n-2}(x)] \neq 0.$$

Ainsi, l'équation (20) vérifie dans l'intervalle $(a, b)$ les conditions du théorème (****) et en vertu de ce théorème il résulte que l'ensemble $\mathcal{Y}_{n-1}$ des solutions de l'équation (20) possède la propriété $I^*_{n-1}(a, b)$, ce qui signifie que chaque solution non identiquement nulle de l'équation (20) ne peut pas avoir plus de $n-2$ racines dans $(a, b)$, chacune de ces racines étant comptée autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité. Mais les fonctions $F(x) = W[h_1(x), f(x)]$ et $G(x) = W[h_1(x), g(x)]$ sont aussi des solutions de l'équation (20). Ces solutions ne peuvent pas s'annuler identiquement dans $(a, b)$, parceque si par exemple l'on avait $F(x) \equiv 0$, il en résulterait l'identité $h_1(x) \equiv C f(x)$, où $C$ représente une constante. Mais par hypothèse, $f(x)$ s'annule en $n-1$ points distincts de l'intervalle $(a, b)$ (on a $n-1 > 1$, parceque dans les hypothèses du théorème on a supposé $n > 2$). De l'identité précédente il résulterait que la fonction $h_1(x)$ s'annule aussi dans l'intervalle $(a, b)$, ce qui contredit la première relation de (3). Donc la solution $F(x)$ ne peut pas s'annuler identiquement dans l'intervalle $(a, b)$. En vertu de la propriété $I^*_{n-1}(a, b)$ de l'ensemble $\mathcal{Y}_{n-1}$ des solutions de l'équation (20), il en résulte que $F(x)$ ne peut pas avoir plus de $n-2$ racines dans l'intervalle $(a, b)$, chacune de ces racines étant comptée autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité. Mais on a démontré antérieurement que $F(x)$ possède au moins, $n-2$ racines distinctes dans l'intervalle $(a, b)$. Il en résulte en définitive que $F(x)$ possède dans l'intervalle $(a, b)$ exactement $n-2$ racines distinctes et que chacune d'entre elles est simple. En tenant compte de l'identité évidente $F(x) \equiv h_1^2(x) \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{h_1(x)}\right]$, il résulte que les racines de la fonction $F(x)$, situées dans l'intervalle $(a, b)$, correspondent à des points d'extrêmum de la fonction $\frac{f(x)}{h_1(x)}$.

On obtient des conclusions analogues aussi pour la fonction $G(x)$.

2°. Nous supposerons maintenant que $n \geq 3$ et que les racines des solutions $f(x)$ et $g(x)$ de l'équation (1) se séparent dans l'intervalle $(a, b)$. Nous montrerons que les racines des fonctions $F(x)$ et $G(x)$ se séparent aussi dans l'intervalle $(a, b)$. Nous donnons la démonstration de ce théorème pour $n \geq 4$. Le cas $n = 3$ sera examiné à la fin. À cet effet nous noterons par $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ les racines de la fonction $f(x)$ et par $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ les racines de la fonction $g(x)$, situées dans l'intervalle $(a, b)$. Vu que par hypothèse ces racines se séparent, il résulte qu'il y aura l'une des sitations suivantes :

$$a \leq r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < \ldots < r_{n-1} < s_{n-1} < b,$$

ou bien

$$a \leq s_1 < r_1 < s_2 < r_2 < \ldots < s_{n-1} < r_{n-1} < b.$$

Nous ferons d'abord quelques observations dont nous nous servirons dans ce qui suit.



$\alpha$). *La fonction $f(x)$ n'a pas dans l'intervalle $[a, b)$ d'autres racines que $r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ et toutes ces racines sont simples. Il en résulte que la fonction $f(x)$ change de signe en chaque point $r_i$. Une conclusion analogue résulte aussi pour la fonction $g(x)$.*

Cette affirmation découle de l'hypothèse que l'ensemble $\mathcal{Y}_n$ des solutions de l'équation (1) possède la propriété $I_n[a, b)$.

$\beta$). *Quels que soient les nombres réels $\lambda$ et $\mu$, tels que $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, la fonction $\varphi(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ ne s'annule pas identiquement dans l'intervalle $(a, b)$ et possède au moins $n-2$ racines distinctes dans cet intervalle.*

En effet, supposons par exemple que $\lambda \neq 0$. Alors, en tenant compte de l'observation $\alpha$) et du fait que les racines $r_i$ et $s_i$ se séparent, il résulte que la suite de nombres :

$$\varphi(s_1) = \lambda f(s_1), \ \varphi(s_2) = \lambda f(s_2), \ \ldots, \ \varphi(s_{n-1}) = \lambda f(s_{n-1})$$

présente $n-2$ variations de signe. Il en résulte que la fonction $\varphi(x)$ possède dans chacun des intervalles $(s_i, s_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$, au moins une racine et donc qu'elle possède au moins $n-2$ racines distinctes dans l'intervalle $(a, b)$.

