où les formes différentielles placées sous les intégrales sont des différentielles exactes, conformément aux relations (18), (19), dans lesquelles on a $C_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Soit maintenant l'équation (15) écrite sous la forme

$$dw = A + Bw + Cw^2. \tag{22}$$

Si w_1 est une solution particulière de cette équation, on pourra la réduire à la forme (20), par la substitution

$$w = w_1 - \frac{1}{w}, \tag{23}$$

et par conséquent sa résolution complète exige deux quadratures.

Si l'on connaît deux solutions particulières w_1, w_2 de l'équation (22), on en déduit la formule

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = Ce^{\int (w_1 - w_2) \cdot \sum\limits_1^{n-1} C_i du_i}, \tag{24}$$

C étant une constante arbitraire; donc la résolution complète exige une seule quadrature.

Enfin, si l'on connaît trois solutions de l'équation (22), on aura

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \text{constant}, \tag{25}$$

relation qui exprime que le rapport anharmonique de quatre solutions est constant, ce qui revient à dire que la solution générale de l'équation (22) contient la constante arbitraire sous forme homographique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Darboux G., *Théorie des surfaces*, vol. 1, 166–169.

[2] Vessiot E., *Géométrie supérieure*, 342–344.

Reçu le 27. VIII. 1960.

MATHEMATICA VOL. 3 (26), 2, 1961, pp. 231 – 271

LA REPRÉSENTATION DE LA DIFFÉRENCE DIVISÉE D'UNE FONCTION DE DEUX VARIABLES PAR UNE INTÉGRALE DOUBLE (SUITE)*)

par

D. V. IONESCU

à Cluj

7. Nous allons déterminer les fonctions ψ_i^k par les équations aux dérivées partielles (32) et les conditions aux limites (34)—(41). Nous procéderons par étapes en calculant d'abord $\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_i^k}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}$, ensuite $\frac{\partial^{2(n-3)}\psi_i^k}{\partial x^{n-3}\partial y^{n-3}}$, ... et ainsi de suite.

Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_i^k}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}} = {} & [C_0^0 (x - x_0) + C_1^0 (x - x_1) + \ldots + C_i^0 (x - x_i)] (y - y_0) + \\ & + [C_0^1 (x - x_0) + C_1^1 (x - x_1) + \ldots + C_i^1 (x - x_i)] (y - y_1) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + [C_0^k (x - x_0) + C_1^k (x - x_1) + \ldots + C_i^k (x - x_i)] (y - y_k).\end{aligned} \tag{43}$$

La démonstration se fait de la manière suivante.

Pour $i = 0$, $k = 0$, nous devons intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_0^0}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right) = C_0^0$$

*) voir Mathematica 3(26), 1, 57–79 (1961).

avec les conditions aux limites (34) où $k = 0$, $r = 1$, (36) où $i = 0$, $r = 1$ et (38), c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_0^0}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x_0, y) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_0^0}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x, y_0) = 0$$

$$\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_0^0}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}(x_0, y_0) = 0$$

Nous aurons

$$\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_0^0}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}} = C_0^0\,(x - x_0)\,(y - y_0) \tag{44}$$

ce qui prouve que l'équation (43) est exacte pour $i = k = 0$.

Considérons maintenant l'équation aux dérivées partielles (32) correspondant à $k = 0$, que nous écrivons sous la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_i^0}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right) = C_0^0 + C_1^0 + \ldots + C_i^0 \tag{45}$$

et les conditions aux limites correspondantes, à savoir la condition (35) où $r = 1$, $k = 0$, $s = i$, la condition (36) où $r = 1$ et la condition (39) où $r = 1$, $s = i$, c'est-à-dire

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_i^0}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x_i, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_{i-1}^0}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x_i, y) \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_i^0}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x, y_0) = 0 \\
\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_i^0}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}(x_i, y_0) = \frac{\partial^{2(n-2)}\psi_{i-1}^0}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}(x_i, y_0)
\end{gathered} \tag{46}$$

Nous voulons démontrer que

$$\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_i^0}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}} = [C_0^0\,(x - x_0) + C_1^0\,(x - x_1) + \ldots + C_i^0\,(x - x_i)]\,(y - y_0) \tag{47}$$

Cette équation est exacte pour $i = 0$, parceque dans ce cas elle coïncide avec l'équation (44). Supposons alors que l'équation (47) est exacte pour l'indice $i - 1$ et démontrons qu'elle est encore exacte pour l'indice i. Dans

ces conditions nous devons intégrer l'équation aux dérivées partielles (45) avec les conditions aux limites (46) qu'on peut écrire sous la forme

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_i^0}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x_i, y) = C_0^0\,(x_i - x_0) + C_1^0\,(x_i - x_1) + \ldots + C_{i-1}^0\,(x_i - x_{i-1}) \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_i^0}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x, y_0) = 0 \\
\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_i^0}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}(x_i, y_0) = 0
\end{gathered} \tag{48}$$

En intégrant nous avons

$$\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_i^0}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}} = [C_0^0\,(x - x_0) + C_1^0\,(x - x_1) + \ldots + C_i^0\,(x - x_i)]\,(y - y_0) + A(x) + B(y)$$

où $A(x)$ et $B(y)$ sont deux fonctions à déterminer par les conditions aux limites (48). Les deux premières conditions (48) montrent que

$$A'(x) = 0, \quad B'(y) = 0$$

et la troisième montre que la somme $A(x) + B(y)$ qui est une constante, est nulle, d'où il résulte l'équation (47).

L'équation (43) est donc démontrée pour $k = 0$ et quel que soit l'indice i.

Considérons maintenant l'équation aux dérivées partielles (32) correspondant à $i = 0$, que nous écrivons sous la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_0^k}{\partial x^{n-2}\partial x^{n-2}}\right) = C_0^0 + C_0^1 + \ldots + C_0^k \tag{49}$$

que nous devons intégrer avec les conditions aux limites (34) où $r = 1$, (37) où $r = 1$, $i = 0$, $t = k$, (40) où $r = 1$, $t = k$, c'est-à-dire

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_0^k}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x_0, y) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_0^k}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x, y_k) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_0^{k-1}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x, y_k) \\
\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_0^k}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}(x_0, y_k) = \frac{\partial^{2(n-2)}\psi_0^{k-1}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}(x_0, y_k)
\end{gathered} \tag{50}$$

Démontrons que l'intégrale de l'équation aux dérivées partielles (49) avec les conditions aux limites (50) est

$$(51)\qquad \frac{\partial^{2(n-2)}\psi_0^k}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}} = C_0^0\,(x-x_0)\,(y-y_0) + C_0^1\,(x-x_0)\,(y-y_1) + \dots + C_0^k\,(x-x_0)\,(y-y_k).$$

Cette équation est exacte pour $k=0$, parceque dans ce cas elle coïncide avec l'équation (44). Pour démontrer que l'équation (51) est exacte quel que soit l'indice k, nous employons la méthode de l'induction complète. Supposons que l'équation (51) est exacte pour l'indice $k-1$, et démontrons-la pour l'indice k. Pour cela nous devons intégrer l'équation aux dérivées partielles (49) avec les conditions aux limites (50), que nous pouvons écrire sous la forme

$$(52)\qquad \begin{gathered} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_0^k}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x_0, y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_0^k}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x, y_k) = C_0^0(y_k-y_0)+C_0^1(y_k-y_1)+\dots+C_0^{k-1}(y_k-y_{k-1}) \\ \frac{\partial^{2(n-2)}\psi_0^k}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}(x_0, y_k) = 0. \end{gathered}$$

En intégrant, nous aurons

$$\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_0^k}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}} = (x-x_0)\,[C_0^0(y-y_0)+C_0^1(y-y_1)+\dots+C_0^k(y-y_k)] + A(x) + B(y)$$

où $A(x)$ et $B(y)$ sont deux fonctions à déterminer par les conditions aux limites (52). Les deux premières conditions (52) montrent que

$$A'(x) = 0, \qquad B'(y) = 0.$$

La somme $A(x)+B(y)$ est donc une constante qui d'après la troisième condition (52) est nulle. Il résulte l'équation (51).

Ainsi l'équation (43) est exacte pour $i=0$ et quel que soit l'indice k.

Il reste maintenant à démontrer que si l'équation (43) est exacte pour les indices (i, k), $(i+1, k)$, $(i, k+1)$ elle est encore exacte pour les indices $(i+1, k+1)$.

Pour cela nous intégrons l'équation aux dérivées partielles (32) correspondant aux indices $(i+1, k+1)$.

$$(53)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right) = C_0^0+C_1^0+\dots+C_{i+1}^0 + C_0^1+C_1^1+\dots+C_{i+1}^1 + \dots + C_0^{k+1}+C_1^{k+1}+\dots+C_{i+1}^{k+1},$$

avec les conditions aux limites (35) où $r=1$, l'indice supérieur est $k+1$ et $s=i+1$, (37) où $r=1$, l'indice inférieur est $i+1$ et $t=k+1$, (41), où $r=1$, $s=i+1$, $t=k+1$, c'est-à-dire

$$(54)\qquad \begin{gathered} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x_{i+1}, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_i^{k+1}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x_{i+1}, y) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x, y_{k+1}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_{i+1}^{k}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x, y_{k+1}) \\ \frac{\partial^{2(n-2)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}(x_{i+1}, y_{k+1}) = \frac{\partial^{2(n-2)}\psi_i^{k+1}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}(x_{i+1}, y_{k+1}) - \\ - \frac{\partial^{2(n-2)}\psi_i^{k}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}(x_{i+1}, y_{k+1}) + \frac{\partial^{2(n+2)}\psi_{i+1}^{k}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}(x_{i+1}, y_{k+1}). \end{gathered}$$

En tenant compte des hypothèses faites, les conditions aux limites (54), peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x_{i+1}, y) = {} & C_0^0(x_{i+1}-x_0)+C_1^0(x_{i+1}-x_1)+\dots+C_i^0(x_{i+1}-x_i) + \\ & + C_0^1(x_{i+1}-x_0)+C_1^1(x_{i+1}-x_1)+\dots+C_i^1(x_{i+1}-x_i) + \\ & + \dots + \\ & + C_0^{k+1}(x_{i+1}-x_0)+C_1^{k+1}(x_{i+1}-x_1)+\dots+C_i^{k+1}(x_{i+1}-x_i), \end{aligned}$$

$$
(55) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}\right)(x, y_{k+1}) = (C_0^0 + C_1^0 + \ldots + C_{i+1}^0)\,(y_{k+1} - y_0) +
$$

$$
+ (C_0^1 + C_1^1 + \ldots + C_{i+1}^1)\,(y_{k+1} - y_1) +
$$

$$
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +
$$

$$
+ (C_0^k + C_1^k + \ldots + C_{i+1}^k)\,(y_{k+1} - y_k),
$$

$$
\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}}(x_{i+1}, y_{k+1}) =
$$

$$
= [C_0^0(x_{i+1}-x_0) + C_1^0(x_{i+1}-x_1) + \ldots + C_i^0(x_{i+1}-x_i)]\,(y_{k+1}-y_0) +
$$

$$
+ [C_0^1(x_{i+1}-x_0) + C_1^1(x_{i+1}-x_1) + \ldots + C_i^1(x_{i+1}-x_i)]\,(y_{k+1}-y_1) +
$$

$$
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +
$$

$$
+ [C_0^k(x_{i+1}-x_0) + C_1^k(x_{i+1}-x_1) + \ldots + C_i^k(x_{i+1}-x_i)]\,(y_{k+1}-y_k).
$$

L'intégrale de l'équation aux dérivées partielles (53) avec les conditions aux limites (55) est

$$
\frac{\partial^{2(n-2)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-2}\partial y^{n-2}} = [C_0^0\,(x - x_0) + C_1^0\,(x - x_1) + \ldots + C_{i+1}^0\,(x - x_{i+1})]\,(y - y_0) +
$$

$$
+ [C_0^1(x - x_0) + C_1^1(x - x_1) + \ldots + C_{i+1}^1(x - x_{i+1})]\,(y - y_1) +
$$

$$
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +
$$

$$
+ [C_0^{k+1}(x - x_0) + C_1^{k+1}(x - x_1) + \ldots + C_{i+1}^{k+1}(x - x_{i+1})]\,(y - y_{k+1}) +
$$

$$
+ A(x) + B(y)
$$

où $A(x)$ et $B(y)$ sont deux fonctions à déterminer. Les deux premières conditions (55) montrent que $A'(x) = 0$, $B'(y) = 0$, ce qui veut dire que la somme $A(x) + B(y)$ est une constante. La dernière condition (55) montre que cette constante est nulle. Cela prouve que l'équation (43) est exacte quels que soient les indices i et k.

