BIBLIOGRAPHIE

[1] Haimovici A., *Un théorème d'existence pour des équations fonctionnelles, qui généralise le théorème de Peano.* (Sous presse).

[2] Aramă O., *Proprietăți privind monotonia șirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein și aplicarea lor la studiul aproximării funcțiilor.* Studii și cercetări de matematică (Cluj), **VIII**, 195–210, (1957).

Reçu le 23. XII. 1960.

MATHEMATICA VOL. 3 (26), 1, 1961, pp. 59 – 78

LA REPRESENTATION DE LA DIFFERENCE DIVISÉE D'UNE FONCTION DE DEUX VARIABLES PAR UNE INTEGRALE DOUBLE

par

D. V. IONESCU

à Cluj

Considérons une fonction de la classe C^n dans l'intervalle $[x_0, x_n]$, ce qui veut dire qu'elle est continue dans cet intervalle ainsi que ses dérivées successives $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$. Dans l'intervalle (x_0, x_n), prenons les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de manière que $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.

Nous avons demontré [1]*), que la différence d'ordre n de la fonction $f(x)$ sur les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ qu'on désigne par $[x_0, x_1, \ldots, x_n; f]$, peut être représenté par une intégrale définie

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n; f] = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f^{(n)}(x)\, dx, \tag{1}$$

où la fonction $\varphi(x)$ coïncide sur les intervalles $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots [x_{n-1}, x_n]$ avec les polynomes $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ qui sont définis de la manière suivante.

Ces polynomes sont les intégrales des équations différentielles

$$\begin{aligned} &\varphi_1^{(n-1)}(x) = (-1)^n \alpha_0 \\ &\varphi_2^{(n-1)}(x) = (-1)^n (\alpha_0 + \alpha_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_n^{(n-1)}(x) = (-1)^n (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}) \end{aligned} \tag{2}$$

*) Les références bibliographiques se trouvent à la fin de l'article.

où

$$(3)\qquad \alpha_i = (-1)^{n+i}\frac{V(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{V(x_0, x_1, \ldots, x_n)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

$V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ étant en général, le déterminant de Vandermonde des nombres $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ et qui satisfont aux conditions aux limites suivantes:

$$(4)\qquad \begin{array}{llll}
\varphi_1(x_0) = 0, & \varphi_1'(x_0) = 0, & \ldots\ldots, & \varphi_1^{(n-2)}(x_0) = 0,\\
\varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1), & \varphi_2'(x_1) = \varphi_1'(x_1), & \ldots\ldots, & \varphi_2^{(n-2)}(x_1) = \varphi_1^{(n-2)}(x_1),\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\varphi_n(x_{n-1}) = \varphi_{n-1}(x_{n-1}), & \varphi_n'(x_{n-1}) = \varphi_{n-1}'(x_{n-1}), & \ldots, & \varphi_n^{(n-2)}(x_{n-1}) = \varphi_{n-1}^{(n-2)}(x_{n-1}),\\
\varphi_n(x_n) = 0, & \varphi_n'(x_n) = 0, & \ldots\ldots, & \varphi_n^{(n-2)}(x_n) = 0.
\end{array}$$

Nous avons démontré que la fonction $\varphi(x)$ ainsi définie est positive sur l'intervalle (x_0, x_n)

La formule (1) est très importante dans l'analyse numérique. Nous l'avons étendue aussi au cas des noeuds multiples et nous avons fait plusieurs applications de ces formules.

Dans ce travail nous allons étendre la méthode qui nous a conduit à la formule (1), à la représentation de la différence divisée d'ordre (m, n) d'une fonction de deux variables par une intégrale double. Nous montrerons dans un autre travail que la méthode peut s'étendre aussi à la représentation de la différence divisée d'ordre $(m_1, m_2, \ldots, m_p)$ d'une fonction de p variables par une intégrale multiple d'ordre p. Nous supposons dans ce travail que les noeuds sont simples et nous traiterons dans un autre travail le cas des noeuds multiples.

Ce travail est divisé en plusieurs paragraphes. Dans le premier paragraphe nous traitons des différences divisées d'ordre (m, n) des fonctions de deux variables que nous définissons par la formule

$$(5)\qquad \begin{bmatrix} x_0, x_1, \ldots, x_m \\ y_0, y_1, \ldots, y_n \end{bmatrix}; f\Bigg] =$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{i+k}\frac{V(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)}{V(x_0, x_1, \ldots, x_m)}\,\frac{V(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)}{V(y_0, y_1, \ldots, y_n)}.$$

Dans le second paragraphe nous traitons des formules préliminaires pour la transformation des intégrales doubles, qui nous mènera dans le troisième paragraphe à considérer un problème aux limites pour la détermination

d'une fonction $\Phi(x, y)$, qui sert à la représentation de la différence divisée d'ordre (m, n) de la fonction $f(x, y)$, par l'intégrale double

$$(6)\qquad \left[\begin{matrix} x_0, x_1, \ldots, x_m \\ y_0, y_1, \ldots, y_n \end{matrix}; f\right] = \iint_D \Phi(x, y)\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}\,dx\,dy$$

où D est le rectangle défini par les inégalités $x_0 \leq x \leq x_m$, $y_0 \leq y \leq y_n$.

Dans le dernier paragraphe nous étudions la fonction $\Phi(x, y)$ dans le rectangle D et nous démontrons qu'elle a un signe constant sur le rectangle ouvert D.