Si $\mu \neq 0$, alors la fonction $\varphi(x)$ aura au moins une racine dans chacun des intervalles $(r_i, r_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

$\gamma$). *Quelles que soient les constantes réelles $\lambda$ et $\mu$ satisfaisant à la condition $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, la fonction*

$$\Phi(x) = W[h_1(x), \varphi(x)] = W[h_1(x), \lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda F(x) + \mu G(x)$$

*possède dans l'intervalle $(a, b)$ au moins $n-3$ racines distinctes où elle change de signe.*

*Démonstration*. On constate facilement que la fonction $\Phi(x)$ possède dans l'intervalle $(a, b)$ au moins $n-3$ racines distinctes, en tenant compte de la propriété $\beta$) et en appliquant à la fonction $\frac{\varphi}{h_1}$ le théorème de Rolle. On a tenu compte aussi de l'identité

$$W(h_1, \varphi) \equiv h_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi}{h_1}\right).$$

Nous démontrerons de plus, que la fonction $\Phi(x)$ possède au moins $n-3$ racines distinctes où elle change de signe. En effet, en appliquant la théorème de Rolle à la fonction $\frac{\varphi}{h_1}$ et en tenant compte que sa derivée, c'est-à-dire la fonction $\frac{1}{h_1^2} W(h_1, \varphi)$ ne s'annule identiquement dans aucun sous-intervalle, on obtient l'affirmation $\gamma$).

De l'annulation identique de la fonction $\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi}{h_1}\right)$ dans un sous-intervalle $(\alpha, \beta)$ de l'intervalle $(a, b)$ résulterait l'identité $\frac{\varphi(x)}{h_1(x)} \equiv C$ ($C$ étant une constante) et donc l'identité $\varphi(x) \equiv C\, h_1(x)$, valable dans l'intervalle $(\alpha, \beta)$. Mais les deux membres de cette identité représentent des solutions de l'équation différentielle (1) ; en vertu de l'unicité du problème de Cauchy, il en résulterait que l'identité précédente aura lieu dans tout l'intervalle $[a, b)$. Étant donné que par hypothèse on a $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, en vertu de l'observation β) il résulte que $\varphi(x) \not\equiv 0$ dans $(a, b)$ et par conséquent que $C \neq 0$. Mais en vertu de la même observation β), la fonction $\varphi(x)$ devient nulle en $n - 2$ points distincts au moins, situés dans l'intervalle $(a, b)$. Tenant compte de l'identité précédente, il en résulterait que la fonction $h_1(x)$ possède $n - 2$ racines distinctes au moins dans l'intervalle $(a, b)$ et comme par hypothèse $n \geqq 4$, cette affirmation contredit l'hypothèse selon laquelle $h_1(x) > 0$ dans l'intervalle $(a, b)$. Ainsi l'affirmation γ) est complètement démontrée.

δ). *Dans les hypothèses du théorème* 1, *a lieu la relation* $W[h(x), f(x), g(x)] \neq 0$ *pour chaque* $x \in (a, b)$.

*Démonstration*. Supposons au contraire que dans un point $x_0 \in (a, b)$ aurait lieu l'égalité $W(h, f, g)|_{x=x_0} = 0$, De cela, en tenant compte de l'identité

$$W[W(h_1, f),\ W(h_1, g)] \equiv h_1 W(h_1, f, g), \tag{23}$$

qui résulte de (15) prenant $m = 3$, $k = 1$, on obtiendrait que

$$W[F, G]|_{x=x_0} = 0,\quad x_0 \in (a, b),$$

les fonctions $F(x)$ et $G(x)$ ayant la même signification que dans l'énoncé du théorème 1.

De l'égalité précédente résulte l'existence de deux constantes $\lambda$ et $\mu$ $(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$, telles que

$$\begin{cases} \lambda F(x_0) + \mu G(x_0) = 0, \\ \lambda F'(x_0) + \mu G'(x_0) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Les égalités (24) expriment le fait que le point $x_0 (\in (a, b))$ constitue pour la fonction $\Phi(x) = \lambda F(x) + \mu G(x)$ une racine d'ordre $p_0$ satisfaisant à l'inégalite $p_0 \geqq 2$. Cette fonction ne peut pas s'annuler identiquement dans l'intervalle $(a, b)$, parceque au cas contraire l'on aurait

$$\lambda\, h_1^2(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{h_1(x)}\right) \equiv -\mu\, h_1^2(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{h_1(x)}\right),$$



d'où il résulterait que $\lambda f(x) \equiv -\mu g(x) + C h_1(x)$, $C$ étant une constante. Aucune des constantes $\lambda$ et $\mu$ ne peut être nulle, parceque si par exemple $\mu = 0$ et $\lambda \neq 0$, on déduirait de l'identite précédente :

— ou bien que $f(x)$ ne possède dans l'intervalle $(a, b)$ aucune racine,
— ou bien que $f(x)$ s'annule identiquement dans $(a, b)$.

Ces deux situations contredisent les hypothèses du théorème. Donc $\lambda \cdot \mu \neq 0$.

Ensuite, de l'identité précédente on obtiendrait les égalités

$$f(s_1) = \frac{C}{\lambda} h_1(s_1),\ f(s_2) = \frac{C}{\lambda} h_1(s_2),\ \ldots,\ f(s_{n-1}) = \frac{C}{\lambda} h_1(s_{n-1}). \tag{25}$$

Pour fixer les idées, supposons $r_1 < s_1$. Alors de (25) il résulterait que les valeurs de la fonction $f(x)$ aux points $s_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ ont le même signe, parceque par hypothèse, $h_1(x)$ conserve un signe constant dans l'intervalle $(a, b)$. Il en résulterait que dans chaque intervalle $(s_i, s_{i+1})$ situé entre deux racines consécutives de la fonction $g(x)$, la fonction $f(x)$ possède un nombre pair de racines, ou bien elle ne possède aucune racine. Cette conclusion contredirait le fait que les racines des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont simples et qu'elles se séparent dans l'intervalle $(a, b)$. Il résulte ainsi que $\Phi(x) \neq 0$ dans $(a, b)$.