8. En général nous avons

$$
(56) \quad \frac{\partial^{2(n-r)}\psi_i^k}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r}} =
$$

$$
= \frac{1}{[(r-1)!]^2}\{[C_0^0(x-x_0)^{r-1} + C_1^0(x-x_1)^{r-1} + \ldots + C_i^0(x-x_i)^{r-1}](y-y_0)^{r-1}
$$

$$
+ [C_0^1(x-x_0)^{r-1} + C_1^1(x-x_1)^{r-1} + \ldots + C_i^1(x-x_i)^{r-1}]\,(y-y_1)^{r-1}
$$

$$
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +
$$

$$
+ [C_0^k(x-x_0)^{r-1} + C_1^k(x-x_1)^{r-1} + \ldots + C_i^k(x-x_i)^{r-1}](y-y_k)^{r-1}\}.
$$

Cette équation est exacte pour $r = 2$, parceque dans ce cas elle coïncide avec l'équation (43) que nous avons demontrée au nr. 7.

Pour démontrer qu'elle est exacte pour $r = 3, 4, \ldots, n-1, n$ nous appliquons la méthode de l'induction complète. Nous supposons que l'équation (56) est exacte pour l'indice r, où r est un nombre quelconque $2, 3, \ldots, n-1$ et nous démontrerons qu'elle est aussi exacte pour l'indice $r+1$.

Cela revient à intégrer l'équation aux dérivées partielles (56) dont le premier membre peut s'écrire sous la forme

$$
\frac{\partial^{2(n-r)}\psi_i^k}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r}} = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_i^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right),
$$

avec les conditions aux limites correspondantes que nous preciserons plus loin.

1°. Pour $i = k = 0$, nous avons à intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$
\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right) = \frac{1}{[(r-1)!]^2}\,C_0^0\,(x - x_0)^{r-1}(y - y_0)^{r-1}
$$

avec les conditions aux limites (34), (36), (38) c'est-à-dire

$$
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x_0, y) = 0.
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x, y_0) = 0.
$$

$$
\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_0, y_0) = 0.
$$

En intégrant, on trouve

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}} = \frac{1}{(r!)^2} C_0^0 (x-x_0)^r (y-y_0)^r, \tag{57}$$

ce qui prouve que l'équation (56) est exacte lorsqu 'on remplace r par $r+1$ et $i=k=0$.

2°. Faisons maintenant, dans l'équation aux dérivées partielles (56) $k=0$. Nous aurons à intégrer l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_i^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right) = \tag{58}$$

$$= \frac{1}{[(r-1)!]^2}[C_0^0(x-x_0)^{r-1} + C_1^0(x-x_1)^{r-1} + \ldots + C_i^0(x-x_i)^{r-1}]\,(y-y_0)^{r-1},$$

avec les conditions aux limites (35), où $k=0$, (36) et (39) où $s=i$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_i^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x_i, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i-1}^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x_i, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_i^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x, y_0) = 0. \tag{59}$$

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_i^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_i, y_0) = \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i-1}^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_i, y_0).$$

Démontrons que l'intégrale de l'équation (58) avec les conditions (59) est

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_i^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}} = \frac{1}{(r!)^2}[C_0^0(x-x_0)^r + C_1^0(x-x_1)^r + \ldots + C_i^0(x-x)^r](y-y_0)^r. \tag{60}$$

Pour $i=0$ l'équation (60) est exacte, parceque dans ce cas elle coïncide avec l'équation (57). Pour démontrer que l'équation (60) est exacte quel que soit l'indice i, nous acceptons l'équation (60) pour l'indice i et nous démontrerons qu'elle est exacte aussi pour l'indice $i+1$. Cela revient à

intégrer l'équation (58) où l'on remplace l'indice i par $i+1$, avec les conditions (59) où l'on remplace l'indice i par $i+1$. Ces conditions deviennent

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i+1}^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x_{i+1}, y) =$$

$$= \frac{1}{r!(r-1)!}[C_0^0(x_{i+1}-x_0)^r + C_1^0(x_{i+1}-x_1)^r + \ldots + C_i^0(x_{i+1}-x_i)^r](y-y_0)^{r-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i+1}^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x, y_0) = 0. \tag{61}$$

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i+1}^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_{i+1}, y_0) = 0.$$

et nous aurons

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i+1}^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}} =$$

$$= \frac{1}{(r!)^2}[C_0^0(x-x_0)^r + C_1^0(x-x_1)^r + \ldots + C_{i+1}^0(x-x_{i+1})^r](y-y_0)^r + A(x) + B(y),$$

où $A(x)$ et $B(y)$ sont des fonctions à déterminer par les équations (61). Les deux premières conditions (61) montrent que $A'(x) = 0$, $B'(y) = 0$ et par suite la somme $A(x) + B(y)$ est une constante qui est nulle d'après la troisième condition (61). Nous aurons donc

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i+1}^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}} = \frac{1}{(r!)^2}[C_0^0(x-x_0)^r + C_1^0(x-x_1)^r + \ldots + C_{i+1}^0(x-x_1)^r](y-y_0)^r$$

ce qui prouve que l'équation (60) est exacte quel que soit l'indice i.

L'équation (56) est donc exacte lorsqu'on remplace r par $r+1$ et l'on fait $k=0$, quel que soit l'indice i.

3° Faisons dans l'équation aux dérivées partielles (56), $i=0$. Nous aurons à intégrer l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right) = \tag{62}$$

$$= \frac{1}{[(r-1)!]^2}(x-x_0)^{r-1}[C_0^0(y-y_0)^{r-1} + C_0^1(y-y_1)^{r-1} + \ldots + C_0^k(y-y_k)^{r-1}],$$

avec les conditions aux limites (34), (37) où $i = 0$, $t = k$ et (40) où $t = k$, c'est à dire

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x_0, y) = 0$$

(63)
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x, y_k) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^{k-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x, y_k)$$

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_0, y_k) = \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^{k-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_0, y_k).$$

Démontrons que l'intégrale de l'équation (62) avec les conditions (63) est

(64)
$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}} = \frac{1}{(r!)^2}(x-x_0)^r[C_0^0(y-y_0)^r+C_0^1(y-y_1)^r+\dots+C_0^k(y-y_k)^r]$$

Pour $k = 0$ l'équation (64) est exacte parceque dans ce cas elle coïncide avec l'équation (57). Pour démontrer que l'équation (64) est exacte quel que soit l'indice k, nous acceptons l'équation (64) pour l'indice k et nous démontrerons qu'elle est exacte aussi pour l'indice $k + 1$. Cela revient à intégrer l'équation (62) où l'on remplace l'indice k par $k + 1$, avec les conditions (63) où l'on remplace l'indice k par $k + 1$. Ces conditions sont alors

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^{k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x_0, y) = 0$$

(65)
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^{k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x, y_{k+1}) =$$

$$= \frac{1}{r!(r-1)!}(x-x_0)^{r-1}[C_0^0(y_{k+1}-y_0)^r + C_0^1(y_{k+1}-y_1)^r + \dots + C_0^k(y_{k+1}-y_k)^r]$$

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^{k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_0, y_{k+1}) = 0.$$

En intégrant nous aurons

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^{k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}} =$$

$$= \frac{1}{(r!)^2}(x-x_0)^r[C_0^0(y-y_0)^r + C_0^1(y-y_1)^r + \dots + C_0^{k+1}(y-y_{k+1})^r] + A(x) + B(y),$$

où $A(x)$ et $B(y)$ sont des fonctions à déterminer par les conditions (65). Les deux premières conditions (65) montrent que $A'(x) = 0$, $B(y) = 0$, ce qui veut dire que la somme $A(x) + B(y)$ est une constante, qui d'après la troisième condition (65) est nulle. Nous aurons donc

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^{k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}} = \frac{1}{(r!)^2}(x-x_0)^r[C_0^0(y-y_0)^r+C_0^1(y-y_1)^r+\dots+C_0^{k+1}(y-y_{k+1})^r],$$

ce qui prouve que l'équation (64) est exacte quel que soit l'indice k.

Il résulte que l'équation (56) est exacte lorsqu'on remplace r par $r + 1$ et l'on fait $i = 0$, quel que soit l'indice k.

4°. Il nous reste à démontrer que si l'équation (56) est exacte lorsqu'on remplace r par $r + 1$ et pour les indices (i, k), $(i + 1, k)$, $(i, k + 1)$, elle est aussi exacte pour les indices $(i + 1, k + 1)$. Pour cela nous devons intégrer l'équation aux dérivées partielles,

(66)
$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{[(r-1)!]^2}\{[C_0^0(x-x_0)^{r-1}+C_1^0(x-x_1)^{r-1}+\dots+C_{i+1}^0(x-x_{i+1})^{r-1}](y-y_0)^{r-1}+$$

$$+[C_0^1(x-x_0)^{r-1}+C_1^1(x-x_1)^{r-1}+\dots+C_{i+1}^1(x-x_{i+1})^{r-1}](y-y_1)^{r-1}+$$

$$+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots +$$

$$+[C_0^{k+1}(x-x_0)^{r-1}+C_1^{k+1}(x-x_1)^{r-1}+\dots+C_{i+1}^{k+1}(x-x_{i+1})^{r-1}](y-y_{k+1})^{r-1}\},$$

avec les conditions aux limites (35) où l'indice supérieur est $k + 1$ et $s = i + 1$, (37) où l'indice inférieur est $i + 1$ et $t = k + 1$, (41) où $s = i+1$, $t = k + 1$, c'est-à-dire

(67)
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x_{i+1}, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_i^{k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x_{i+1}, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x, y_{k+1}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i+1}^{k}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x, y_{k+1})$$

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_{i+1}, y_{k+1}) = \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_i^{k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_{i+1}, y_{k+1}) -$$

$$- \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_i^{k}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_{i+1}, y_{k+1}) + \frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i+1}^{k}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_{i+1}, y_{k+1}).$$

D'après les hypothèses faites, nous avons

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_i^{k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}=\frac{1}{(r!)^2}\{[C_0^0(x-x_0)^r+C_1^0(x-x_1)^r+\ldots+C_i^0(x-x_i)^r](y-y_0)^r+$$
$$+[C_0^1(x-x_0)^r+C_1^1(x-x_1)^r+\ldots+C_i^1(x-x_i)^r](y-y_1)^r+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+[C_0^{k+1}(x-x_0)^r+C_1^{k+1}(x-x_1)^r+\ldots+C_i^{k+1}(x-x_i)^r](y-y_{k+1})^r\},$$

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_i^{k}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}=\frac{1}{(r!)^2}\{[C_0^0(x-x_0)^r+C_1^0(x-x_1)^r+\ldots+C_i^0(x-x_i)^r](y-y_0)^r+$$
$$+[C_0^1(x-x_0)^r+C_1^1(x-x_1)^r+\ldots+C_i^1(x-x_i)^r](y-y_1)^r+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+[C_0^{k}(x-x_0)^r+C_1^{k}(x-x_1)^r+\ldots+C_i^{k}(x-x_i)^r](y-y_{k})^r\}$$