§ 1. Différences divisées des fonctions de deux variables

1. Considérons une fonction $f(x, y)$ de deux variables réelles x, y définie sur l'ensemble des noeuds (x_i, y_k) où $i = 0, 1, \ldots, k = 0, 1, \ldots$

On sait que la différence divisée d'ordre (1,1) de la fonction $f(x, y)$ où $i = 0,1$ et $k = 0,1$, qu'on désigne par

$$\left[\begin{matrix} x_0, x_1 \\ y_0, y_1 \end{matrix}; f\right]$$

est définie par la formule

$$(7)\qquad \left[\begin{matrix} x_0, x_1 \\ y_0, y_1 \end{matrix}; f\right] = \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1) - f(x_1, y_0)}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)}$$

En général, la différence divisée d'ordre (n, n) sur les noeuds (x_i, y_k), où $i = 0, 1, \ldots, n$ et $k = 0, 1, \ldots, n$, qu'on désigne par

$$\left[\begin{matrix} x_0, x_1, \ldots, x_n \\ y_0, y_1, \ldots, y_n \end{matrix}; f\right]$$

est définie par la formule de récurrence

$$(8)\qquad \left[\begin{matrix} x_0, x_1, \ldots, x_n \\ y_0, y_1, \ldots, y_n \end{matrix}; f\right] = \frac{1}{(x_n - x_0)(y_n - y_0)}\left\{\left[\begin{matrix} x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \\ y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \end{matrix}; f\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{matrix}; f\right] - \left[\begin{matrix} x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{matrix}; f\right] - \left[\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \end{matrix}; f\right]\right\}$$

On démontre par la méthode de l'induction complète la formule fondamentale

$$\left[\begin{matrix} x_0, x_1, \ldots, x_n \\ y_0, y_1, \ldots, y_n \end{matrix}; f\right] = \tag{9}$$

$$= \sum_{i,k=0}^{n} (-1)^{i+k} \frac{V(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{V(x_0, x_1, \ldots, x_n)} \frac{V(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)}{V(y_0, y_1, \ldots, y_n)} f(x_i, y_k)$$

2. La formule (9) nous suggère la définition de la différence divisée de la fonction $f(x, y)$, d'ordre (m, n) sur les noeuds (x_i, y_k) où $i = 0, 1, \ldots, m$ et $k = 0, 1, \ldots n$ par la formule

$$\left[\begin{matrix} x_0, x_1, \ldots, x_m \\ y_0, y_1, \ldots, y_n \end{matrix}; f\right] = \tag{10}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{i+k} \frac{V(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)}{V(x_0, x_1, \ldots, x_m)} \frac{V(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)}{V(y_0, y_1, \ldots, y_n)} f(x_i, x_k)$$

En considérant la fonction $f(x, y)$ comme fonction de y, sa différence divisée d'ordre n sur les noeuds $y_0, y_1, \ldots, y_n$ est

$$[y_0, y_1, \ldots, y_n; f(x, y)] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{V(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)}{V(y_0, y_1, \ldots, y_n)} f(x, y_k)$$

La formule (10), montre alors que

$$\left[\begin{matrix} x_0, x_1, \ldots, x_m \\ y_0, y_1, \ldots, y_n \end{matrix}; f\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \frac{V(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)}{V(x_0, x_1, \ldots, x_m)} [y_0, y_1, \ldots, y_n; f(x, y)]$$

et par suite nous avons

$$\left[\begin{matrix} x_0, x_1, \ldots, x_m \\ y_0, y_1, \ldots, y_n \end{matrix}; f\right] = [x_0, x_1, \ldots, x_m; [y_0, y_1, \ldots, y_n; f(x, y)]] \tag{11}$$

Nous arrivons ainsi à la définition de la différence divisée d'ordre (m, n) de la fonction $f(x, y)$ sur les noeuds (x_i, y_k) où $i = 0, 1, \ldots, m$ et $k = 0, 1, \ldots, n$ donnée par T. POPOVICIU [2] par la formule (11).

On démontre facilement que

$$[x_0, x_1, \ldots, x_m; [y_0, y_1, \ldots, y_n; f(x, y)]] = [y_0, y_1, \ldots, y_n; [x_0, x_1, \ldots, x_m; f(x, y)]]$$

Dans ce travail, nous utiliserons la formule (10) pour donner à la différence divisée d'ordre (m, n) d'une fonction $f(x, y)$ sur les noeuds (x_i, y_k) où $i = 0, 1, \ldots, m$ et $k = 0, 1, \ldots, n$ une représentation par une intégrale double.

§. 2. Formules préliminaires

3. Considérons les fonctions $\varphi(x, y)$, $f(x, y)$ continues dans le rectangle Δ défini par les inégalités

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2 \tag{12}$$

et ayant les dérivées partielles

$$\frac{\partial^{2p-1} \varphi}{\partial x^p \partial y^{p-1}}, \quad \frac{\partial^{2p-1} \varphi}{\partial x^{p-1} \partial y^p}, \quad \frac{\partial^{2p} \varphi}{\partial x^p \partial y^p},$$

$$\frac{\partial^{2p-1} f}{\partial x^p \partial y^{p-1}}, \quad \frac{\partial^{2p-1} f}{\partial x^{p-1} \partial y^p}, \quad \frac{\partial^{2p} f}{\partial y^p \partial y^p},$$

continues dans ce rectangle, pour $p = 1, 2, \ldots, n$.