Ensuite, conformément à l'observation γ), la fonction $\Phi(x)$ possède dans l'intervalle $(a, b)$, $n - 3$ racines distinctes au moins, où elle change de signe. Parmi les racines de la fonction $\Phi(x)$ il y aura aussi la racine $x_0$ dont l'ordre de multiplicité $p_0$ satisfait à l'inégalité $p_0 \geqq 2$. Nous distinguons les deux cas suivants, selon que le nombre $N$ des racines distinctes de la fonction $\Phi(x)$ dans l'intervalle $(a, b)$ est égal à $n - 3$, ou bien il dépasse $n - 3$. Nous montrerons que dans chacun de ces cas, la somme des ordres de multiplicité des racines de la fonction $\Phi(x)$ est égale à $n - 1$ au moins.

*Le cas* $N = n - 3$. Conformément à l'observation γ), la fonction $\Phi(x)$ change de signe en chacune de ses racines. Il en résulte que le nombre $p_0$ qui représente l'ordre de multiplicité de la racine $x_0$ de la fonction $\Phi(x)$ est impair et en vertu des relations (24), il résulte que $p_0 \geqq 3$. Considérons le cas le plus défavorable, où les autres $n - 4$ racines sont simples. Effectuant la somme des ordres de ces racines et tenant compte de l'ordre de la racine $x_0$, on conclut que la somme totale est égale à $n - 1$ au moins.

*Le cas* $N > n - 3$. En ce cas, en tenant compte que l'ordre $p_0$ de la racine $x_0$ satisfait à l'inégalité $p_0 \geqq 2$, il résulte que la somme des ordres de multiplicité de toutes les racines situées dans l'intervalle $(a, b)$ de la fonction $\Phi(x)$ est aussi égale à $n - 1$ au moins.

Ainsi, dans les deux cas, le nombre des racines situées dans l'intervalle $(a, b)$ de la fonction $\Phi(x)$ est égal à $n - 1$ au moins, chaque racine étant considérée avec son ordre de multiplicité.

D'autre part, la fonction $\Phi(x)$ est une combinaison linéaire à coefficients constants des fonctions $F(x)$ et $G(x)$, qui, ainsi qu'on l'a démontré antérieurement, sont des solutions de l'équation (20). Il en résulte que la fonction $\Phi(x)$ est aussi une solution de l'équation (20). Mais on a démontré antérieurement que l'ensemble $\mathcal{Y}_{n-1}$ des solutions de cette équation possède la propriété $I^*_{n-1}(a, b)$. Il en résulte que la solution $\Phi(x)$ qui ne s'annule pas identiquement ne peut avoir dans l'intervalle $(a, b)$ plus de $n-2$ racines, chaque racine étant considérée avec son ordre de multiplicité. Cette affirmation contredit le résultat établi antérieurement, selon lequel la somme des ordres de multiplicité des racines de la fonction $\Phi(x)$, situées dans l'intervalle $(a, b)$, est égale à $n-1$ au moins. De cette contradiction résulte l'affirmation δ).

* * *

En revenant à la démonstration du théorème 1, nous montrerons que si dans les hypothèses du ce théorème, les racines des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ se séparent dans l'intervalle $(a, b)$, alors les racines des fonctions $F(x)$ et $G(x)$ se séparent aussi dans l'intervalle $(a, b)$. A cet effet nous démontrerons d'abord la propriété suivante :

ε). *Dans l'intervalle ouvert situé entre deux racines consécutives d'une des fonctions $F(x)$ ou $G(x)$, il ne peut pas y avoir deux (ou plus de deux) racines de l'autre.*

Pour cela, nous supposerons au contraire que par exemple entre deux racines consécutives $\rho_i$ et $\rho_{i+1}$ de la fonction $F(x)$, il y aurait deux (ou plus de deux) racines de la fonction $G(x)$.

Soient $\sigma_j$ et $\sigma_{j+1}$ deux de ces racines supposées consécutives. Nous considérons l'intervalle $(\sigma_j, \sigma_{j+1})$. Dans cet intervalle la fonction $F(x)$ ne s'annule pas. En vertu du théorème de Rolle, la fonction $\frac{d}{dx}\left(\frac{G}{F}\right)$ s'annulera au moins en un point intermédiaire $x_0 \in (\sigma_j, \sigma_{j+1})$. D'ici, en tenant compte de l'identité

$$F^2(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{G(x)}{F(x)}\right) \equiv W[F(x), G(x)],$$

il résulterait l'égalité $W(F, G)|_{x=x_0} = 0$ et en vertu de l'identité (23), il résulterait l'égalité $W(h_1, f, g)|_{x=x_0} = 0$. Mais cette égalité contredit l'affirmation δ). De cette contradiction résulte l'affirmation ε).

Enfin nous démontrerons la propriété :

φ). *Les fonctions $F(x)$ et $G(x)$ n'ont pas de racines communes dans l'intervalle $(a, b)$.*

En effet, supposons que $F(x_0) = G(x_0) = 0$, où $x_0 \in (a, b)$. Alors, évidemment $W(F, G)|_{x=x_0} = 0$ et en vertu de l'identité (23), il résulterait l'égalité $W(h_1, f, g)|_{x=x_0} = 0$, ce qui contredirait l'affirmation δ). De cette contradiction, résulte l'affirmation φ).