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i+1}^{k}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}=\frac{1}{(r!)^2}\{[C_0^0(x-x_0)^r+C_1^0(x-x_1)^r+\ldots+C_{i+1}^0(x-x_{i+1})^r](y-y_0)^r+$$
$$+[C_0^1(x-x_0)^r+C_1^1(x-x_1)^r+\ldots+C_{i+1}^1(x-x_{i+1})^r](y-y_1)^r+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+[C_0^{k}(x-x_0)^r+C_1^{k}(x-x_1)^r+\ldots+C_{i+1}^{k}(x-x_{i+1})^r](y-y_{k})^r\},$$

d'où il résulte que les conditions aux limites (67) peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x_{i+1},y)=$$
$$=\frac{1}{r!(r-1)!}\{[C_0^0(x_{i+1}-x_0)^r+C_1^0(x_{i+1}-x_1)^r+\ldots+C_i^0(x_{i+1}-x_i)^r](y-y_0)^{r-1}+$$
$$+[C_0^1(x_{i+1}-x_0)^r+C_1^1(x_{i+1}-x_1)^r+\ldots+C_i^1(x_{i+1}-x_i)^r](y-y_1)^{r-1}+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+[C_0^{k+1}(x_{i+1}-x_0)^r+C_1^{k+1}(x_{i+1}-x_1)^r+\ldots+C_i^{k+1}(x_{i+1}-x_i)^r](y-y_{k+1})^{r-1}\},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}\right)(x,y_{k+1})= \tag{68}$$
$$=\frac{1}{r!(r-1)!}\{[C_0^0(x-x_0)^{r-1}+C_1^0(x-x_1)^{r-1}+\ldots+C_{i+1}^0(x-x_{i+1})^{r-1}](y_{k+1}-y_0)^r+$$
$$+[C_0^1(x-x_0)^{r-1}+C_1^1(x-x_1)^{r-1}+\ldots+C_{i+1}^1(x-x_{i+1})^{r-1}](y_{k+1}-y_1)^r+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+[C_0^k(x-x_0)^{r-1}+C_1^k(x-x_1)^{r-1}+\ldots+C_{i+1}^k(x-x_{i+1})^{r-1}](y_{k+1}-y_k)^r\}$$

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_{i+1},y_{k+1})=$$
$$=\frac{1}{(r!)^2}\{[C_0^0(x_{i+1}-x_0)^r+C_1^0(x_{i+1}-x_1)^r+\ldots+C_i^0(x_{i+1}-x_i)^r](y_{k+1}-y_0)^r+$$
$$+[C_1^0(x_{i+1}-x_0)^r+C_1^1(x_{i+1}-x_1)^r+\ldots+C_i^1(x_{i+1}-x_i)^r](y_{k+1}-y_1)^r+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+[C_0^k(x_{i+1}-x_0)^r+C_1^k(x_{i+1}-x_1)^r+\ldots+C_i^k(x_{i+1}-x_i)^r](y_{k+1}-y_k)^r\}.$$

En intégrant l'équation (66) avec les conditions (68), nous aurons

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}=$$
$$=\frac{1}{(r!)^2}\{[C_0^0(x-x_0)^r+C_1^0(x-x_1)^r+\ldots+C_{i+1}^0(x-x_{i+1})^r](y-y_0)^r+$$
$$+[C_0^1(x-x_0)^r+C_1^1(x-x_1)^r+\ldots+C_{i+1}^1(x-x_{i+1})^r](y-y_1)^r+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+[C_0^{k+1}(x-x_0)^r+C_1^{k+1}(x-x_1)^r+\ldots+C_{i+1}^{k+1}(x-x_{i+1})^r](y-y_{k+1})^r\}$$
$$+A(x)+By)$$

où $A(x)$ et $B(y)$ sont des fonctions à déterminer par les conditions (68). Les deux premières conditions (68) montrent que $A'(x)=0$, $B'(y)=0$ et par suite $A(x)+B(y)$ est une constante. La troisième condition (68) montre que cette constante est nulle. Nous avons donc

$$\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{i+1}^{k+1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}} =$$

$$\frac{1}{(r!)^2}\{[C_0^0(x-x_0)^r+C_1^0(x-x_1)^r+\ldots+C_{i+1}^0(x-x_{i+1})^r](y-y_0)^r+$$

$$+[C_0^1(x-x_0)^r+C_1^1(x-x_1)^r+\ldots+C_{i+1}^1(x-x_{i+1})^r](y-y_1)^r+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+[C_0^{k+1}(x-x_0)^r+C_1^{k+1}(x-x_1)^r+\ldots+C_{i+1}^{k+1}(x-x_{i+1})^r](y-y_{k+1})^r\},$$

ce qui montre que l'équation (56) est exacte lorsque r est remplacé par $r+1$ et quels que soient i et k.

L'équation (56) est donc tout à fait générale. En faisant $r=n$, nous avons

(69) $$\psi_i^k(x,y) =$$

$$=\frac{1}{[(n-1)!]^2}\{[C_0^0(x-x_0)^{n-1}+C_1^0(x-x_1)^{n-1}+\ldots+C_i^0(x-x_i)^{n-1}](y-y_0)^{n-1}+$$

$$+[C_0^1(x-x_0)^{n-1}+C_1^1(x-x_1)^{n-1}+\ldots+C_i^0(x-x_i)^{n-1}](y-y_1)^{n-1}+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+[C_0^k(x-x_0)^{n-1}+C_1^k(x-x_1)^{n-1}+\ldots+C_i^k(x-x_i)^{n-1}](y-y_k)^{n-1}\}.$$

9. Si $m=n$, nous avons $q=0$ et d'après les formules (21) il résulte que nous avons

(70) $$\varphi_i^k(x,y)=\psi_i^k(x,y)$$

Mais si $m>n$, nous déterminerons les fonctions $\varphi_i^k(x,y)$ par des nouvelles conditions aux limites. Nous choisissons ces conditions de manière que dans les intégrales

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{\partial^j\varphi_0^k}{\partial x^j}(x_0,y)\,\frac{\partial^{2n+q-j-1}f}{\partial x^{n+q-j-1}\partial y^n}(x_0,y)\,dy,$$

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} \left[\frac{\partial^j\varphi_{s-1}^k}{\partial x^j}(x_s,y)-\frac{\partial^j\varphi_s^k}{\partial x^j}(x_s,y)\right]\frac{\partial^{2n+q-j-1}f}{\partial x^{n+q-j-1}\partial y^n}(x_s,y)\,dy$$

de la formule (42) les coefficients de $\dfrac{\partial^{2n+q-j-1}f}{\partial x^{n+q-j-1}\partial y^n}(x_s,y)$ soient nuls pour $k=0,1,\ldots,n-1$, $j=0,1,\ldots,q-1$ et $s=1,2,\ldots,m-1$ c'est-à-dire

(71) $$\frac{\partial^j\varphi_0^k}{\partial x^j}(x_0,y)=0 \qquad \begin{pmatrix} j=0,1,\ldots,q-1 \\ k=0,1,\ldots,n-1 \end{pmatrix}$$

(72) $$\frac{\partial^j\varphi_s^k}{\partial x^j}(x_s,y)-\frac{\partial^j\varphi_{s-1}^k}{\partial x^j}(x_s,y)=0 \qquad \begin{pmatrix} j=0,1,\ldots,q-1 \\ k=0,1,\ldots,n-1 \\ s=1,2,\ldots,m-1 \end{pmatrix}$$

La détermination des fonctions $\varphi_i^k(x,y)$ se ramène à l'intégration des équations aux dérivées partielles (21)

(73) $$\frac{\partial^q\varphi_i^k}{\partial x^q}=(-1)^q\psi_i^k(x,y) \qquad \begin{pmatrix} i=0,1,\ldots,m-1 \\ k=0,1,\ldots,n-1 \end{pmatrix}$$

où les fonctions $\psi_i^k(x,y)$ sont données par les formules (69), en tenant compte des conditions aux limites (71) et (72).

1°. Dans l'équation aux dérivées partielles (73) prenons $i=0$. Nous aurons à intégrer l'équation

$$\frac{\partial^q\varphi_0^k}{\partial x^q}=\frac{(-1)^q}{[(n-1)!]^2}(x-x_0)^{n-1}[C_0^0(y-y_0)^{n-1}+C_0^1(y-y_1)^{n-1}+\ldots+C_0^k(y-y_k)^{n-1}]$$

avec les contditions (71). Nous aurons successivement

$$\frac{\partial^{q-1}\varphi_0^k}{\partial x^{q-1}}=\frac{(-1)^q}{n!(n-1)!}(x-x_0)^n[C_0^0(y-y_0)^{n-1}+C_0^1(y-y_1)^{n-1}+\ldots+C_0^k(y-y_k)^{n-1}]$$

$$\frac{\partial^{q-2}\varphi_0^k}{\partial x^{q-2}}=\frac{(-1)^q}{(n+1)!(n-1)!}(x-x_0)^{n+1}[C_0^0(y-y_0)^{n-1}+C_0^1(y-y_1)^{n-1}+\ldots+C_0^k(y-y_k)^{n-1}]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_0^k=\frac{(-1)^q}{(n+q-1)!\,(n-1)!}(x-x_0)^{n+q-1}[C_0^0(y-y_0)^{n-1}+C_0^1(y-y_1)^{n-1}+\ldots+ C_0^k(y-y_k)^{n-1}]$$

c'est-à-dire

(74) $$\varphi_0^k(x,y)=\frac{(-1)^q}{(m-1)!(n-1)!}(x-x_0)^{m-1}[C_0^0(y-y_0)^{n-1}+C_0^1(y-y_1)^{n-1}+\ldots+C_0^k(y-y_k)^{n-1}]$$

2°. Considérons maintenant les équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^q \varphi_i^k}{\partial x^q} = \frac{(-1)^q}{[(n-1)!]^2}\{[C_0^0(x-x_0)^{n-1}+C_1^0(x-x_1)^{n-1}+\ldots+C_i^0(x-x_i)^{n-1}](y-y_0)^{n-1}+$$

$$+[C_0^1(x-x_0)^{n-1}+C_1^1(x-x_1)^{n-1}+\ldots+C_i^1(x-x_i)^{n-1}](y-y_1)^{n-1}+$$

$$(75) \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+[C_0^k(x-x_0)^{n-1}+C_1^k(x-x_1)^{n-1}+\ldots+C_i^k(x-x_i)^{n-1}](y-y_k)^{n-1}\},$$

que nous devons intégrer avec les conditions aux limites (72) où $s = i$.

Nous allons démontrer que la fonction $\varphi_i^k(x, y)$ est donnée par la formule

$$(76) \qquad \varphi_i^k(x, y) =$$

$$= \frac{(-1)^{m-n}}{(m-1)!\,(n-1)!}\{[C_0^0(x-x_0)^{m-1}+C_1^0(x-x_1)^{m-1}+\ldots+C_i^0(x-x_i)^{m-1}](y-y_0)^{n-1}+$$

$$+[C_0^1(x-x_0)^{m-1}+C_1^1(x-x_1)^{m-1}+\ldots+C_i^1(x-x_i)^{m-1}](y-y_1)^{n-1}+$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+[C_0^k(x-x_0)^{m-1}+C_1^k(x-x_1)^{m-1}+\ldots+C_i^k(x-x_i)^{m-1}]\,(y-y_k)^{n-1}\}$$

Cette formule est exacte pour $i = 0$, parceque dans ce cas elle coïncide avec la formule (74). Pour démontrer qu'elle est exacte pour $i = 1, 2, \ldots, m-1$, supposons qu'elle est exacte pour une valeur de $i = 0, 1, 2, \ldots m-2$ et démontrons — la pour la valeur $i+1$.

Nous avons à intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$(77) \qquad \frac{\partial^q \varphi_{i+1}^k}{\partial x^q} =$$

$$= \frac{(-1)^q}{[(n-1)!]^2}\{[C_0^0(x-x_0)^{n-1}+C_1^0(x-x_1)^{n-1}+\ldots+C_{i+1}^0(x-x_{i+1})^{n-1}]\,(y-y_0)^{n-1}+$$

$$+[C_0^1(x-x_0)^{n-1}+C_1^1(x-x_1)^{n-1}+\ldots+C_{i+1}^1(x-x_{i+1})^{n-1}]\,(y-y_1)^{n-1}+$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+[C_0^k(x-x_0)^{n-1}+C_1^k(x-x_1)^{n-1}+\ldots+C_{i+1}^k(x-x_{i+1})^{n-1}]\,(y-y_k)^{n-1}\}$$

avec les conditions aux limites

$$\frac{\partial^j \varphi_{i+1}^k}{\partial x^j}(x_{i+1}, y) = \frac{\partial^j \varphi_i^k}{\partial x^j}(x_{i+1}, y) \qquad (j = 0, 1, \ldots, q-1)$$

c'est-à-dire

$$(78) \qquad \frac{\partial^j \varphi_{i+1}^k}{\partial x^j}(x_{i+1}, y) = \frac{(-1)^q}{(m-j-1)!\,(n-1)!} \times$$

$$\times\{[C_0^0(x_{i+1}-x_0)^{m-j-1}+C_1^0(x_{i+1}-x_1)^{m-j-1}+\ldots+C_i^0(x_{i+1}-x_i)^{m-j-1}](y-y_0)^{n-1}+$$

$$+[C_0^1(x_{i+1}-x_0)^{m-j-1}+C_1^1(x_{i+1}-x_1)^{m-j-1}+\ldots+C_i^1(x_{i+1}-x_i)^{m-j-1}](y-y_1)^{n-1}+$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+C_0^k(x_{i+1}-x_0)^{m-j-1}+C_1^k(x_{i+1}-x_1)^{m-j-1}+\ldots+C_i^k(x_{i+1}-x_i)^{m-j-1}](y-y_k)^{n-1}\},$$

pour $j = 0, 1, \ldots, q-1$.