Avec ces hypothèses, nous allons transformer l'intégrale double

$$\iint_\Delta \varphi \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} dxdy$$

par des intégrations par parties convenables.

Nous pouvons écrire

$$\iint_\Delta \varphi \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} dxdy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi \frac{\partial^{2n-1} f}{\partial x^{n-1} \partial y^n}\right) dx - \iint_\Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^{2n-1} f}{\partial x^{n-1} \partial y^n} dxdy$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} \varphi(x_2, y) \frac{\partial^{2n-1} f}{\varphi x^{n-1} \partial y^n}(x_2, y) dy - \int_{y_1}^{y_2} \varphi(x_1, y) \frac{\partial^{2n-1} f}{\partial x^{n-1} \partial y^n}(x_1, y) dy -$$

$$- \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^{2n-2} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}\right) dy + \iint_\Delta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^{2n-2} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}} dx\, dy,$$

ou encore

$$\iint_{\Delta} \varphi \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n}\, dxdy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(x_2, y) \frac{\partial^{2n-2} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}(x_2, y)\right] dy -$$

$$- \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_2, y) \frac{\partial^{2n-2} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}(x_2, y) dy -$$

$$- \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(x_1, y) \frac{\partial^{2n-2} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}(x_1, y)\right] dy +$$

$$+ \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_1, y) \frac{\partial^{2n-2} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}(x_1, y)\, dy -$$

$$- \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y_2) \frac{\partial^{2n-2} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}(x, y_2) dx +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y_1) \frac{\partial^{2n-2} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}(x, y_1) dx + \iint_{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^{2(n-1)} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}\, dxdy.$$

Nous arrivons ainsi à la formule de récurrence

$$\iint_{\Delta} \varphi \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} dxdy = \varphi(x_2, y_2) \frac{\partial^{2(n-1)} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}(x_2, y_2) - \varphi(x_2, y_1) \frac{\partial^{2(n-1)} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}(x_2, y_1) -$$

$$- \varphi(x_1, y_2) \frac{\partial^{2(n-1)} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}(x_1, y_2) + \varphi(x_1, y_1) \frac{\partial^{2(n-1)} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}(x_1, y_1) +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y_1) \frac{\partial^{2(n-1)} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}(x, y_1) dx -$$

$$- \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y_2) \frac{\partial^{2(n-1)} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}(x, y_2) dx +$$

$$+ \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_1, y) \frac{\partial^{2(n-1)} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}(x_1, y) dy -$$

$$- \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_2, y) \frac{\partial^{2(n-1)} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}(x_2, y) dy +$$

$$+ \iint_{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^{2(n-1)} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}\, dxdy$$

qui nous conduira à la formule

$$\iint_{\Delta} \varphi \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n}\, dxdy = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^{2(n-r-1)} \varphi}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}}(x_2, y_2) \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_2, y_2) - \tag{13}$$

$$- \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^{2(n-r-1)} \varphi}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}}(x_2, y_1) \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_2, y_1) -$$

$$- \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^{2(n-r-1)} \varphi}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}}(x_1, y_2) \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_1, y_2) +$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^{2(n-r-1)} \varphi}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}}(x_1, y_1) \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_1, y_1) +$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^{2(n-r)-1} \varphi}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1}}(x, y_1) \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x, y_1) dx -$$

$$- \sum_{r=0}^{n-1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^{2(n-r)-1} \varphi}{\partial x^{n-r} \partial y^{n-r-1}}(x, y_2) \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x, y_2) dx +$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-1} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^{2(n-r)-1} \varphi}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r}}(x_1, y) \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_1, y) dy -$$

$$- \sum_{r=0}^{n-1} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^{2(n-r)-1} \varphi}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r}}(x_2, y) \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_2, y) dy +$$

$$+ \iint_{\Delta} \frac{\partial^{2n} \varphi}{\partial x^n \partial y^n} f\, dxdy.$$

4. Supposons maintenant que les fonctions $\varphi(x, y)$, $f(x, y)$ soient continues dans le rectangle Δ défini par les inégalités (12) et qu'elles ont des dérivées partielles

$$\frac{\partial^r \varphi}{\partial x^r}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, q)$$

$$\frac{\partial^{2p+q-1}\varphi}{\partial x^{p+q}\,\partial y^{p-1}}, \quad \frac{\partial^{2p+q-1}\varphi}{\partial x^{p+q-1}\,\partial y^{p}}, \quad \frac{\partial^{2p+q}\varphi}{\partial x^{p+q}\,\partial y^{p}}, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{\partial^{2p-1} f}{\partial x^{p}\,\partial y^{p-1}}, \quad \frac{\partial^{2p-1} f}{\partial x^{p-1}\,\partial y^{p}}, \quad \frac{\partial^{2p} f}{\partial x^{p}\,\partial y^{p}}, \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{\partial^{2n+r} f}{\partial x^{n+r}\,\partial y^{n}}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, q)$$

continues dans ce rectangle.

Nous allons transformer l'intégrale double

$$\iint_{\Delta} \varphi \frac{\partial^{2n+q} f}{\partial x^{n+q}\,\partial y^{n}}\, dxdy$$

par des intégrations par parties convenables.