Des affirmations ε) et φ) il résulte immédiatement la propriété suivante :



ψ). *Dans l'intervalle ouvert compris entre deux racines consécutives d'une des fonctions $F(x)$ ou $G(x)$, il y a une racine et une seule de l'autre fonction.*

Nous démontrerons enfin la propriété suivante de monotonie :

χ). *Si les racines minimes $r_1$ et $s_1$ des fonctions $f(x)$ respectivement $g(x)$, situées dans l'intervalle $(a, b)$ vérifient la relation $r_1 < s_1$, alors les racines minimes $\rho_1$ et $\sigma_1$ des fonctions $F(x)$ respectivement $G(x)$, situées dans le même intervalle, vérifient la relation $\rho_1 < \sigma_1$.*[3]

Pour démontrer cette affirmation, supposons au contraire qu'ont lieu simultanément les relations $r_1 < s_1$ et $\sigma_1 < \rho_1$. Sans restreindre la généralité du problème, nous pouvons supposer que $f(x) > 0$ dans l'intervalle $(r_1, r_2)$ et que $g(x) > 0$ dans l'intervalle $(s_1, s_2)$. Dans ces hypothèses, considérons les fonctions $\frac{f(x)}{h_1(x)}$ et $\frac{g(x)}{h_1(x)}$. En vertu de l'affirmation 1° du théorème 1, la fonction $\frac{f(x)}{h_1(x)}$ aura dans l'intervalle $(r_1, r_2)$ un seul point d'extrêmum $x = \rho_1$, qui sera évidemment un point de maximum (figure 1).

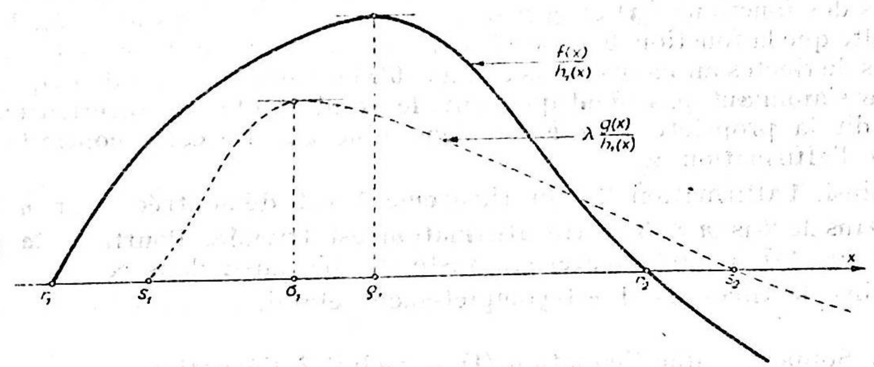


Fig. 1

De même, la fonction $\frac{g(x)}{h_1(x)}$ aura dans l'intervalle $(s_1, s_2)$ un seul point d'extrêmum, $x = \sigma_1$, qui sera un point de maximum. Donc on a :

$$\frac{f(\rho_1)}{h_1(\rho_1)} \geqq \frac{f(x)}{h_1(x)} \quad \text{pour } x \in [r_1, r_2],$$

(26)

$$\frac{g(\sigma_1)}{h_1(\sigma_1)} \geqq \frac{g(x)}{h_1(x)} \quad \text{pour } x \in [s_1, s_2].$$

[3] Un étude minutieuse de telles propriétés de monotonie au cas des polynomes, a été faite par T. Popoviciu dans le travail cité [10].

Considérons la fonction $\theta(x) = f(x) - \lambda g(x)$, où $\lambda = \frac{h_1(\sigma_1)}{h_1(\rho_1)} \cdot \frac{f(\rho_1)}{g(\sigma_1)}$. Tenant compte de la valeur de la constante $\lambda$ et des inégalités (26), on constate que

$$\theta(s_1) = f(s_1) > 0,$$

$$\theta(\sigma_1) = f(\sigma_1) - \frac{h_1(\sigma_1)}{h_1(\rho_1)} f(\rho_1) = h_1(\sigma_1) \cdot \left[\frac{f(\sigma_1)}{h_1(\sigma_1)} - \frac{f(\rho_1)}{h_1(\rho_1)}\right] < 0,$$

$$\theta(\rho_1) = f(\rho_1) - \frac{h_1(\sigma_1)}{h_1(\rho_1)} \cdot \frac{f(\rho_1)}{g(\sigma_1)} g(\rho_1) = \frac{f(\rho_1) h_1(\sigma_1)}{g(\sigma_1)} \cdot \left[\frac{g(\sigma_1)}{h_1(\sigma_1)} - \frac{g(\rho_1)}{h_1(\rho_1)}\right] > 0,$$

$$\theta(r_2) = -\lambda g(r_2) < 0.$$

Il résulte de ces inégalités que la fonction $\theta(x)$ possède dans l'intervalle $(s_1, r_2)$, donc dans l'intervalle $(r_1, r_2)$ aussi, trois racines distinctes au moins. Mais la fonction $\theta(x)$ possède aussi dans chacun des intervalles $(r_2, r_3), \ldots, (r_{n-2}, r_{n-1})$ une racine au moins, vu que par hypothèse, les racines des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ se séparent dans l'intervalle $(a, b)$. Enfin il résulte que la fonction $\theta(x)$ possède dans l'intervalle $[a, b)$, $n - 3 + 3 = n$ racines distinctes au moins. Mais comme $\theta(x)$ est une solution de l'équation (1), ne s'annulant pas identiquement, le résultat obtenu antérieurement contredit la propriété $I_n[a, b)$ de l'ensemble $\mathcal{Y}_n$. De cette contradiction résulte l'affirmation $\varkappa$).