En intégrant l'équation (77), une fois, nous avons

$$\frac{\partial^{q-1} \varphi_{i+1}^k}{\partial x^{q-1}} =$$

$$= \frac{(-1)^q}{n!\,(n-1)!}\{[C_0^0(x-x_0)^n+C_1^0(x-x_1)^n+\ \ldots\ +C_{i+1}^0(x-x_{i+1})^n](y-y_0)^{n-1}+$$

$$+[C_0^1(x-x_0)^n+C_1^1(x-x_1)^n+\ \ldots\ +C_{i+1}^1(x-x_{i+1})^n](y-y_1)^{n-1}+$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+[C_0^k(x-x_0)^n+C_1^k(x-x_1)^n+\ldots+C_{i+1}^k(x-x_{i+1})^n](y-y_k)^{n-1}\} + B(y)$$

où $B(y)$ est une fonction à déterminer par la condition (78) correspondant à $j = q-1$. On trouve $B(y) = 0$. De la même manière on trouve

$$\frac{\partial^{q-2} \varphi_{i+1}^k}{\partial x^{q-1}} = \frac{(-1)^q}{(n+1)!\,(n-1)!} \times$$

$$\times\{[C_0^0(x-x_0)^{n+1}+C_1^0(x-x_1)^{n+1}+\ldots+C_{i+1}^0(x-x_{i+1})^{n+1}](y-y_0)^{n-1}+$$

$$+[C_0^1(x-x_0)^{n+1}+C_1^1(x-x_1)^{n+1}+\ldots+C_{i+1}^1(x-x_{i+1})^{n+1}]\,(y-y_1)^{n-1}+$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+[C_0^k(x-x_0)^{n+1}+C_1^k(x-x_1)^{n+1}+\ldots+C_{i+1}^k(x-x_{i+1})^{n+1}]\,(y-y_k)^{n-1}\}$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\varphi_{i+1}^{k}(x, y) = \frac{(-1)^q}{(m-1)!\,(n-1)!} \times$$

$$\times\{[C_0^0(x-x_0)^{m-1}+C_1^0(x-x_1)^{m-1}+\ldots+C_{i+1}^0(x-x_{i+1})^{m-1}](y-y_0)^{n-1}+$$

$$+[C_0^1(x-x_0)^{m-1}+C_1^1(x-x_1)^{m-1}+\ldots+C_{i+1}^1(x-x_{i+1})^{m-1}](y-y_1)^{n-1}+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+[C_0^k(x-x_0)^{m-1}+C_1^k(x-x_1)^{m-1}+\ldots+C_{i+1}^k(x-x_{i+1})^{m-1}]\,(y-y_k)^{n-1}\}.$$

Cette formule étant identique à la formule (76) où l'on remplace i par $i+1$, montre que la formule (76) est tout à fait générale.

10. Les fonctions $\varphi_i^k(x, y)$ sont ainsi bien déterminées. En considérant les constantes C_i^k, où $i = 0, 1, \ldots, m-1$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ comme données la formule (42) devient

$$\iint_D \Phi(x, y)\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}dxdy = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} C_i^k f(x_i, y_k) - \tag{79}$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{m-1}^0}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_m, y_0)\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_m, y_0) +$$

$$+\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\left[-\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{m-1}^t}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_m, y_t)+\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{m-1}^{t-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_m, y_t)\right]\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_m, y_t) -$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_0^{n-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_0, y_n)\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_0, y_n) +$$

$$+\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{r=0}^{n-1}\left[\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{s-1}^{n-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_s, y_n)-\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_s^{n-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_s, y_n)\right]\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_s, y_n) +$$

$$+\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\partial^{2(n-r-1)}\psi_{m-1}^{n-1}}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r-1}}(x_m, y_n)\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_m, y_n) -$$

$$-\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_i^{n-1}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}(x, y_n)\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x, y_n)\,dx -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}}\frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_{m-1}^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}(x_m, y)\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_m, y)dy +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\int_{y_k}^{y_{k+1}}\frac{\partial^j\varphi_{m-1}^k}{\partial x^j}(x_m, y)\frac{\partial^{m-n-j-1} f}{\partial x^{m-j-1}\partial y^n}(x_m, y)\,dy$$

En ajoutant de nouvelles constantes

$$C_m^0 = -\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_{m-1}^0}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_m, y_0),$$

$$C_m^t = -\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_{m-1}^t}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_m, y_t)+\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_{m-1}^{t-1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_m, y_t) \qquad (t=1, 2, \ldots, n-1)$$

$$C_0^n = -\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_0^{n-1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_0, y_n), \tag{80}$$

$$C_s^n = -\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_s^{n-1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_s, y_n)+\frac{\partial^{2(n-1)}\psi_{s-1}^{n-1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_s, y_n) \qquad (s=1, 2, \ldots, m-1)$$

$$C_m^n = \frac{\partial^{2(n-1)}\psi_{m-1}^{n-1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{n-1}}(x_m, y_n),$$

nous chercherons à déterminer toutes ces constantes C_i^k où $i = 0, 1, \ldots, m$ et $k = 0, 1, \ldots, n$ de manière que dans les intégrales

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_i^{n-1}}{\partial x^{n-r}\partial y^{n-r-1}}(x, y_n)\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x, y_n)\,dx,$$

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}}\frac{\partial^{2(n-r)-1}\psi_{m-1}^k}{\partial x^{n-r-1}\partial y^{n-r}}(x_m, y)\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_m, y)\,dy,$$

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}}\frac{\partial^j\varphi_{m-1}^k}{\partial x^j}(x_m, y)\frac{\partial^{m+n-j-1} f}{\partial x^{m-j-1}\partial y^n}(x_m, y)\,dy,$$

les coefficients de $\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x, y_n)$ soient nuls pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$ et $i = 0, 1, \ldots, m-1$; les coefficients de $\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_m, y)$ soient nuls pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$ et $k = 0, 1, \ldots, n-1$; les coefficients de $\frac{\partial^{m+n-j-1} f}{\partial x^{m-j-1} \partial y^n}(x_m, y)$ soient nuls pour $j = 0, 1, \ldots, q-1$ et $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Dans les intégrales précédentes les coefficients de $f(x, y_n)$, $f(x_m, y)$ sont nuls, parceque $\frac{\partial^{2(n-1)} \psi_i^k}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}}$ étant constantes, les dérivées partielles $\frac{\partial^{2n-1} \psi_i^k}{\partial x^n \partial y^{n-1}}$, $\frac{\partial^{2n-1} \psi_i^k}{\partial x^{n-1} \partial y^n}$ sont nulles.

Nous poserons donc les conditions suivantes

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_i^{n-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}}\right)(x, y_n) = 0 \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots, n-1 \\ i = 0, 1, \ldots, m-1 \end{pmatrix} \tag{81}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_{m-1}^{k}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}}\right)(x_m, y) = 0 \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots, n-1 \\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix} \tag{82}$$

$$\frac{\partial^j \varphi_{m-1}^k}{\partial x^j}(x_m, y) = 0 \qquad \begin{pmatrix} j = 0, 1, \ldots, q-1 \\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix} \tag{83}$$

D'après les équations (69) nous avons

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_{m-1}^{k}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}}\right)(x_m, y) =$$

$$= \frac{1}{r!(r-1)!}\{[C_0^0(x_m - x_0)^r + C_1^0(x_m - x_1)^r + \ldots + C_{m-1}^0(x_m - x_{m-1})^r](y - y_0)^{r-1} +$$
$$+ [C_0^1(x_m - x_0)^r + C_1^1(x_m - x_1)^r + \ldots + C_{m-1}^1(x_m - x_{m-1})^r](y - y_1)^{r-1} +$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots +$$
$$+ [C_0^k(x_m - x_0)^r + C_1^k(x_m - x_1)^r + \ldots + C_{m-1}^k(x_m - x_{m-1})^r](y - y_k)^{r-1}\}$$

et d'après les équations (76) nous avons

$$\frac{\partial^j \varphi_{m-1}^k}{\partial x^j}(x_m, y) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-j-1)!(n-1)!} \times$$

$$\times \{[C_0^0(x_m - x_0)^{m-j-1} + C_1^0(x_m - x_1)^{m-j-1} + \ldots + C_{m-1}^0(x_m - x_{m-1})^{m-j-1}](y - y_0)^{n-1} +$$
$$+ [C_0^1(x_m - x_0)^{m-j-1} + C_1^1(x_m - x_1)^{m-j-1} + \ldots + C_{m-1}^1(x_m - x_{m-1})^{m-j-1}](y - y_1)^{n-1} +$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots +$$
$$+ [C_0^k(x_m - x_0)^{m-j-1} + C_1^k(x_m - x_1)^{m-j-1} + \ldots + C_{m-1}^k(x_m - x_{m-1})^{m-j-1}](y - y_k)^{n-1}\}.$$

En écrivant que les conditions aux limites (82) et (83) sont vérifiées pour $k = 0$, nous avons pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$ et $j = 0, 1, \ldots, q-1$ les équations

$$\begin{aligned} &C_0^0(x_m - x_0) + C_1^0(x_m - x_1) + \ldots + C_{m-1}^0(x_m - x_{m-1}) = 0, \\ &C_0^0(x_m - x_0)^2 + C_1^0(x_m - x_1)^2 + \ldots + C_{m-1}^0(x_m - x_{m-1})^2 = 0, \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \\ &C_0^0(x_m - x_0)^{m-1} + C_1^0(x_m - x_1)^{m-1} + \ldots + C_{m-1}^0(x_m - x_{m-1})^{m-1} = 0, \end{aligned} \tag{84}$$

pour déterminer $C_0^0, C_1^0, \ldots, C_{m-1}^0$.

En écrivant que les conditions aux limites (82) et (83) sont vérifiées pour $k = 1$, et tenant compte des équations (84), nous avons les équations

$$\begin{aligned} &C_0^1(x_m - x_0) + C_1^1(x_m - x_1) + \ldots + C_{m-1}^1(x_m - x_{m-1}) = 0, \\ &C_0^1(x_m - x_0)^2 + C_1^1(x_m - x_1)^2 + \ldots + C_{m-1}^1(x_m - x_{m-1})^2 = 0, \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \\ &C_0^1(x_m - x_0)^{m-1} + C_1^1(x_m - x_1)^{m-1} + \ldots + C_{m-1}^1(x_m - x_{m-1})^{m-1} = 0, \end{aligned} \tag{85}$$

pour déterminer $C_0^1, C_1^1, \ldots, C_{m-1}^1$.