Nous pouvons d'abord écrire

$$\begin{aligned}\iint_{\Delta} \varphi \frac{\partial^{2n+q} f}{\partial x^{n+q}\,\partial y^{n}}\, dxdy = & \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \frac{\partial^j \varphi}{\partial x^j}\, \frac{\partial^{2n+q-j-1} f}{\partial x^{n+q-j-1}\,\partial y^{n}}\right) dx + \\ & + (-1)^q \iint_{\Delta} \frac{\partial^q \varphi}{\partial x^q}\, \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{n}\,\partial y^{n}}\, dxdy\end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$\begin{aligned}(14) \quad \iint_{\Delta} \varphi \frac{\partial^{2n+q} f}{\partial x^{n+q}\,\partial y^{n}}\, dxdy = & \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^j \varphi}{\partial x^j}(x_2, y)\, \frac{\partial^{2n+q-j-1} f}{\partial x^{n+q-j-1}\,\partial y^{n}}(x_2, y) dy - \\ & - \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^j \varphi}{\partial x^j}(x_1, y)\, \frac{\partial^{2n+q-j-1} f}{\partial x^{n+q-j-1}\,\partial y^{n}}(x_1, y)\, dy + \\ & + (-1)^q \iint_{\Delta} \frac{\partial^q \varphi}{\partial x^q}\, \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{n}\,\partial y^{n}}\, dx\, dy.\end{aligned}$$

Pour abréger l'écriture, posons

$$(15) \qquad (-1)^q \frac{\partial^q \varphi}{\partial x^q} = \psi$$

et appliquons à l'intégrale double du second membre de la formule (14) la formule (13). Nous aurons

$$\begin{aligned}(16) \quad \iint_{\Delta} \varphi \frac{\partial^{2n+q} f}{\partial x^{n+q}\,\partial y^{n}}\, dx\, dy = & \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_2, y_2)\, \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_2, y_2) - \\ & - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_2, y_1)\, \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_2, y_1) - \\ & - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_1, y_2)\, \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_1, y_2) + \\ & + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_1, y_1)\, \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_1, y_1) + \\ & + \sum_{r=0}^{n-1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}(x, y_1)\, \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x, y_1)\, dx - \\ & - \sum_{r=0}^{n-1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}(x, y_2)\, \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x, y_2)\, dx + \\ & + \sum_{r=0}^{n-1} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}(x_1, y)\, \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_1, y)\, dy - \\ & - \sum_{r=0}^{n-1} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}(x_2, y)\, \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_2, y)\, dy + \\ & + \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^j \varphi}{\partial x^j}(x_2, y)\, \frac{\partial^{2n+q-j-1} f}{\partial x^{n+q-j-1}\partial y^{n}}(x_2, y)\, dy - \\ & - \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^j \varphi}{\partial x^j}(x_1, y)\, \frac{\partial^{2n+q-j-1} f}{\partial x^{n+q-j-1}\partial y^{n}}(x_1, y)\, dy + \\ & + (-1)^q \iint_{\Delta} \frac{\partial^{2n+q}\varphi}{\partial x^{n+q}\partial y^{n}}\, f\, dx\, dy\end{aligned}$$

5. Considérons maintenant le rectangle D défini par les inégalités

$$x_0 \leqq x \leqq x_m, \quad y_0 \leqq y \leqq y_n \tag{17}$$

et prenons les noeuds (x_i, y_k), où $i = 1, 2, \ldots, m - 1$ et $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ et nous supposons que

$$\begin{aligned} &x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m \\ &y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n \end{aligned} \tag{18}$$

Nous pouvons toujours supposer $m \geqq n$, parceque dans le cas $m < n$ on peut changer entre elles les variables x et y. Nous poserons

$$m = n + q \tag{19}$$

et nous désignons dans la suite par D_i^k, la rectangle défini par les inégalités

$$x_i \leqq x \leqq x_{i+1}, \quad y_k \leqq y \leqq y_{k+1} \tag{20}$$

où $i = 0, 1, \ldots, m - 1$ et $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

À chaque rectangle D_i^k nous attachons une fonction $\varphi_i^k(x, y)$ continue dans ce rectangle, ainsi que ses dérivées partielles

$$\frac{\partial^r \varphi_i^k}{\partial x^r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, q)$$

$$\frac{\partial^{2p+q-1} \varphi_i^k}{\partial x^{p+q} \partial y^{p-1}}, \quad \frac{\partial^{2p+q-1} \varphi_i^k}{\partial x^{p+q-1} \partial y^{p}}, \quad \frac{\partial^{2p+q} \varphi_i^k}{\partial x^{p+q} \partial y^{p}} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

Nous considérons aussi une fonction $f(x, y)$ définie et continue dans le rectangle D, ainsi que ses dérivées partielles

$$\frac{\partial^{2p-1} f}{\partial x^p \partial y^{p-1}}, \quad \frac{\partial^{2p-1} f}{\partial x^{p-1} \partial y^{p}}, \quad \frac{\partial^{2p} f}{\partial x^p \partial y^p} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{\partial^{2n+r} f}{\partial x^{n+r} \partial y^n} \qquad (r = 1, 2, \ldots, q)$$

Aux fonctions $\varphi_i^k(x, y)$ correspond par la formule (15) les fonctions $\psi_i^k(x, y)$, c'est à dire

$$\psi_i^k(x\, y) = (-1)^q \frac{\partial^q \varphi_i^k}{\partial x^q} \tag{21}$$