Ainsi, l'affirmation 2° du théorème 1 est démontrée pour $n \geqq 4$.

Dans le cas $n = 3$, cette affirmation est triviale. Pourtant, la propriété $\varkappa$) établie antérieurement reste valable aussi dans ce cas.

Ainsi le théorème 1 est complètement établi.

4. Sopposons que l'équation (1) se réduit à l'équation

$$y^{(n+1)} = 0. \tag{27}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est formé des polynomes de dégré au plus $n$. Nous pouvons considérer comme système fondamental, le système des fonctions

$$h_1(x) = 1,\ h_2(x) = x, \ldots, h_n(x) = x^{n-1},\ h_{n+1}(x) = x^n. \tag{28}$$

On observe que ces fonctions vérifient les relations suivantes, analogues aux relations (3) :

$$h_1(x) \neq 0,\ W[h_1(x), h_2(x)] \neq 0, \ldots, W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x)] \neq 0, \tag{29}$$



pour $x \in (-\infty, \infty)$. Le théorème 1 énoncé pour ce cas particulier nous donne le théorème de W. A. Markov concernant la séparation des racines des polynomes :

*Si $f_n(x)$ et $g_n(x)$ sont deux polynomes de dégré au plus $n$, ayant toutes les racines réelles et distinctes, et si les racines des ces polynomes se séparent, alors les racines de leurs dérivées se séparent aussi.*

En considérant les fonctions de (28) écrites en ordre inverse, c'est-à-dire

$$h_1(x) = x^n,\ h_2(x) = x^{n-1}, \ldots, h_n(x) = x,\ h_{n+1}(x) = 1, \tag{30}$$

on observe que ces fonctions satisfont aussi aux relations (29), seulement dans les intervalles $(0, \infty)$ ou $(-\infty, 0)$. En appliquant le théorème 1, on obtient en ce cas la propriété suivante :

*Si $f_n(x)$ et $g_n(x)$ sont deux polynomes de dégré $n$, ayant toutes les racines réelles et distinctes et si les racines de ces polynomes se trouvent dans l'un des intervalles $(0, \infty)$ ou $(-\infty, 0)$ et se séparent, alors une propriété similaire aura lieu aussi pour les polynomes*

$$F_{n-1}(x) = n f(x) - x f'(x) \text{ et } G_{n-1}(x) = n g(x) - x g'(x).$$

5. Dans ce qui suit, nous donnerons une généralisation du théorème 1, en démontrant le :

THÉORÈME 2. *Des hypothèses du théorème 1 il résulte que :*

1°. *La fonction $F_k(x) = W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), f(x)]$ $(1 \leq k \leq n-1)$ possède dans l'intervalle $(a, b)$, $n-k-1$ racines distintes. Toutes ces racines sont simples et correspondent à des points d'extrêmum de la fonction*

$$\frac{F_{k-1}}{W(h_1, h_2, \ldots, h_k)} = \frac{W(h_1, h_2, \ldots, h_{k-1}, f)}{W(h_1, h_2, \ldots, h_k)}.$$

2°. *Si les racines des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ se séparent dans l'intervalle $(a, b)$, alors les racines des fonctions $F_k(x)$ et $G_k(x)$ se séparent aussi dans l'intervalle $(a, b)$.*

On fait la démonstration du théorème 2 par la méthode de l'induction relativement au nombre naturel $k$, qui intervient dans son énoncé,

En vertu de l'affirmation du théorème 1 démontré antérieurement, le théorème 2 est vrai pour $k = 1$.

Nous supposerons que l'affirmation du théorème 1 soit vraie pour le nombre $k - 1$ et nous la démontrerons pour le nombre consécutif $k$. Donc nous supposerons que en plus des hypothèses du théorème 2, sont satisfaites aussi les hypothèses suivantes :

I. La fonction $F_{k-1} = W(h_1, h_2, \ldots, h_{k-1}, f)$ possède dans l'intervalle $(a, b)$, $n-k$ racines distinctes. Toutes les racines sont simples et représentent des points d'extrêmum pour la fonction

$$\frac{F_{2-k}}{W(h_1, h_2, \ldots, h_{k-1})} = \frac{W(h_1, h_2, \ldots, h_{k-2}, f)}{W(h_1, h_2, \ldots, h_{k-1})}.$$

Nous faisons une hypothèse similaire relativement à la fonction $G_{k-1} = W(h_1, h_2, \ldots, h_{k-1}, g)$.

II. Les racines des fonctions $F_{k-1}(x)$ et $G_{k-1}(x)$ se séparent dans l'intervalle $(a, b)$.

Nous montrerons que de ces hypothèses résultent les affirmations du théorème 2. À cet effet, nous considérons les fonctions

$$(31)\quad H_1 = W(h_1, h_2, \ldots, h_{k-1}, h_k),\ H_2 = W(h_1, h_2, \ldots, h_{k-1}, h_{k+1}), \ldots, H_{n-k+1} = W(h_1, h_2, \ldots, h_{k-1}, h_n).$$

Ici $h_1(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ représentent des solutions de l'équation (1), satisfaisant aux relations (3), et $h_n(x)$ est une solution de la même équation, formant avec les autres $n-1$ solutions considérées antérieurement, un système fondamental.