En général, nous avons les équations

$$\begin{aligned} &C_0^k(x_m - x_0) + C_1^k(x_m - x_1) + \ldots + C_{m-1}^k(x_m - x_{m-1}) = 0, \\ &C_0^k(x_m - x_0)^2 + C_1^k(x_m - x_1)^2 + \ldots + C_{m-1}^k(x_m - x_{m-1})^2 = 0, \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \\ &C_0^k(x_m - x_0)^{m-1} + C_1^k(x_m - x_1)^{m-1} + \ldots + C_{m-1}^k(x_m - x_{m-1})^{m-1} = 0, \end{aligned} \tag{86}$$

pour déterminer $C_0^k, C_1^k, \ldots, C_{m-1}^k$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

D'autre part, d'après les équations (69) nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_i^{n-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}}\right)(x, y_n) =$$

$$= \frac{1}{r!(r-1)!}\{[C_0^0(y_n - y_0)^r + C_0^1(y_n - y_1)^r + \ldots + C_0^{n-1}(y_n - y_{n-1})^r](x - x_0)^{r-1} +$$
$$+ [C_1^0(y_n - y_0)^r + C_1^1(y_n - y_1)^r + \ldots + C_1^{n-1}(y_n - y_{n-1})^r](x - x_1)^{r-1} +$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots +$$
$$+ [C_i^0(y_n - y_0)^r + C_i^1(y_n - y_1)^r + \ldots + C_i^{n-1}(y_n - y_{n-1})^r](x - x_i)^{r-1}\}$$

En écrivant que les conditions aux limites (81) sont vérifiées pour $i = 0$, nous avons pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$ les équations

$$
(87)\qquad
\begin{aligned}
&C_0^0(y_n-y_0) + C_0^1(y_n-y_1) + \ldots + C_0^{n-1}(y_n-y_{n-1}) = 0,\\
&C_0^0(y_n-y_0)^2 + C_0^1(y_n-y_1)^2 + \ldots + C_0^{n-1}(y_n-y_{n-1})^2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_0^0(y_n-y_0)^{n-1} + C_0^1(y_n-y_1)^{n-1} + \ldots + C_0^{n-1}(y_n-y_{n-1})^{n-1} = 0,
\end{aligned}
$$

pour déterminer $C_0^0, C_0^1, \ldots, C_0^{n-1}$.

En général, nous avons les équations

$$
(88)\qquad
\begin{aligned}
&C_i^0(y_n-y_0) + C_i^1(y_n-y_1) + \ldots + C_i^{n-1}(y_n-y_{n-1}) = 0,\\
&C_i^0(y_n-y_0)^2 + C_i^1(y_n-y_1)^2 + \ldots + C_i^{n-1}(y_n-y_{n-1})^2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_i^0(y_n-y_0)^{n-1} + C_i^1(y_n-y_1)^{n-1} + \ldots + C_i^{n-1}(y_n-y_{n-1})^{n-1} = 0,
\end{aligned}
$$

pour déterminer $C_i^0, C_i^1, \ldots, C_i^{n-1}$, pour $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Si les constantes $C_0^k, C_1^k, \ldots, C_{m-1}^k$ vérifient les équations (86) pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$, les coefficients de $\dfrac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_m, y_n)$ dans la formule (79) sont nuls pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

En effet, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2(n-r-1)} \psi_{m-1}^{n-1}}{\partial x^{n-r-1} \partial y^{n-r-1}}(x_m, y_n) =\\
&= \frac{1}{(r!)^2}\{[C_0^0\,(x_m-x_0)^r + C_1^0\,(x_m-x_1)^r + \ldots + C_{m-1}^0(x_m-x_{m-1})^r]\,(y_n-y_0)^r +\\
&\quad + [C_0^1\,(x_m-x_0)^r + C_1^1\,(x_m-x_1)^r + \ldots + C_{m-1}^1(x_m-x_{m-1})^r]\,(y_n-y_1)^r +\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +\\
&\quad + [C_0^{n-1}(x_m-x_0)^r + C_1^{n-1}(x_m-x_1)^r + \ldots + C_{m-1}^{n-1}(x_m-x_{m-1})^r]\,(y_n-y_{n-1})^r\} =\\
&= \frac{1}{(r!)^2}\{[C_0^0\,(y_n-y_0)^r + C_0^1\,(y_n-y_1)^r + \ldots + C_0^{n-1}(y_n-y_{n-1})^r]\,(x_m-x_0)^r +\\
&\quad + [C_1^0\,(y_n-y_0)^r + C_1^1\,(y_n-y_1)^r + \ldots + C_1^{n-1}\,(y_n-y_{n-1})^r]\,(x_n-x_1)^r +\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +\\
&\quad + [C_{m-1}^0(y_n-y_0)^r + C_{m-1}^1(y_n-y_1)^r + \ldots + C_{m-1}^{n-1}(y_n-y_{n-1})^r](x_m-x_{m-1})^r\}
\end{aligned}
$$

et le second membre est nul d'après les équations (88), pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$

De même on vérifie aisément que les coefficients de

$$
\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_m, y_0),\ \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_m, y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)
$$

$$
\frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_0, y_n),\ \frac{\partial^{2r} f}{\partial x^r \partial y^r}(x_s, y_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, m-1)
$$

dans la formule (79) sont nuls pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

Il résulte alors que la formule (79) se réduit à

$$
(89)\qquad \iint_D \Phi(x, y)\, \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}\, dx\, dy = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} C_i^k f(x_i, y_k)
$$

et il nous reste à démontrer que le second membre de cette formule est la différence divisée d'ordre (m, n), de la fonction $f(x, y)$ sur les noeuds (x_i, y_k) où $i = 0, 1, \ldots, m$ et $k = 0, 1, \ldots, n$.

11. D'après les équations (32), on peut écrire les équations (80) sous la forme

$$
(90)\qquad
\begin{cases}
C_0^0 + C_1^0 + \ldots + C_{m-1}^0 + C_m^0 = 0,\\
C_0^1 + C_1^1 + \ldots + C_{m-1}^1 + C_m^1 = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_0^{n-1} + C_1^{n-1} + \ldots + C_{m-1}^{n-1} + C_m^{n-1} = 0,
\end{cases}
$$

$$
(91)\qquad
\begin{cases}
C_0^0 + C_0^1 + \ldots + C_0^{n-1} + C_0^n = 0,\\
C_1^0 + C_1^1 + \ldots + C_1^{n-1} + C_1^n = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_{m-1}^0 + C_{m-1}^1 + \ldots + C_{m-1}^{n-1} + C_{m-1}^n = 0,
\end{cases}
$$

$$
(92)\qquad
\begin{aligned}
C_m^n = {} & C_0^0 + C_1^0 + \ldots + C_{m-1}^0\\
& + C_0^1 + C_1^1 + \ldots + C_{m-1}^1\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots +\\
& + C_0^{n-1} + C_1^{n-1} + \ldots + C_{m-1}^{n-1}.
\end{aligned}
$$

En ajoutant toutes les équations (90) membre à membre, on voit que l'équation (92) peut s'écrire sous la forme

$$C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^{n-1} + C_m^n = 0. \tag{93}$$

De même en ajoutant toutes les équations (91) membre à membre, on voit que l'équation (92) peut s'écrire sous la forme

$$C_0^n + C_1^n + \ldots + C_{m-1}^n + C_m^n = 0. \tag{94}$$

Donc on peut ajouter aux équations (90), l'équation (94) et on peut ajouter aux équations (91), l'équation (93).

Nous pouvons donc ecrire les équations

$$\begin{aligned} &C_0^0 + C_1^0 + \ldots + C_{m-1}^0 + C_m^0 = 0,\\ &C_0^1 + C_1^1 + \ldots + C_{m-1}^1 + C_m^1 = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &C_0^n + C_1^n + \ldots + C_{m-1}^n + C_m^n = 0, \end{aligned} \tag{95}$$

et les équations

$$\begin{aligned} &C_0^0 + C_0^1 + \ldots + C_0^{n-1} + C_0^n = 0,\\ &C_1^0 + C_1^1 + \ldots + C_1^{n-1} + C_1^n = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^{n-1} + C_m^n = 0. \end{aligned} \tag{96}$$

Aux équations (88) valables pour $i = 0, 1, \ldots, m-1$ on peut ajouter le système d'équations (88), correspondant à $i = m$.

En effet, multiplions les deux membres de la première équation (90) par $(y_n - y_0)^r$, de la seconde équation (90) par $(y_n - y_1)^r, \ldots$, de la dernière équation (90) par $(y_n - y_{n-1})^r$ et ajoutons toutes ces équations membre à membre. En tenant compte des équations (87) nous obtenons l'équation

$$C_m^0(y_n - y_0)^r + C_m^1(y_n - y_1)^r + \ldots + C_m^{n-1}(y_n - y_{n-1})^r = 0$$

pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

Donc le système (88) est valable pour $i = 0, 1, \ldots, m$.

De même aux équations (86) valables pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$, on peut ajouter le système d'équations (86) correspondant à $k = n$.

En effet, multiplions les deux membres de la première équation (91) par $(x_m - x_0)^r$, de la seconde équation (91) par $(x_m - x_1)^r, \ldots$ de la dernière équation (91) par $(x_m - x_{m-1})^r$ et ajoutons toutes ces équations membre à membre. En tenant compte des équations (86), nous obtenons l'équation

$$C_0^n(x_m - x_0)^r + C_1^n(x_m - x_1)^r + \ldots + C_{m-1}^n(x_m - x_{m-1})^r = 0$$

pour $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

Donc le système d'équation (86) est valable pour $k = 0, 1, \ldots, n$.

Considérons maintenant le système d'équations (86) et ajoutons-lui l'équation.

$$C_0^k + C_1^k + \ldots + C_{m-1}^k + C_m^k = 0$$

On peut alors écrire ce système sous la forme

$$\begin{aligned} &C_0^k + C_1^k + \ldots + C_m^k = 0\\ &C_0^k x_0 + C_1^k x_1 + \ldots + C_m^k x_m = 0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &C_0^k x_0^{m-1} + C_1^k x_1^{m-1} + \ldots + C_m^k x_m^{m-1} = 0 \end{aligned} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{97}$$

De même considérons le système d'équations (88) et ajoutons-lui l'équation

$$C_i^0 + C_i^1 + \ldots + C_i^{n-1} + C_i^n = 0.$$

On peut alors écrire ce système sous la forme

$$\begin{aligned} &C_i^0 + C_i^1 + \ldots + C_i^n = 0.\\ &C_i^0 y_0 + C_i^1 y_1 + \ldots + C_i^n y = 0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &C_i^0 y_0^{n-1} + C_i^1 y_1^{n-1} + \ldots + C_i^n y_n^{n-1} = 0. \end{aligned} \qquad (i = 0, 1, \ldots, m) \tag{98}$$

On tire du système (97)

$$\frac{C_0^k}{V(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \ldots = \frac{C_i^k}{(-1)^i V(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)} = \ldots = \frac{C_m^k}{(-1)^m V(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})} = \lambda_k \tag{99}$$

où les λ_k sont des constantes

On déduit des équations (99) que

$$
(100) \quad \begin{aligned}
C_i^0 &= (-1)^i V(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)\,\lambda_0 \\
C_i^1 &= (-1)^i V(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)\,\lambda_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
C_i^n &= (-1)^i V(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)\,\lambda_n
\end{aligned}
$$

En écrivant que les $C_i^0, C_i^1, \ldots, C_i^n$ ainsi déterminés, vérifient les systèmes (98) on trouve que $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ satisfont aux équations

$$
(101) \quad \begin{aligned}
\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n &= 0 \\
\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_0 y_0^{n-1} + \lambda_1 y_1^{n-1} + \ldots + \lambda_n y_n^{n-1} &= 0
\end{aligned}
$$

et par suite

$$
\frac{\lambda_0}{V(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{\lambda_k}{(-1)^k V(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{\lambda_n}{(-1)^n V(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})} = \lambda
$$

où λ est une constante.

Nous avons donc

$$
\lambda_k = (-1)^k \lambda\, V(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)
$$

Le problème que nous traitons étant homogène en C_i^k nous pouvons fixer le facteur λ, en prenant

$$
\lambda = \frac{1}{V(x_0, x_1, \ldots, x_m)\, V(y_0, y_1, \ldots, y_n)}
$$

Il résulte que

$$
(102) \quad C_i^k = (-1)^{i+k} \frac{V(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)}{V(x_0, x_1, \ldots, x_m)} \; \frac{V(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)}{V(y_0, y_1, \ldots, y_n)}
$$

et par suite la formule (89) devient

$$
(103) \quad \iint_D \Phi(x, y) \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}\, dxdy =
$$

$$
\sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{i+k} \frac{V(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)}{V(x_0, x_1, \ldots, x_m)} \; \frac{V(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)}{V(y_0, y_1, \ldots, y_n)} f(x_i, y_k)
$$

ou bien d'après la formule (9)

$$
(104) \quad \begin{bmatrix} x_0, x_1, \ldots, x_m \\ y_0, y_1, \ldots, y_n \end{bmatrix} ; f \Bigg] = \iint_D \Phi(x, y) \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}\, dx\, dy.
$$

Ainsi nous avons mis la différence divisée d'ordre (m, n) de la fonction $f(x, y)$ sur les noeuds (x_i, y_k), où $i = 0, 1, \ldots, m$ et $k = 0, 1, \ldots, n$ sous la forme d'une intégrale double où la fonction $\Phi(x, y)$, coïncide dans chaque rectangle D_i^k avec la fonction $\varphi_i^k(x, y)$ donnée par la formule (76), les constantes C_i^k étant données par les formules (102).