Nous pouvons appliquer à chaque rectangle D_i^k et aux fonctions $\varphi_i^k(x, y)$, $f(x, y)$ la formule (16). En écrivant toutes ces formules et en les ajoutant membre à membre, nous arrivons à la formule fondamentale de ce travail. Si nous désignons par $\Phi(x, y)$ la fonction définie dans le rectangle D et qui coïncide dans chaque rectangle D_i^k avec la fonction $\varphi_i^k(x, y)$ correspondante, nous aurons

$$\begin{aligned}
&\iint_D \Phi(x, y) \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}\, dx\, dy = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \iint_{D_i^k} \varphi_i^k(x, y) \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}\, dx\, dy = \\
&= \left\{ \begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_0^0}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} (x_0, y_0) \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} (x_0, y_0) + \\
&+ \sum_{s=1}^{m-1} \sum_{r=0}^{n-1} \left[\frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_s^0}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} (x_s, y_0) \frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_{s-1}^0}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} (x_s, y_0) \right] \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} (x_s, y_0) - \\
&- \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_{m-1}^0}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} (x_m, y_0) \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} (x_m, y_0) +
\end{aligned} \right. \\
&\left\{ \begin{aligned}
&+ \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} \left[\frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_0^t}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} (x_0, y_t) - \frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_0^{t-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} (x_0, y_t) \right] \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} (x_0, y_t) + \\
&+ \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{m-1} \sum_{r=0}^{n-1} \left[\frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_s^t}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} (x_s, y_t) - \frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_{s-1}^t}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} (x_s, y_t) + \right. \\
&\left. + \frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_{s-1}^{t-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} (x_s, y_t) - \frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_s^{t-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} (x_s, y_t) \right] \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} (x_s, y_t) + \\
&+ \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} \left[- \frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_{m-1}^t}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} (x_m, y_t) + \frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_{m-1}^{t-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} (x_m, y_t) \right] \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} (x_m, y_t) -
\end{aligned} \right. \\
&\left\{ \begin{aligned}
&- \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_0^{n-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} (x_0, y_n) \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} (x_0, y_n) + \\
&+ \sum_{s=1}^{m-1} \sum_{r=0}^{n-1} \left[\frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_{s-1}^{n-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} (x_s, y_n) - \frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_s^{n-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} (x_s, y_n) \right] \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} (x_s, y_n) + \\
&+ \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_{m-1}^{n-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}} (x_m, y_n) \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r} (x_m, y_n) +
\end{aligned} \right.
\end{aligned} \tag{22}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&+\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_i^0}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}(x, y_0)\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x, y_0)\, dx + \\
&+\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[\frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_i^t}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}(x, y_t) - \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_i^{t-1}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}(x, y_t)\right]\times \\
&\qquad\qquad \times \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x, y_t)\, dx - \\
&-\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_i^{n-1}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}(x, y_n)\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x, y_n)\, dx +
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_0^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}(x_0, y)\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_0, y)\, dy + \\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{r=0}^{n-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}}\left[\frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_s^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}(x_s, y) - \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_{s-1}^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}(x_s, y)\right]\times \\
&\qquad\qquad \times \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_s, y)\, dy - \\
&-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_{m-1}^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}(x_m, y)\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_m, y)\, dy -
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{\partial^j \varphi_0^k}{\partial x^j}(x_0, y)\frac{\partial^{2n+q-j-1} f}{\partial x^{n+q-j-1}\partial y^n}(x_0, y)\, dy + \\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\int_{y_k}^{y_{k+1}}\left[\frac{\partial^j \varphi_{s-1}^k}{\partial x^j}(x_s, y) - \frac{\partial^j \varphi_s^k}{\partial x^j}(x_s, y)\right]\frac{\partial^{2n+q-j-1} f}{\partial x^{n+q-j-1}\partial x^n}(x_s, y)\, dy + \\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{\partial^j \varphi_{m-1}^k}{\partial x^j}(x_m, y)\frac{\partial^{2n+q-j-1} f}{\partial x^{n+q-j-1}\partial y^n}(x_m, y)\, dy +
\end{aligned}
\right.
$$

$$
+\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\iint_{D_i^k}\frac{\partial^{2n}\psi_i^k}{\partial x^n \partial y^n} f\, dx\, dy
$$

Nous donnons dans ce travail, une application importante de la formule (22) qui nous ménera à la représentation de la différence divisée d'une fonction de deux variables par une intégrale double.

Dans un autre travail nous ferons d'autres applications de la formule (22).

§ 2. Problème aux limites.

5. La formule (22) nous conduit à traiter un problème aux limites que nous présentons de la manière suivante.

Nous cherchons à déterminer les fonctions $\psi_i^k(x, y)$, par les équations aux dérivées partielles

$$
\frac{\partial^{2n}\psi_i^k}{\partial x^n \partial y^n} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, m \\ k = 0, 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{23}
$$

et par des conditons aux limites choisies de manière que les coefficients de $f(x_0, y)$ et de $f(x_s, y)$ dans les intégrales

$$
\int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{\partial^{2n-1}\psi_0^k}{\partial x^{n-1}\partial y^n}(x_0, y)\, f(x_0, y)\, dy,
$$

$$
\int_{x_k}^{y_{k+1}}\left[\frac{\partial^{2n-1}\psi_s^k}{\partial x^{n-1}\partial y^n}(x_s, y) - \frac{\partial^{2n-1}\psi_{s-1}^k}{\partial x^{n-1}\partial y^n}(x_s, y)\right] f(x_s, y)\, dy,
$$

soient nuls pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$ et $s = 1, 2, \ldots, m-1$; ensuite que les coefficients de $f(x, y_0)$ et de $f(x, y_t)$ dans les intégrales

$$
\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^{2n-1}\psi_i^0}{\partial x^n \partial y^{n-1}}(x, y_0)\, f(x, y_0)\, dx,
$$

$$
\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[\frac{\partial^{2n-1}\psi_i^t}{\partial x^n \partial y^{n-1}}(x, y_t) - \frac{\partial^{2n-1}\psi_i^{t-1}}{\partial x^n \partial y^{n-1}}(x, y_t)\right] f(x, y_t)\, dx,
$$

soient nuls pour $i = 0, 1, \ldots, m-1$ et $t = 1, 2, \ldots, n-1$, tandis que les coefficients de $f(x_s, y_t)$ soient constants, pour $s = 0, 1, \ldots, m-1$ et $t = 0, 1, \ldots, n-1$.