En vertu du lemme 1, les fonctions (31) satisfont dans l'intervalle $(a, b)$ aux relations

$$(32)\quad H_1(x) \neq 0,\ W[H_1(x), H_2(x)] \neq 0, \ldots, W[H_1(x), H_2(x), \ldots, H_{n-k+1}(x)] \neq 0.$$

La dernière de ces relations montre que les fonctions (31) forment un système fondamental d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre $n-k+1$, du type normal. Les autres relations de (32) expriment, en vertu du theorème (****) le fait que l'ensemble $\mathcal{Y}_{n-k+1}$ formé par toutes les combinaisons linéaires des fonctions (31), possède la propriété $I^*_{n-k+1}(a, b)$. Étant donné que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ représentent par hypothèse des solutions de l'équation (1), il résulte facilement que les fonctions $F_{k-1}(x)$ et $G_{k-1}(x)$ considérées antérieurement, appartiennent à l'ensemble $\mathcal{Y}_{n-k-1}$. Ainsi les conditions du théorème 1 sont satisfaites si l'on considère au lieu du nombre $n$, le nombre $n-k+1$, ensuite au lieu des fonctions $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$, qui vérifient les relations (3) — les fonctions $H_1(x), H_2(x), \ldots, H_{n-k}(x)$ de (31), et enfin, — au lieu des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ — les fonctions $F_{k-1}(x)$, respectivement $G_{k-1}(x)$.

En appliquant le théorème 1, on obtient les conclusions suivantes :

1°. La fonction $\mathcal{F}_k(x) = W[H_1(x), F_{k-1}(x)]$ possède dans l'intervalle $(a, b)$, $n-k-1$ racines distinctes. Toutes ces racines sont simples et représentent des points d'extrêmum pour la fonction

$$\frac{F_{k-1}}{H_1} = \frac{F_{k-1}}{W(h_1, h_2, \ldots, h_k)}.$$



Une affirmation analogue a lieu aussi pour la fonction $\mathcal{G}_k(x) = W[H_1(x), G_{k-1}(x)]$.

2°. Étant donné que par hypothèse les racines des fonctions $F_{k-1}(x)$ et $G_{k-1}(x)$ se séparent dans l'intervalle $(a, b)$, il résulte que les racines des fonctions $\mathcal{F}_k(x)$ et $\mathcal{G}_k(x)$ se séparent aussi dans l'intervalle $(a, b)$.

Mais on observe que l'identité suivante a lieu :

$$\mathcal{F}_k \equiv W(H_1, F_{k-1}) \equiv W(h_1, h_2, \ldots, h_{k-1})\, W(h_1, h_2, \ldots, h_k, f),$$

ce qui résulte de (15) si on considère au lieu du nombre $m$, le nombre $k+1$, et au lieu du nombre $k$, le nombre $k-1$.

On obtient de même l'identité

$$\mathcal{G}_k \equiv W(H_1, G_{k-1}) \equiv W(h_1, h_2, \ldots, h_{k-1})\, W(h_1, h_2, \ldots, h_k, g).$$

En tenant compte des expressions des fonctions $F_k(x)$ et $G_k(x)$, il en résulte les identités

$$\mathcal{F}_k \equiv W(h_1, h_2, \ldots, h_{k-1})\, F_k,$$

$$\mathcal{G}_k \equiv W(h_1, h_2, \ldots, h_{k-1})\, G_k.$$

De ces identités et du fait qu'en vertu des relations (3) on a $W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k-1}(x)] \neq 0$ dans l'intervalle $(a, b)$, résulte — en vertu des affirmations précédentes — la valabilité du théorème 2, pour le nombre naturel $k$. Ainsi le théorème 2 est demontré.

**6.** Dans ce qui suit, nous supposerons que l'opérateur différentiel $L_n[y]$ qui intervient dans le premier membre de l'équation (1) possède des coefficients continus dans l'intervalle $(a, b)$ et admet une décomposition en produit de facteurs de la forme

$$(33)\qquad L_n[y] \equiv L_{n-k}\{L_k[y]\} \quad (1 \leq k \leq n-1),$$

où $L_k[y]$ et $L_{n-k}[y]$ sont des opérateurs différentiels linéaires et homogènes de forme normale, le premier étant d'ordre $k$ et ayant les coefficients de la classe $C^{n-k}(a, b)$, et le deuxième — d'ordre $n-k$ et ayant les coefficients continus dans l'intervalle $(a, b)$.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur $L_n[y]$ admette une décomposition de la forme (33) a été donée par G. Mammana [5], et l'expression effective de ces opérateurs-facteurs, au cas auquel est possible une decomposition de la forme (33), a-été établie par L. Aramă [1].

Dans ce qui suit nous nous servirons de la définition suivante :

D é f i n i t i o n 3. On dit que l'opérateur différentiel $L_p[y]$, linéaire et homogène, d'ordre $p$, ayant les coefficients continus dans un intervalle $\mathcal{J}$, possède la propriété $I_p(\mathcal{J})$, respectivement $I^*_p(\mathcal{J})$, si l'ensemble des solutions de l'équation différentielle correspondante $L_p[y] = 0$ possède la propriété $I_p(\mathcal{J})$, respectivement $I_p^*(\mathcal{J})$.