En appliquant la même méthode, on démontre que dans le cas $n = 1$, $m > 1$, nous avons la formule (103) où le déterminant $V(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)$ est remplacé par 1. Nous avons aussi la formule (104), où les fonctions $\varphi_i^0(x, y)$ sont données par les formules (76) où l'on remplace n par 1.

De même on démontre que dans le cas $m = 1$, $n = 1$ nous avons la formule (103), où les déterminants $V(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ et $V(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)$ sont remplacés par 1. La formule (104) devient dans ce cas

$$
\left[\begin{matrix} x_0, x_1 \\ y_0, y_1 \end{matrix} ; f \right] = \iint_D \varphi_0^0 \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy.
$$

avec

$$
\varphi_0^0 = \frac{1}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)}
$$

12. Nous faisons une remarque sur les coefficients C_i^k de la différence divisée (102), qui donne un moyen pratique pour le calcul de ces coefficients.

Considérons pour cela les développements

$$\frac{1}{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_m)} = \frac{A_0}{x-x_0} + \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_m}{x-x_m}$$

$$\frac{1}{(y-y_0)(y-y_1)\ldots(y-y_n)} = \frac{B_0}{y-y_0} + \frac{B_1}{y-y_1} + \ldots + \frac{B_n}{y-y_n}.$$

On sait que

$$A_n = (-1)^{m+i}\,\frac{V(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)}{V(x_0, x_1, \ldots, x_m)}$$

$$B_k = (-1)^{n+k}\,\frac{V(y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)}{V(y_0, y_1, \ldots, y_n)},$$

d'où il résulte d'après la formule (102) que

(105) $$C_i^k = (-1)^{m+n} A_i B_k.$$

Une conclusion importante de ces formules est que les seconds membres des équations (32) que nous désignons par Q_i^k ne sont pas nuls. En effet d'après les formules (105) nous avons

(106) $$Q_i^k = (-1)^{m+n}(A_0 + A_1 + \ldots + A_i)(B_0 + B_1 + \ldots + B_k)$$

et nous avons démontré [1] que

$$(-1)^{m+i}(A_0 + A_1 + \ldots + A_i) > 0, \quad (-1)^{n+k}(B_0 + B_1 + \ldots + B_k) > 0,$$

d'où il résulte que $Q_i^k \neq 0$ et a le signe de $(-1)^{i+k}$.

§. 4. Étude de la fonction $\Phi(x, y)$ dans le rectangle D

13. Nous voulons maintenant démontrer que la fonction $\Phi(x, y)$ de la formule (104) a le signe de $(-1)^{m-n}$ dans le rectangle D, ouvert. Nous savons que la fonction $\Phi(x, y)$ s'annule sur les côtés de ce rectangle.

Pour cela nous démontrerons que pour chaque section faite dans la surface $z = \Phi(x, y)$ par le plan $y =$ const., la fonction $\Phi(x, y)$ a le signe de $(-1)^{m-n}$ dans l'intervalle (x_0, x_m). Nous devons donc étudier les fonctions $\varphi_i^k(x, y)$ considérées comme des fonctions de x.

Prenons donc les fonctions $\varphi_i^k(x, y)$ attachées aux rectangles D_i^k compris entre les droites $y = y_k$, $y = y_{k+1}$ et considérons $y =$ const. Dans ce cas les $\varphi_i^k(x, y)$ sont des fonctions de x et nous poserons

(107) $$\chi_i(x) = \varphi_i^k(x, y)$$

pour $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Nous remarquons d'abord que les fonctions $\chi_i(x)$, vérifient les conditions suivantes

(108) $$\chi_0(x_0) = 0,\ \chi_0'(x_0) = 0, \ldots, \chi_0^{(m-2)}(x_0) = 0$$

(109) $$\begin{cases} \chi_1(x_1) = \chi_0(x_1),\ \chi_1'(x_1) = \chi_0'(x_1), \ldots, \chi_1^{(m-2)}(x_1) = \chi_0^{(m-2)}(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \chi_{m-1}(x_{m-1}) = \chi_{m-2}(x_{m-1}),\ \chi_{m-1}'(x_{m-1}) = \chi_{m-2}'(x_{m-1}), \\ \quad \ldots, \chi_{m-1}^{(m-2)}(x_{m-1}) = \chi_{m-2}^{(m-2)}(x_{m-1}) \end{cases}$$

(110) $$\chi_{m-1}(x_m) = 0,\ \chi_{m-1}'(x_m) = 0, \ldots, \chi_{m-1}^{(m-2)}(x_m) = 0$$

En effet, d'après les formules (76) nous avons

$$\chi_0(x) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-1)!\,(n-1)!}\Big[C_0^0(y-y_0)^{n-1} + C_0^1(y-y_1)^{n-1} + \ldots + \\ + C_0^k(y-y_k)^{n-1}\Big](x-x_0)^{m-1}$$

d'où il résulte les conditions (108).

D'autre part, d'après les mêmes formules, nous avons

$$\chi_{j+1}(x) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-1)!\,(n-1)!}\Big\{\Big[C_0^0(x-x_0)^{m-1} + C_1^0(x-x_1)^{m-1} + \ldots + C_j^0(x-x_j)^{m-1} + \\ + C_{j+1}^0(x-x_{j+1})^{m-1}\Big](y-y_0)^{n-1} + \\ + \Big[C_0^1(x-x_0)^{m-1} + C_1^1(x-x_1)^{m-1} + \ldots + C_j^1(x-x_j)^{m-1} + \\ + C_{j+1}^1(x-x_{j+1})^{m-1}\Big](y-y_1)^{n-1} + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + \Big[C_0^k(x-x_0)^{m-1} + C_1^k(x-x_1)^{m-1} + \ldots + C_j^k(x-x_j)^{m-1} + \\ + C_{j+1}^k(x-x_{j+1})^{m-1}\Big](y-y_k)^{n-1}\Big\}$$

d'où il résulte que

$$\chi_{j+1}(x_{j+1}) = \chi_j(x_{j+1}),\ \chi'_{j+1}(x_{j+1}) = \chi'_j(x_{j+1}),\ \ldots,\ \chi_{j+1}^{(m-2)}(x_{j+1}) = \chi_j^{(m-2)}(x_{j+1})$$

pour $j = 0, 1, \ldots, m-2$, ce qui veut dire que les conditions (109) sont vérifiées.

Enfin nous avons

$$\chi_{m-1}(x) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-1)!\,(n-1)!} \times$$
$$\times\{[C_0^0(x-x_0)^{m-1} + C_1^0(x-x_1)^{m-1} + \ldots + C_{m-1}^0(x-x_{m-1})^{m-1}](y-y_0)^{n-1} +$$
$$+ [C_0^1(x-x_0)^{m-1} + C_1^1(x-x_1)^{m-1} + \ldots + C_{m-1}^1(x-x_{m-1})^{m-1}](y-y_1)^{n-1} +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ [C_0^k(x-x_0)^{m-1} + C_1^k(x-x_1)^{m-1} + \ldots + C_{m-1}^k(x-x_{m-1})^{m-1}](y-y_k)^{n-1}\}$$

et l'on voit d'après les équations (86) que les conditions (110) sont vérifiées.

De même considérons les fonctions $\varphi_i^k(x, y)$ attachées aux rectangles D_i^k compris entre les droites $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ et prenons $x = \text{const.}$ Dans ce cas les $\varphi_i^k(x, y)$ sont des fonctions de y et nous poserons

(111) $$\theta_k(y) = \varphi_i^k(x, y)$$

Les fonctions $\theta_k(y)$ vérifient les conditions suivantes

(112) $$\theta_0(y_0) = 0,\quad \theta'_0(y_0) = 0, \ldots,\ \theta_0^{(n-2)}(y_0) = 0.$$

(113) $$\begin{cases} \theta_1(y_1) = \theta_0(y_1),\ \theta'_1(y_1) = \theta'_0(y_1), \ldots,\ \theta_1^{(n-2)}(y_1) = \theta_0^{(n-2)}(y_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta_{n-1}(y_{n-1}) = \theta_{n-2}(y_{n-1}),\ \theta'_{n-1}(y_{n-1}) = = \theta'_{n-2}(y_{n-1}), \ldots \\ \qquad \ldots,\ \theta_{n-1}^{(n-2)}(y_{n-1}) = \theta_{n-2}^{(n-2)}(y_{n-1}) \end{cases}$$

(114) $$\theta_{n-1}(y_n) = 0,\ \theta'_{n-1}(y_n) = 0, \ldots,\ \theta_{n-1}^{(n-2)}(y_n) = 0$$

En effet, d'après les formules (76), nous pouvons écrire

$$\theta_k(y) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-1)!\,(n-1)!} \times$$
$$\times\{[C_0^0(y-y_0)^{n-1} + C_0^1(y-y_1)^{n-1} + \ldots + C_0^k(y-y_k)^{n-1}](x-x_0)^{m-1} +$$
$$+ [C_1^0(y-y_0)^{n-1} + C_1^1(y-y_1)^{n-1} + \ldots + C_1^k(y-y_k)^{n-1}](x-x_1)^{m-1} +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ [C_i^0(y-y_0)^{n-1} + C_i^1(y-y_1)^{n-1} + \ldots + C_i^k(y-y_k)^{n-1}](x-x_i)^{m-1}\}.$$

D'après ces formules, les conditions (112) et (113), sont évidentes. Les conditions (114) sont les conséquences des équations (88).

Pour démontrer que les fonctions $\chi_i(x)$ ont le signe de $(-1)^{m-n}$ dans les intervalles $(x_i, x_{i+1}]$, pour $i = 0, 1, \ldots, m-2$ et que la fonction $\chi_{m-1}(x)$ a le signe de $(-1)^{m-n}$ dans l'intervalle (x_{m-1}, x_m) nous allons démontrer dans les nos. suivants que les dérivées $\chi_i^{(m-1)}(x)$ ne sont pas nulles dans les intervalles respectifs.

14. La dérivée d'ordre $m-1$ de la fonction $\chi_i(x)$ est

$$\chi_i^{(m-1)}(x) = \frac{(-1)^{m-n}}{(n-1)!}[(C_0^0 + C_1^0 + \ldots + C_i^0)(y-y_0)^{n-1} +$$
$$+ (C_0^1 + C_1^1 + \ldots + C_i^1)(y-y_1)^{n-1} +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ (C_0^k + C_1^k + \ldots + C_i^k)(y-y_k)^{n-1}],$$

ou bien d'après les formules (105)

(115) $$\chi_i^{(m-1)}(x) = \frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_i}{(n-1)!} \times$$
$$\times [B_0(y-y_0)^{n-1} + B_1(y-y_1)^{n-1} + \ldots + B_k(y-y_k)^{n-1}],$$

Nous avons rappelé au nr. 12, que la somme $A_0 + A_1 + \ldots + A_i$ n'est pas nulle et dans les nos. suivants nous démontrerons que la somme

(116) $$h_k = B_0(y-y_0)^{n-1} + B_1(y-y_1)^{n-1} + \ldots + B_k(y-y_k)^{n-1}],$$

est différente de zéro pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$ et lorsque y prend une valeur fixe de l'intervalle $(y_k, y_{k+1}]$, pour $k = 0, 1, \ldots, n-2$, ou de l'intervalle (y_{n-1}, y_n) pour $k = n-1$. Nous supposons aussi que $n > 1$.

Considérons la fonction rationnelle de Y

$$\frac{(y-Y)^{n-1}}{(Y-y_0)(Y-y_1)\dots(Y-y_n)}$$

et le développement en fonctions rationnelles simples

$$(117)\qquad \frac{(y-Y)^{n-1}}{(Y-y_0)(Y-y_1)\dots(Y-y_n)} = \frac{B_0'}{Y-y_0} + \frac{B_1'}{Y-y_1} + \dots + \frac{B_k'}{Y-y_k} + \dots$$

où B_j' est le résidu relativement au pôle y_j $(j = 0, 1, \dots)$.