Nous poserons donc les conditions aux limites suivantes

$$\frac{\partial^{2n-1}\psi_0^k}{\partial x^{n-1}\partial y^n}(x_0, y) = 0, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{24}$$

$$\frac{\partial^{2n-1}\psi_s^k}{\partial x^{n-1}\partial y^n}(x_s, y) - \frac{\partial^{2n-1}\psi_{s-1}^k}{\partial x^{n-1}\partial y^n}(x_s, y) = 0 \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ s = 1, 2, \ldots, m-1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$\frac{\partial^{2n-1}\psi_i^0}{\partial x^n \partial y^{n-1}}(x, y_0) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{26}$$

$$\frac{\partial^{2n-1}\psi_i^t}{\partial x^n \partial y^{n-1}}(x, y_t) - \frac{\partial^{2n-1}\psi_i^{t-1}}{\partial x^n \partial y^{n-1}}(x, y_t) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, m-1 \\ t = 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Nous poserons aussi

$$\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_0^0}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_0, y_0) = C_0^0 \tag{28}$$

$$\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_s^0}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_s, y_0) - \frac{\partial^{2(n-1)}\psi_{s-1}^0}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_s, y_0) = C_s^0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, m-1) \tag{29}$$

$$\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_0^t}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_0, y_t) - \frac{\partial^{2(n-1)}\psi_0^{t-1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_0, y_t) = C_0^t \qquad (t = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_s^t}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_s, y_t) - \frac{\partial^{2(n-1)}\psi_{s-1}^t}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_s, y_t) + \\ &+ \frac{\partial^{2(n-1)}\psi_{s-1}^{t-1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_s, y_t) - \frac{\partial^{2(n-1)}\psi_s^{t-1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_s, y_t) = C_s^t \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots, m-1 \\ t = 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{31}$$

où C_s^t pour $s = 0, 1, \ldots, m-1$ et $t = 0, 1, \ldots, n-1$ sont mn constantes que nous déterminerons plus loin par d'autres conditions.

A l'aide des équations aux derivées partielles (23) et des conditions aux limites (24) — (31) on démontre que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2(n-1)}\psi_i^k}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}} = \; & C_0^0 + C_1^0 + \ldots + C_i^0 + \\ & + C_0^1 + C_1^1 + \ldots + C_i^1 + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + C_0^k + C_1^k + \ldots + C_i^k, \end{aligned} \tag{32}$$

pour $i = 0, 1, \ldots, m-1$ et $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

La démonstration se fait de la manière suivante.

Nous avons d'abord l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^{2n}\psi_0^0}{\partial x^n \partial y^n} = 0$$

et les conditions aux limites (24), (26), (28) en prenant $k = 0$ et $i = 0$, qui montrent que

$$\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_0^0}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}} = C_0^0 \tag{33}$$

et par suite nous avons démontré que l'équation (32) est exacte pour $i=k=0$.

Considérons maintenant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^{2n}\psi_i^0}{\partial x^n \partial y^n} = 0$$

et les conditions aux limites (25), correspondant à $s = i$, $k = 0$ (26) et (29) correspondant à $s = i$, où $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Ces conditions aux limites sont

$$\frac{\partial^{2n-1}\psi_i^0}{\partial x^{n-1}\partial y^n}(x_i, y) = \frac{\partial^{2n-1}\psi_{i-1}^0}{\partial x^{n-1}\partial y^n}(x_i, y)$$

$$\frac{\partial^{2n-1}\psi_i^0}{\partial x^n \partial y^{n-1}}(x, y_0) = 0$$

$$\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_i^0}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_i, y_0) = \frac{\partial^{2(n-1)}\psi_{i-1}^0}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}} + C_i^0$$

En tenant compte de l'équation (33) on démontre par la méthode de l'induction complète que nous avons

$$\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_i^0}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}} = C_0^0 + C_1^0 + \ldots + C_i^0$$

ce qui prouve que l'équation (32) est exacte pour $k = 0$ et $i = 0, 1, \ldots, m-1$

Considérons aussi l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^{2n}\psi_0^k}{\partial x^n \partial y^n} = 0,$$

et les conditions aux limites (24), (27) correspondant à $i = 0$, $t = k$ et (30) correspondant à $t = k$, où $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Ces conditions aux limites sont

$$\frac{\partial^{2n-1}\psi_0^k}{\partial x^{n-1}\partial y^n}(x_0, y) = 0$$

$$\frac{\partial^{2n-1}\psi_0^k}{\partial x^n \partial y^{n-1}}(x, y_k) = \frac{\partial^{2n-1}\psi_0^{k-1}}{\partial x^n \partial y^{n-1}}(x, y_k)$$

$$\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_0^k}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_0, y_k) = \frac{\partial^{2(n-1)}\psi_0^{k-1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_0, y_k) + C_0^k$$

En tenant compte de l'équation (33), on démontre par la méthode de l'induction complète que nous avons

$$\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_0^k}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}} = C_0^0 + C_0^1 + \ldots + C_0^k$$

ce qui prouve que l'équation (32) est exacte pour $i = 0$ et $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Il reste maintenant à démontrer que si l'équation (32) est exacte pour les indices (i, k), $(i+1, k)$, $(i, k+1)$ elle est aussi exacte pour les indices $(i+1, k+1)$.