En employant cette définition, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 3. *Dans l'hypothèse que les opérateurs différentiels $L_k$ respectivement $L_{n-k}$ qui interviennent dans (33), possèdent les propriétés $I_k(a, b)$ respectivement $I_{n-k}(a, b)$, soient $f(x)$ et $g(x)$ deux solutions de l'équation $L_n[y] = 0$, ne s'annulant pas identiquement et ayant chacune $n - 1$ racines distinctes dans l'intervalle $(a, b)$, Alors :*

*1°. Chacune des fonctions $L_k[f(x)]$ et $L_k[g(x)]$ possède dans l'intervalle $(a, b)$, $n - k - 1$ racines distinctes, chaque racine étant du premier ordre.*

*2°. Si les racines des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ se séparent dans l'intervalle $(a, b)$, alors les racines des fonctions $L_k[f(x)]$ et $L_k[g(x)]$ se séparent aussi dans l'intervalle $(a, b)$.*

*Démonstration.* Soit $\alpha$ un nombre tel que $a < \alpha < \min\limits_{i,j} \{r_i, s_j\}$, où on a noté par $r_i$, respectivement $s_j$ les racines de la fonction $f(x)$, respectivement $g(x)$, situées dans l'intervalle $(a, b)$. Considérons l'équation différentielle $L_k[y] = 0$. Soit $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x)$ un système de solutions de cette équation, satisfaisant au point $x = \alpha$ aux conditions suivantes de Cauchy :

$$
(34)\quad
\begin{aligned}
&h_1(\alpha) = h_1'(\alpha) = \ldots\ldots\ldots = h_1^{(k-2)}(\alpha) = 0,\ h_1^{(k-1)}(\alpha) = 1,\\
&h_2(\alpha) = h_2'(\alpha) = \ldots\ldots = h_2^{(k-3)}(\alpha) = 0,\ h_2^{(k-2)}(\alpha) = 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&h_{k-1}(\alpha) = 0,\ h_{k-1}'(\alpha) = 1,\\
&h_k(\alpha) = 1.
\end{aligned}
$$

Vu que par hypothèse, l'opérateur $L_k[y]$ possède la propriété $I_k(a, b)$, donc la propriété $I_k\,[\alpha, b)$ aussi, il résulte en vertu des théorèmes (*), (**) et (***) les relations suivantes, valables dans l'intervalle $(\alpha, b)$ :

$$(35)\quad h_1(x) \neq 0,\ W[h_1(x), h_2(x)] \neq 0, \ldots, W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x)] \neq 0.$$

Soient ensuite $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-k}(x)$ un système de solutions de l'équation $L_{n-k}[Y] = 0$, satisfaisant aux conditions :

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(\alpha) = \varphi_1'(\alpha) = \ldots\ldots\ldots = \varphi_1^{(n-k-2)}(\alpha) = 0,\ \varphi_1^{(n-k-1)}(\alpha) = 1,\\
&\varphi_2(\alpha) = \varphi_2'(\alpha) = \ldots\ldots = \varphi_2^{(n-k-3)}(\alpha) = 0,\ \varphi_2^{(n-k-2)}(\alpha) = 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{n-k-1}(\alpha) = 0,\ \varphi_{n-k-1}'(\alpha) = 1,\\
&\varphi_{n-k}(\alpha) = 1.
\end{aligned}
$$



Vu que l'opérateur $L_{n-k}[Y]$ possède la propriété $I_{n-k}[\alpha, b)$, en vertu des théorèmes (*), (**) et (***) il résulte qu'ont lieu dans l'intervalle $(\alpha, b)$ les relations suivantes :

$$(36)\quad \varphi_1(x) \neq 0,\ W[\varphi_1(x), \varphi_2(x)] \neq 0,\ W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-k}(x)] \neq 0.$$

Considérons les équations différentielles

$$(37)\quad W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), y_i(x)] = \varphi_i(x)\ W[h_1(x), \ldots, h_k(x)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-k),$$

où les $y_i(x)$ sont les fonctions inconnues. Notons par $h_{k+i}(x)$ une solution arbitraire de la $i^{ème}$ équation (37). Les fonctions $h_{k+i}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-k)$ sont évidemment aussi des solutions de l'équation $L_n[y] \equiv L_{n-k}\{L_k[y]\} = 0$.

Nous démontrerons que les fonctions $h_{k+i}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-k)$ satisfont dans l'intervalle $(\alpha, b)$ aux relations suivantes, qui complètent les relations (35) :

$$
(38)\quad
\begin{aligned}
&W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), h_{k+1}(x)] \neq 0, \ldots\\
&\ldots, W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), h_{k+1}(x), \ldots, h_n(x)] \neq 0.
\end{aligned}
$$

En effet, en remplaçant dans l'identité (15), $m$ par le nombre $k + i$, on obtient l'identité

$$(39)\quad W(H_1^{(k)}, H_2^{(k)}, \ldots, H_i^{(k)}) \equiv W^{i-1}(h_1, h_2, \ldots, h_k)\ W(h_1, h_2, \ldots, h_{k+i}),$$

où l'on a noté

$$H_i^{(k)}(x) = W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), h_{k+i}(x)].$$

Mais par définition on a :

$$W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), h_{k+i}(x)] \equiv \varphi_i(x)\ W[h_1(x), \ldots, h_k(x)].$$

Ainsi la relation (39) devient

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i) \equiv W^{-1}(h_1, h_2, \ldots, h_k)\ W(h_1, h_2, \ldots, h_{k+i}).$$

En tenant compte des relations (36) et aussi de la dernière relation de (35) il résulte

$$W[h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{k+i}(x)] \neq 0 \quad \text{pour} \quad x \in (\alpha, b),$$

quelque soit $i = 1, 2, \ldots, n - k$, ce qui démontre les relations (38).