Nous avons

$$B_j' = \frac{(y-y_j)^{n-1}}{(y_j-y_0)(y_j-y_1)\dots(y_j-y_n)} = B_j(y-y_j)^{n-1}$$

et par suite h_k, peut s'écrire

$$(118)\qquad h_k = B_0' + B_1' + \dots + B_k'.$$

Il s'agit maintenant de démontrer que *la somme des résidus* $B_0' + B_1' + \dots + B_k'$ *du développement* (117) *n'est pas nulle*, pour $k = 0, 1, \dots, n-1$ et lorsque y prend une valeur fixe de l'intervalle $(y_k, y_{k+1}]$ pour $k = 0, 1, \dots, n-2$ ou de l'intervalle (y_{n-1}, y_n) pour $k = n-1$.

15. Faisons les opérations indiquées par les formules suivantes

$$\frac{(y-Y)^{n-1}}{(Y-y_0)(Y-y_1)\dots(Y-y_n)} - \frac{B_0'}{Y-y_0} = \frac{Q_1(Y)}{(Y-y_1)(Y-y_2)\dots(Y-y_n)}$$

$$(119)\qquad \frac{Q_1(Y)}{(Y-y_1)(Y-y_2)\dots(Y-y_n)} - \frac{B_1}{Y-y_1} = \frac{Q_2(Y)}{(Y-y_2)(Y-y_3)\dots(Y-y_n)}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{Q_k(Y)}{(Y-y_k)(Y-y_{k+1})\dots(Y-y_n)} - \frac{B_k'}{Y-y_k} = \frac{Q_{k+1}(Y)}{(Y-y_{k+1})(Y-y_{k+2})\dots(Y-y_n)}$$

où $Q_1(Y), Q_2(Y), \dots, Q_{k+1}(Y)$ sont des polynomes en Y de degré $n-1$, $n-2, \dots, n-k-1$ et nous avons

$$Q_1(Y) = -B_0' Y^{n-1} + \dots$$

$$Q_2(Y) = -(B_0' + B_1')Y^{n-2} + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Q_{k+1}(Y) = -(B_0' + B_1' + \dots + B_k')Y^{n-k-1} + \dots$$

En ajoutant membre à membre les équations (119), et en multipliant ensuite par $(Y-y_{k+1})(Y-y_{k+2})\dots(Y-y_n)$, nous aurons

$$(120)\qquad \frac{(y-Y)^{n-1}}{(Y-y_0)(Y-y_1)\dots(Y-y_k)} -$$

$$-\left(\frac{B_0'}{Y-y_0} + \frac{B_1'}{Y-y_1} + \dots + \frac{B_k'}{Y-y_k}\right)(Y-y_{k+1})(Y-y_{k+2})\dots(Y-y_n) = Q_{k+1}(Y)$$

En posant

$$(121)\qquad f(Y) = \frac{(y-Y)^{n-1}}{(Y-y_0)(Y-y_1)\dots(Y-y_k)}$$

et en faisant dans l'identité (120), $Y = y_{k+1}, Y = y_{k+2}, \dots, Y = y_n$, nous aurons

$$(122)\qquad \begin{gathered} Q_{k+1}(y_{k+1}) = f(y_{k+1}) \\ \dots\dots\dots \\ Q_{k+1}(y_n) = f(y_n) \end{gathered}$$

Ces relations déterminent le polynome $Q_{k+1}(Y)$.

En effet, en écrivant le polynome $Q_{k+1}(Y)$ sous la forme

$$Q_{k+1}(Y) = -(B_0' + B_1' \dots + B_k')Y^{n-k-1} + C_1 Y^{n-k-2} + \dots + C_{n-k-1}$$

les relations (122), donnent les équations

$$-(B_0' + B_1' + \dots + B_k')y_{k+1}^{n-k-1} + C_1 y_{k+1}^{n-k-2} + \dots + C_{n-k-1} = f(y_{k+1})$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$-(B_0' + B_1' + \dots + B_k')y_n^{n-k-1} + C_1 y_n^{n-k-2} + \dots + C_{n-k-1} = f(y_n)$$

pour déterminer les coefficients $-(B_0' + B_1' + \dots + B_k')$, $C_1, \dots, C_{n-k-1}$.

En particulier, nous aurons le premier coefficient par la formule

$$-(B_0' + B_1' + \ldots + B_k') = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_{k+1} & \cdots & y_{k+1}^{n-k-2} & f(y_{k+1}) \\ 1 & y_{k+2} & \cdots & y_{k+2}^{n-k-2} & f(y_{k+2}) \\ . & . & . & . & . \\ 1 & y_n & \cdots & y_n^{n-k-2} & f(y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & y_{k+1} & \cdots & y_{k+1}^{n-k-2} & y_{k+1}^{n-k-1} \\ 1 & y_{k+2} & \cdots & y_{k+2}^{n-k-2} & y_{k+2}^{n-k-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & y_n & \cdots & y_n^{n-k-2} & y_n^{n-k-1} \end{vmatrix}},$$

c'est à dire

$$B_0' + B_1' + \ldots + B_k' = -[y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n; f], \tag{123}$$

où dans le second membre nous avons la différence divisée de la fonction rationnelle $f(Y)$ donnée par la formule (121), sur les noeuds $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n$.

En utilisant la formule bien connue

$$[y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n; f] = \frac{f^{(n-k-1)}(\overline{Y})}{(n-k-1)!},$$

où le nombre $\overline{Y}$ est compris entre y_{k+1} et y_n, nous pouvons écrire d'après la formule (118)

$$h_k = -\frac{f^{(n-k-1)}(\overline{Y})}{(n-k-\,)!}, \tag{124}$$

Nous allons maintenant démontrer que la dérivée d'ordre $n-k-1$ de la fonction $f(Y)$ est différente de zéro, pour $Y > y_{k+1}$. Pour cela nous mettrons cette dérivée sous une forme remarquable.

16. Faisons la division du polynome $(y-Y)^{n-1}$ par le polynome $(Y-y_0)(Y-y_1)\ldots(Y-y_k)$. Nous aurons

$$(y-Y)^{n-1} = (Y-y_0)(Y-y_1)\ldots(Y-y_k)Q(Y) + r_k(Y),$$

le degré du polynome $Q(Y)$ étant $n-k-2$ et le reste $r_k(Y)$ étant déterminé par les relations

$$\begin{aligned} r_k(y_0) &= (y-y_0)^{n-1} \\ r_k(y_1) &= (y-y_1)^{n-1} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ r_k(y_k) &= (y-y_k)^{n-1} \end{aligned} \tag{125}$$

En posant

$$w(Y) = \frac{1}{(Y-y_0)(Y-y_1)\ldots(Y-y_k)}$$

nous aurons

$$f(Y) = (y-Y)^{n-1} w(Y) = Q(Y) + r_k(Y)\,w(Y)$$

et par suite

$$f^{(n-k-1)}(Y) = [r_k(Y)\,w(Y)]^{(n-k-1)}$$

En appliquant la formule de Leibnitz, nous pouvons écrire

$$f^{(n-k-1)}(Y) = \sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{n-k-1}{j} r_k^{(n-k-1-j)}(Y)\, w^{(j)}(Y) \tag{126}$$

En décomposant la fonction rationnelle $w(Y)$ en fonctions rationelles simples,

$$w(Y) = \frac{A_0}{Y-y_0} + \frac{A_1}{Y-y_1} + \ldots + \frac{A_k}{Y-y_k}$$

nous avons

$$w^{(j)}(Y) = (-1)^j j! \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i}{(Y-y_i)^{j+1}}$$

D'autre part, $r_k(Y)$ étant un polynome de degré k, ses dérivées d'ordre $n-k-1-j$ pour $j = 0, 1, \ldots, n-2k-2$ sont nulles. Il résulte alors que nous pouvons écrire la formule (126) sous la forme

$$f^{(n-k-1)}(Y) = \sum_{j=n-2k-1}^{n-k-1} (-1)^j \binom{n-k-1}{j} j!\, r_k^{(n-k-1-j)}(Y) \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{A_i}{(Y-y_i)^{j+1}} \right)$$

Mais

$$\binom{n-k-1}{j} j\,! = \frac{(n-k-1)!}{(n-k-1-j)!}$$

et en ordonnant le second membre suivant les A_i, nous pouvons écrire

$$f^{(n-k-1)}(Y) = (n-k-1)!\sum_{i=0}^{k} A_i\left[(-1)^{n-2k-1}\frac{r_k^{(k)}(Y)}{(k)!}\,\frac{1}{(Y-y_i)^{n-2k}}+\right.$$

$$\left.+(-1)^{n-2k}\frac{r_k^{(k-1)}(Y)}{(k-1)!}\,\frac{1}{(Y-y_i)^{n-2k+1}}+\dots+(-1)^{n-k-1}r_k(Y)\,\frac{1}{(Y-y_i)^{n-k}}\right],$$

ou encore

$$f^{(n-k-1)}(Y) = (-1)^{n-k-1}(n-k-1)!\sum_{i=0}^{k}\frac{A_i}{(Y-y_i)^{n-k}}\times$$

$$\times\left[r_k(Y)-\frac{Y-y_i}{1!}r_k'(Y)+\dots+(-1)^k\frac{(Y-y_i)^k}{k!}r_k^{(k)}(Y)\right].$$

La grande paranthèse du second membre est égale à

$$r_k\,[Y-(Y-y_i] = r_k(y_i) = (y-y_i)^{n-1}$$

d'après les formules (125).

Nous avons donc

$$f^{(n-k-1)}(Y) = (-1)^{n-k-1}(n-k-1)!\sum_{i=0}^{k}A_i\frac{(y-y_i)^{n-1}}{(Y-y_i)^{n-k}},$$

ou encore

$$f^{(n-k-1)}(Y) = (-1)^{n}(n-k-1)!\sum_{i=0}^{k}A_i\frac{(y_i-y)^{n-1}}{(y_i-Y)^{n-k}}.$$

En désignant par

(127) $$g(\eta) = \frac{(\eta-y)^{n-1}}{(\eta-Y)^{n-k}},$$

nous avons

$$\sum_{i=0}^{k}A_i\frac{(y_i-y)^{n-1}}{(y_i-Y)^{n-k}} = [y_0, y_1, \dots, y_k;\, g] = \frac{g^{(k)}(\bar\eta)}{k!},$$

où $\bar\eta$ est un nombre compris entre y_0 et y_k.

Nous avons donc démontré la formule

(128) $$f^{(n-k-1)}(Y) = (-1)^n\frac{(n-k-1)!}{k!}\,g^{(k)}(\bar\eta)\,.$$

et il nous reste à calculer la dérivée d'ordre k de la fonction $g(\eta)$ définie par la formule (127).