Pour cela, nous intégrons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^{2n}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^n \partial y^n} = 0,$$

avec les conditions aux limites (25) correspondant à $s = i+1$, l'indice supérieur étant $k+1$, (27) correspondant à $t = k+1$, l'indice inférieur étant $i+1$ et (31) correspondant à $s = i+1$, $t = k+1$ qu'on peut écrire

$$\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^n}(x_{i+1}, y) = \frac{\partial^{2n-1}\psi_i^{k+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^n}(x_{i+1}, y) = 0$$

$$\frac{\partial^{2n-1}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^n \partial y^{n-1}}(x, y_{k+1}) = \frac{\partial^{2n-1}\psi_{i+1}^k}{\partial x^n \partial y^{n-1}}(x, y_{k+1}) = 0$$

$$\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_{i+1}, y_{k+1}) = \frac{\partial^{2(n-1)}\psi_i^{k+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_{i+1}, y_{k+1}) -$$

$$- \frac{\partial^{2(n-1)}\psi_i^k}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_{i+1}, y_{k+1}) + \frac{\partial^{2(n-1)}\psi_{i+1}^k}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_{i+1}, y_{k+1}) + C_{i+1}^{k+1}$$

Pour la dernière condition, on peut écrire d'après l'équation (32) exacte pour les indices $(i, k+1)$, (i, k), $(i+1, k)$

$$\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_{i+1}, y_{k+1}) =$$

$$\begin{aligned}
&= C_{i+1}^{k+1} + C_0^0 + C_1^0 + \ldots + C_i^0 - (C_0^0 + C_1^0 + \ldots + C_i^0) + C_0^0 + C_1^0 + \ldots + C_{i+1}^0 + \\
&\quad + C_0^1 + C_1^1 + \ldots + C_i^1 - (C_0^1 + C_1^1 + \ldots + C_i^1) + C_0^1 + C_1^1 + \ldots + C_{i+1}^1 + \\
&\quad + \ldots\ldots + \quad - \ldots\ldots - + \ldots\ldots + \\
&\quad + C_0^{k+1} + C_1^{k+1} + \ldots + C_i^{k+1} - (C_0^k + C_1^k + \ldots + C_i^k) + C_0^k + C_1^k + \ldots + C_{i+1}^k,
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_{i+1}, y_{k+1}) &= C_0^0 + C_1^0 + \ldots + C_{i+1}^0 + \\
&\quad + C_0^1 + C_1^1 + \ldots + C_{i+1}^1 + \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots + \\
&\quad + C_0^{k+1} + C_1^{k+1} + \ldots + C_{i+1}^{k+1}.
\end{aligned}$$

Il résulte alors immédiatement que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}} &= C_0^0 + C_1^0 + \ldots + C_{i+1}^0 + \\
&\quad + C_0^1 + C_1^1 + \ldots + C_{i+1}^1 + \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots + \\
&\quad + C_0^{k+1} + C_1^{k+1} + \ldots + C_{i+1}^{k+1}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'équation (32) est exacte pour $i = 0, 1, \ldots, m-1$ et $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

6. Nous continuons à déterminer les fonctions $\psi_i^k(x, y)$ en ajoutant des nouvelles conditions aux limites pour l'intégration des équations aux dérivées partielles (32). En revenant à la formule fondamentale (22) nous choisissons les conditions aux limites de manière que dans les intégrales

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_0^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}(x_0, y)\,\frac{\partial^{2r}f}{\partial x^r\partial y^r}(x_0, y)\,dy$$

les coefficients de $\frac{\partial^{2r}f}{\partial x^r\partial y^r}(x_0, y)$ soient nuls pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$ et $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ensuite nous voulons que dans les intégrales

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} \left[\frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_s^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}(x_s, y) - \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_{s-1}^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}(x_s, y)\right]\frac{\partial^{2r}f}{\partial x^r\partial y^r}(x_s, y)\,dy$$

les coefficients de $\frac{\partial^{2r}f}{\partial x^r\partial y^r}(x_s, y)$ soient nuls pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$, $k = 0, 1, \ldots n-1$, et $s = 1, 2, \ldots, m-1$.

Nous poserons donc

$$\frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_0^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}(x_0, y) = 0 \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots, n-1 \\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$\frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_s^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}(x_s, y) - \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_{s-1}^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}(x_s, y) = 0 \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots, n-1 \\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ s = 1, 2, \ldots, m-1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

De la même manière nous choisissons les conditions aux limites telles que dans les intégrales

$$\int_{x_i}^{x_{i+i}} \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_i^0}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}(x, y_0)\,\frac{\partial^{2r}f}{\partial x^r\partial y^r}(x, y_0)\,dx$$

les coefficients de $\frac{\partial^{2r}f}{\partial x^r\partial y^r}(x, y_0)$ soient nuls par $r = 1, 2, \ldots, n-1$ et $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Ensuite nous voulons que dans les intégrales

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_i^t}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}(x, y_t) - \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_i^{t-1}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}(x, y_t)\right]\frac{\partial^{2r}f}{\partial x^r\partial y^r}(x, y_t)\,dx$$

les coefficients de $\frac{\partial^{2r}f}{\partial x^r\partial y^r}(x, y_t)$ soient nuls pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$ et $t = 1, 2, \ldots, n-1$.