Les relations (35) et (38) nous montrent que les fonctions $h_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k, k + 1, \ldots, n)$, qui forment un système fondamental pour l'équation $L_n[y] = 0$, satisfont dans l'intervalle $(\alpha, b)$ aux relations (3). D'ici il résulte en vertu du théorème (****) que l'opérateur différentiel $L_n[y] \equiv L_{n-k}\{L_k[y]\}$ possède la propriété $I_n^*(\alpha, b)$ et comme $\alpha$ est un nombre arbitraire de l'intervalle $(a, b)$, il résulte que l'opérateur $L_n[y]$ possède la propriété $I_n^*(a, b)$.

Enfin, on observe que dans l'intervalle $(\alpha, b)$, l'identité suivante a lieu :

$$L_k[y] \equiv \frac{W(h_1, h_2, \ldots, h_k, y)}{W(h_1, h_2, \ldots, h_k)}. \tag{40}$$

En appliquant à l'équation différentielle considérée $L_n[y] = 0$, le théorème 2 et tenant compte des relations (35), (38) et (40), on obtient le théorème 3.

*Observation.* De la démonstration donnée ci dessus il résulte la propriété suivante :

THÉORÈME 4. *Soient $L_p[y]$ et $L_q[Y]$ deux opérateurs différentiels linéaires et homogènes, de forme normale, l'opérateur $L_q$ ayant les coefficients continus dans un intervalle $(a, b)$ et l'opérateur $L_p$ ayant les coefficients appartenant à la classe $C^q(a, b)$. Dans l'hypothèse que l'opérateur $L_q[y]$ possède la propriété $I_p(a, b)$ et l'opérateur $L_q[y]$ possède la propriete $I_q(a, b)$, il résulte que l'opérateur produit $L_{p+q}[y] \equiv L_q\{L_p[y]\}$ possède la propriété $I_{p+q}(a, b)$.*

## BIBLIOGRAPHIE


[1] Aramă L., *Asupra unei teoreme a lui G. Mammana*. Analele Universității C. I. Parhon, București, (1961).

[2] Aramă O., *Rezultate comparative asupra unor probleme la limită polilocale pentru ecuații diferențiale liniare*. Studii și cercet. de matematică (Cluj), X, 207—257 (1959).

[3] Константинеску Ф., *Новое доказательство теоремы В. А. Маркова при помощи теоремы Штурма*. Успехи Мат. Наук, XII, 6(78), 147—148 (1957).

[4] Constantinescu F., *Sur un théorème de W. A. Markov*. Mathematica, 2 (25), 211—216 (1960).

[5] Mammana G., *Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotto di fattori e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari*. Math. Zeitschr. 33, 186—231 (1931).

[6] Markov W. A., *Über Polynome, die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen*. Mathem. Annalen, 77, 213—258 (1916).

[7] Moldovan E., *Asupra noțiunii de funcție convexă față de o mulțime interpolatoare*. Studii și cercet. de matematică (Cluj), IX, 161—224 (1958).

[8] Montel P., *Sur les fractions rationnelles à termes entrelacés*. Mathematica, 5, 110—129 (1931).

[9] Pólya G., *On the Mean-value Theorem corresponding to a given Linear Homogeneous Differential Equation*. Amer. Math. S. Bull., 24, 312—324 (1922).

[10] Popoviciu T., *Sur un théorème de W. A. Markov*. Mathematica, 2 (25), 299—321 (1960).

[11] Rusu I., *Asupra teoremei lui W. A. Markov*. Buletinul cercurilor științifice studențești, Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj, 1955—1956, pp. 3—6.


Reçu le 1. VIII. 1961.

MATHEMATICA VOL. 3 (26), 2, 1961, pp. 217 — 224

# APPROXIMATION DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION PARABOLIQUE DANS UN DOMAINE NON BORNÉ

par

C. CORDUNEANU

à Jassy

**1.** Considérons l'équation parabolique

$$u_{xx} = u_t + f(x, t, u), \tag{1}$$

$f(x, t, u)$ étant une fonction continue dans l'ensemble

$$x \geqq 0, \quad 0 \leqq t \leqq T, \quad -\infty < u < +\infty, \tag{$\Delta$}$$

y satisfaisant à la condition de Lipschitz

$$|f(x, t, u) - f(x, t, v)| \leqq L|u - v|, \tag{2}$$

quels que soient $(x, t, u)$, $(x, t, v) \in \Delta$. Nous admettons encore que $f(x, t, 0)$ est bornée dans l'ensemble

$$x \geqq 0, \quad 0 \leqq t \leqq T, \tag{$D$}$$

c'est-à-dire, il existe un nombre $M > 0$ tel que

$$|f(x, t, 0)| \leqq M, \tag{3}$$

quel que soit $(x, t) \in D$.

Pour la solution de l'équation (1), nous allons considérer la condition initiale

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{4}$$