17. Nous pouvons écrire

$$g(\eta) = \frac{[(\eta-Y)+(Y-y)]^{n-1}}{(\eta-Y)^{n-k}} = \frac{1}{(\eta-Y)^{n-k}}\times$$

$$\times\left[\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n-1}{j}(\eta-Y)^{n-1-j}(Y-y)^j+\sum_{j=k}^{n-1}\binom{n-1}{j}(\eta-Y)^{n-1-j}(Y-y)^j\right].$$

c'est-à-dire

$$g(\eta) = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{n-1}{j}(\eta-Y)^{k-j-1}(Y-y)^j+\sum_{j=0}^{n-k-1}\binom{n-1}{k+j}(Y-y)^{k+j}\frac{1}{(\eta-Y)^{j+1}}.$$

La derivée d'ordre k de la première „somme" étant nulle, nous avons

$$g^{(k)}(\eta) = \sum_{j=0}^{n-k-1}\binom{n-1}{k+j}(Y-y)^{k+j}\left[\frac{1}{(\eta-Y)^{j+1}}\right]^{(k)}.$$

Mais

$$\left[\frac{1}{(\eta-Y)^{j+1}}\right]^{(k)} = (-1)^k\frac{(j+k)!}{j!}\,\frac{1}{(\eta-Y)^{j+k+1}}$$

et par suite

$$g^{(k)}(\eta) = (-1)^k(Y-y)^k\sum_{j=0}^{n-k-1}\binom{n-1}{k+j}\frac{(k+j)!}{j!}\,\frac{(Y-y)^j}{(\eta-Y)^{j+k+1}},$$

c'est-à-dire

$$g^{(k)}(\eta) = (-1)^k\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}\,\frac{(Y-y)^k}{(\eta-Y)^n}\sum_{j=0}^{n-k-1}\binom{n-k-1}{j}(\eta-Y)^{n-k-j-1}(Y-y)^j,$$

ou, finalement

(129) $$g^{(k)}(\eta) = (-1)^k\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}\,\frac{(Y-y)^k(\eta-y)^{n-k-1}}{(\eta-Y)^n}.$$

En revenant aux formules (124), (128), (129) et en désignant par $\overline{\eta}^*$ le nombre qui correspond à $\overline{Y}$ dans la formule (128), nous avons

$$h_k = (-1)^{n+k}\binom{n-1}{k}\frac{(\overline{Y}-y)^k(\overline{\eta}^*-y)^{n-k-1}}{(\overline{\eta}^*-\overline{Y})^n}. \tag{130}$$

et par suite $h_k \neq 0$, parceque nous avons

$$\overline{\eta}^* < y_k < y \leqq y_{k+1} < \overline{Y}.$$

18. Les raisonnements précédents qui ont conduit à la formule (130) sont valables pour $k = 1, 2, \ldots, n-2$. Mais on peut se rendre compte facilement que pour $k = 0$, $k = n-1$ nous avons aussi $h_0 \neq 0$, $h_{n-1} \neq 0$.

En effet, dans le cas $k = 0$, nous avons

$$h_0 = B_0' = B_0(y-y_0)^{n-1}$$

et par suite $h_0 \neq 0$, lorsque $y_0 < y \leqq y_1$.

Dans le cas $k = n-1$, nous avons d'après la formule (118),

$$h_{n-1} = B_0' + B_1' + \ldots + B_{n-1}'.$$

Mais dans la formule (117), nous avons

$$B_0' + B_1' + \ldots + B_{n-1}' + B_n' = 0,$$

et par suite

$$h_{n-1} = -B_n' = -\frac{(y-y_n)^{n-1}}{(y_n-y_0)(y_n-y_1)\ldots(y_n-y_{n-1})},$$

ce qui montre que $h_{n-1} \neq 0$, pour $y_{n-1} < y < y_n$.

19. Il est évident qu'on peut faire des sections dans la surface $z = \Phi(x, y)$ par les plans $x = \text{const.}$, ce qui nous conduit à étudier les fonctions $\theta_k(y) = \varphi_i^k(x, y)$ comme des fonctions de y. Nous avons démontré que les fonctions $\theta_k(y)$ vérifient les conditions aux limites (112), (113) et (114). On peut démontrer comme aux nos. 14—18, que les dérivées d'ordre $n-1$ des fonctions $\theta_k(y)$ ne sont pas nulles lorsque $y_k < y \leqq y_{k+1}$.

Nous nous contentons de considérer les fonctions $\theta_k(y)$ correspondant à $i = 0$, c'est à dire

$$\theta_k(y) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-1)!\,(n-1)!} \times$$
$$\times [C_0^0(y-y_0)^{n-1} + C_0^1(y-y_1)^{n-1} + \ldots + C_0^k(y-y_k)^{n-1}]\,(x-x_0)^{m-1}.$$

Pour ces fonctions nous avons

$$\theta_k^{(n-1)}(y) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-1)!}(C_0^0 + C_0^1 + \ldots + C_0^k)\,(x-x_0)^{m-1},$$

c'est-à-dire

$$\theta_k^{(n-1)}(y) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-1)!}A_0\,(B_0 + B_1 + \ldots + B_k)(x-x_0)^{m-1}$$

et par suite $\theta_k^{(n-1)}(y) \neq 0$, parceque, $B_0 + B_1 + \ldots + B_k \neq 0$.

20. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que *la fonction $\Phi(x, y)$ a le signe de $(-1)^{m-n}$ dans le rectangle D, ouvert.* Remarquons d'abord que la fonction $\varphi_0^0(x, y)$ a le signe de $(-1)^{m-n}$ pour $x_0 < x \leqq x_1$ et $y_0 < y \leqq y_1$. Cela résulte de la formule

$$\varphi_0^0(x, y) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-1)!\,(n-1)!}\,C_0^0\,(x-x_0)^{m-1}(y-y_0)^{n-1},$$

où nous avons

$$C_0^0 = (-1)^{m+n}A_0B_0 = (-1)^{m+n}\frac{1}{(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_m)}\,\frac{1}{(y_0-y_1)\ldots(y_0-y_n)}$$

et par suite C_0^0 est positif.

Démontrons ensuite que *la fonction $\Phi(x, y)$ a le signe de $(-1)^{m-n}$ dans la bande définie par*

$$x_0 < x \leqq x_1, \quad y_0 < y < y_n.$$

Pour cela coupons la surface $z = \Phi(x, y)$ par le plan $x = \text{const.}$, où $x \in (x_0, x_1]$, désignons par $\theta_k(y) = \varphi_i^k(x, y)$ dans l'intervalle $[y_k, y_{k+1}]$ et par $\theta(y)$ la fonction qui coïncide avec $\theta_0(y)$, $\theta_1(y)$, $\ldots$, $\theta_{n-1}(y)$, dans les intervalles $[y_0, y_1]$, $[y_1, y_2]$, $\ldots$, $[y_{n-1}, y_n]$.

La fonction $\theta(y)$ est continue dans l'intervalle $[y_0, y_n]$ avec ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $n-2$, d'après les conditions aux limites (113). En plus elle satisfait aux conditions aux limites (112) et (114).

La fonction $\theta(y)$ étant nulle pour $y = y_0$, $y = y_n$ et ayant une dérivée $\theta'(y)$ continue dans l'intervalle (y_0, y_n) on peut appliquer le théorème de Rolle, d'où il résulte que la dérivée $\theta'(y)$ a au moins un zéro dans l'intervalle (y_0, y_n). Nous allons démontrer que ce zéro est unique.

En effet, en supposant que la dérivée $\theta'(y)$ ait deux zéros dans l'intervalle (y_0, y_n), on déduit facilement en tenant compte des conditions aux limites (112), (114) et en appliquant successivement le théorème de Rolle, que la dérivée $\theta^{(n-2)}(y)$ a $n-1$ zéros dans l'intervalle (y_0, y_n), que nous désignons en ordre croissant par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$.

Le point η_1 ne peut pas appartenir à l'intervalle $(y_0, y_1]$, parceque la fonction $\theta_0^{(n-2)}(y)$ ayant une dérivée $\theta_0^{(n-1)}(y)$ continue dans l'intervalle (y_0, y_1), on peut appliquer à $\theta_0^{(n-2)}(y)$ et à l'intervalle $[y_0, \eta_1]$ le théorème de Rolle, d'où il résulte que la dérivée $\theta_0^{(n-1)}(y)$ doit s'annuler en un point de l'intervalle (y_0, η_1) ce qui est impossible puisque $\theta_0^{(n-1)}(y) \neq 0$ sur l'intervalle (y_0, y_1) (nr. 19). On démontre de la même manière que le point η_{n-1} n'appartient pas à l'intervalle $[y_{n-1}, y_n)$. Il résulte alors que les points $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ appartiennent à l'intervalle (y_1, y_{n-1}).

Dans un intervalle $(y_k, y_{k+1}]$ où $k = 1, 2, \ldots, n-2$, il n'y a pas deux points η_j, η_{j+1}. Pour le démontrer supposons le contraire et appliquons à la fonction $\theta_k^{(n-2)}(y)$ et à l'intervalle $[\eta_j, \eta_{j+1}]$ le théorème de Rolle. Il résulte alors que la dérivée $\theta_k^{(n-1)}(y)$ s'annule en un point de l'intervalle (η_j, η_{j+1}), c'est-à-dire de l'intervalle (y_k, y_{k+1}) ce qui est impossible puisque nous avons démontré au nr. 19 que $\theta_k^{(n-1)}(y) \neq 0$ sur l'intervalle (y_0, y_n).

Dans chaque intervalle $(y_k, y_{k+1}]$ où $k = 1, 2, \ldots, n-2$, il n'y a donc qu'un point η au plus. Le nombre des points η est donc $n-2$, au plus. Nous sommes donc arrivé à une contradiction, d'où il résulte que la dérivée $\theta'(y)$ n'a qu'un seul zéro dans l'intervalle (y_0, y_n) et par suite la fonction $\theta(y)$ ayant la signe de $(-1)^{m-n}$ sur l'intervalle $(y_0, y_1]$ et étant nulle pour $y = y_0$, $y = y_n$ a le signe de $(-1)^{m-n}$ sur l'intervalle (y_0, y_n)

Nous pouvons maintenant démontrer qu'en faisant une section dans la surface $z = \Phi(x, y)$ par le plan $y = \text{const.}$, où $y \in (y_k, y_{k+1}]$ et $k = 0, 1, \ldots, n-2$, ou bien $y \in (y_{n-1}, y_n)$, la fonction $\chi(x)$ qui coïncide dans les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ où $i = 0, 1, \ldots, m-1$ avec les fonctions $\chi_i(x) = \varphi_i^k(x, y)$ a le signe de $(-1)^{m-n}$.

Cela résulte du fait que les fonctions $\chi_i(x)$ vérifient les conditions aux limites (108), (109), (110), du fait que les dérivées $\chi_i^{(m-1)}(x)$ ne sont pas nulles sur les intervalles (x_i, x_{i+1}) (nos. 14—18) et enfin du fait que la fonction $\chi_1(x)$ a le signe de $(-1)^{m-n}$ sur l'intervalle $(x_0, x_1]$. La démonstration se fait comme ci-dessus, il est inutile de la répéter.

Ainsi la fonction $\Phi(x, y)$ ayant le signe de $(-1)^{m-n}$ sur chaque section faite dans la surface $z = \Phi(x, y)$ par des plans $y = \text{const.}$ où $y \in (y_0, y_n)$, elle a le signe de $(-1)^{m-n}$ dans le rectangle D, ouvert.

On demontre de la même manière que la fonction $\Phi(x, y)$ a le signe de $(-1)^{m-n}$, aussi dans le cas $n = 1$, $m > 1$, ou dans le cas $n = 1$, $m = 1$, dans la rectangle D.

21. Il résulte du théorème précédent, que dans la formule (104) on peut appliquer le théorème de la moyenne à l'intégrale du second membre, ce qui nous conduit à écrire

$$\begin{bmatrix} x_0, x_1, \ldots, x_m \\ y_0, y_1, \ldots, y_n \end{bmatrix}; f \Big] = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(\xi, \eta) \iint_D \Phi(x, y)\, dx\, dy,$$

où ξ et η sont les coordonnées d'un certain point du rectangle D.

L'intégrale du second membre de la formule précédente, se calcule en remplaçant dans la formule (104) la fonction $f(x, y)$ par

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_m)(y-y_0)(y-y_1)\ldots(y-y_n)}{m!\; n!},$$

ce qui conduit à

$$\iint_D \Phi(x, y)\, dx\, dy = \frac{(-1)^{m-n}}{m!\; n!}$$

et par suite

$$\left[\begin{matrix} x_0, x_1, \ldots, x_m \\ y_0, y_1, \ldots, y_n \end{matrix}; f\right] = \frac{(-1)^{m-n}}{m!\; n!} \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(\xi, \eta). \tag{131}$$

De cette formule il résulte une évalution de la différence divisée. Si $M_{m,n}$ est une borne supérieure de la valeur absolue de la dérivée $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$, dans le rectangle D, alors on déduit de la formule (131), l'évaluation

$$\left|\left[\begin{matrix} x_0, x_1, \ldots, x_m \\ y_0, y_1, \ldots, y_n \end{matrix}; f\right]\right| \leq \frac{M_{m,n}}{m!\; n!}. \tag{132}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ionescu D. V., *Cuadraturi numerice.* Editura Tehnică, Bucureşti, 1957.

[2] Popoviciu T., *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles.* Mathematica, VIII, 1—85 (1934).

Reçu le 27. XII. 1960.