Nous poserons donc

$$\frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_i^0}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}(x, y_0) = 0 \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots, n-1 \\ i = 0, 1, \ldots, m-1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$\frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_i^t}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}(x, y_t) - \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_i^{t-1}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}(x, y_t) = 0 \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots, n-1 \\ i = 0, 1, \ldots, m-1 \\ t = 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Ensuite nous choisissons dans la formule fondamentale (22) des conditions aux limites de manière que les coefficients de $\frac{\partial^{2r}f}{\partial x^r\partial y^r}(x_s, y_t)$ soient nuls pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$ et $s = 0, 1, \ldots, m-1$, $t = 0, 1, \ldots, n-1$,

Nous poserons donc

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_0, y_0) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{38}$$

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_s^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_s, y_0) - \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{s-1}^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_s, y_0) = 0 \qquad \begin{pmatrix} r=1, 2, \ldots, n-1 \\ s=1, 2, \ldots, m-1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^t}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_0, y_t) - \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^{t-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_0, y_t) = 0 \qquad \begin{pmatrix} r=1, 2, \ldots, n-1 \\ t=1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_s^t}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_s, y_t) - \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{s-1}^t}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_s, y_t) + \\ &+ \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{s-1}^{t-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_s, y_t) - \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_s^{t-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_s, y_t) = 0 \begin{pmatrix} r= 1, 2, \ldots, n-1 \\ s= 1, 2, \ldots, m-1 \\ t= 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{41}$$

Nous verrons que toutes les fonctions $\psi_i^k(x, y)$ sont bien déterminées par les équations aux dérivées partielles (32) et les conditions aux limites (34)—(41).

En tenant compte de toutes les conditions aux limites (34)—(41), la formule fondamentale (22) devient

$$
\begin{aligned}
(42)\quad & \iint_D \Phi(x,y)\,\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}\,dx\,dy = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} C_i^k f(x_i, y_k) - \\
& - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{m-1}^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_m, y_0)\,\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_m, y_0) + \\
& + \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\left[-\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{m-1}^l}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_m, y_l) + \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{m-1}^{l-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_m, y_l)\right]\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_m, y_l) - \\
& - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^{n-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_0, y_n)\,\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_0, y_n) + \\
& + \sum_{s=1}^{m-1}\sum_{r=0}^{n-1}\left[\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{s-1}^{n-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_s, y_n) - \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_s^{n-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_s, y_n)\right]\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_s, y_n) + \\
& + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{m-1}^{n-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_m, y_n)\,\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_m, y_n) - \\
& - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_i^{n-1}}{\partial x^{n-r}\,\partial y^{n-r-1}}(x, y_n)\,\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x, y_n)\,dx - \\
& - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_{m-1}^k}{\partial x^{n-r-1}\,\partial y^{n-r}}(x_m, y)\,\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_m, y)\,dy - \\
& - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{\partial^j \varphi_0^k}{\partial x^j}(x_0, y)\,\frac{\partial^{2n+q-j-1} f}{\partial x^{n+q-j-1}\partial y^n}(x_0, y)\,dy + \\
& + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\int_{y_k}^{y_{k+1}}\left[\frac{\partial^j \varphi_{s-1}^k}{\partial x^j}(x_s, y) - \frac{\partial^j \varphi_s^k}{\partial x^j}(x_s, y)\right]\frac{\partial^{2n+q-j-1} f}{\partial x^{n+q-j-1}\partial y^n}(x_s, y)\,dy + \\
& + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{\partial^j \varphi_{m-1}^k}{\partial x^j}(x_m, y)\,\frac{\partial^{2n+q-j-1} f}{\partial x^{n+q-j-1}\,\partial y^n}(x_m, y)\,dy.
\end{aligned}
$$

(à suivre)

MATHEMATICA VOL. 3 (26), 1, 1961, pp. 79 – 87

SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

par

MAREK KUCZMA

à Kraków

Introduction. L'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad g[\alpha(x)] - g(x) = \varphi(x),$$

où $g(x)$ est la fonction inconnue et $\alpha(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions données, est une généralisation de l'équation d'Abel [1]

$$g[\alpha(x)] - g(x) = c,$$

et de l'équation

$$g(x + 1) - g(x) = \log x$$

utilisée par M. E. ARTIN [4] pour une caractérisation de la fonction $\Gamma(x)$ d'Euler, ainsi que des équations analogues (voir [2], [3], [12], [13]). L'équation (1) a été le sujet des travaux de nombreux auteurs ([5], [9], [15], [16], [17], [18]). Cette équation et quelques autres équations fonctionnelles analogues, possèdent des applications dans divers domaines de mathématiques et de physique.

L'équation (1), de même que celle plus générale

$$(2) \qquad g[\alpha(x)] = \Phi[x, g(x)],$$

où Φ est une fonction donnée, possède beaucoup de propriétés analogues à celles des équations différentielles ordinaires du premier ordre (voir [6], [7], [8]). A coté des analogies il y a aussi des différences. Une de celles-ci