

ÜBER DEN UNTERSCHNITT UND DAS ÜBERGANGSPROFIL DER MIT KEGELIGEM SCHEIBENFRÄSER BEARBEITETEN SCHNECKEN

E. GERGELY D. MAROS E. MUNTEANU

in Cluj

Der Unterschnitt ist keine ausschliessliche Erscheinung der Zahnradbearbeitung, er tritt auch bei der Bearbeitung der Schnecken auf, und zwar falls die Eindringungstiefe des Werkzeuges eine gewisse Grösse überschreitet.

Um diese Erscheinung wahrnehmen und bei der Bearbeitung mit kegeligem Scheibenfräser auch berechnen zu können, soll anfangs der einfache Fall untersucht werden, bei welchem die Profilbildung mit einer imaginären Zahnstange erfolgt (Abb. 1).

Die Flanke 1 dieser Zahnstange sei durch Hobeln mit der Schneide mm eines Meissels, oder durch Fräsen, beziehungsweise durch Schleifen mit der Schnittebene eines Fräasers oder einer Schleifscheibe bestrichen.

In diesem Falle erhält man eine Evolventenschnecke, welche einem Stirnrad mit Evolventenverzahnung mit grossem Neigungswinkel gleichkommt.

Die Unterschnittsgrenze entspricht demjenigen Punkte M der charakteristischen Geraden K , welcher den kleinsten Abstand von der Oy Achse hat. In diesem Punkte ist die Charakteristik tangent zum Grundzylinder.

Um den Unterschnitt zu vermeiden, muss beim Hobeln die Bahn des letzteren Punktes der Schneide mm die Charakteristik oberhalb des Punktes M schneiden (z.B. Bahn Δ_{III}). Falls diese durch M geht, haben wir den Grenzfall vor uns (die Bahn Δ_{II}), und wenn sie unter M verläuft (die Bahn Δ_I) entsteht Unterschnitt.

Bekanntlich untersucht man die Schrägverzahnung im Stirnschnitt, das heisst in einer Schnittebene Q senkrecht zur Oy Achse.

Die Planverzahnung dieses Schnittes ist in Abb. 2 dargestellt. Hält man die Zahnstange fest, so bewegt sich die Hüllgerade g , falls dem mit der Ebene Q verbundenem Werkstück eine Schraubenbewegung erteilt wird, nach rechts. Der Hüllpunkt O , — das ist der Durchdrin-

gungspunkt der Charakteristik K mit der Ebene Q , — beschreibt in diesem Falle in der Ebene Q eine Evolvente entsprechend der angezeigten Richtung.

Bis zur Stelle M — (M_0), welche in der Figur gestrichelt dargestellt ist, und bei welcher der Hüllpunkt bis zum Rückkehrpunkt der Evolvente gelangt, kann die effektive Umhüllung nur stattfinden, wenn die Schneide die innere Seite der Zahnflanke der Zahnstange bestreicht,

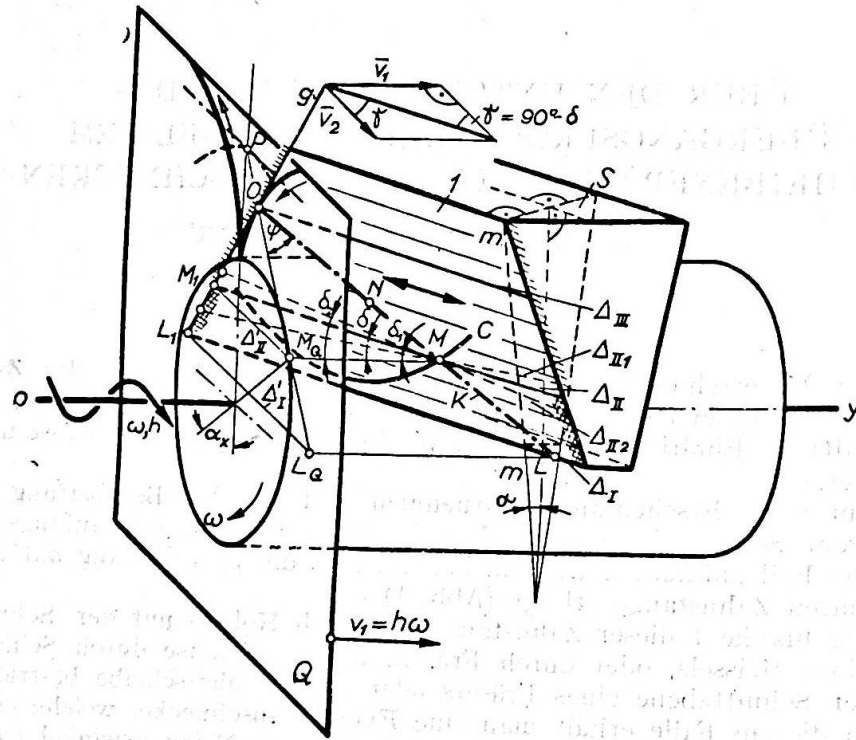


Abb. 1

das heisst, der Meissel ist innenseitig der Zahnstange — in der einfach gestrichelten Zone.

Nachträglich — in der Figur ebenfalls gestrichelt gezeichnet — geht der Hüllpunkt auf den zweiten Ast der Evolvente über, dessen effektive Umhüllung nur stattfindet, wenn die Schneide die äussere Seite der Zahnflanke der Zahnstange bestreicht, falls also der Meissel am Aussenteil der Zahnstange — in der kreuzgestrichelten Zone — angebracht wird.

Da jedoch die Schneide eine einzige Fläche bestreicht, und zwar die innere Flankenfläche, so kann der zweite Ast der Evolvente effektiv nicht umhüllt werden. Demgegenüber wird der erste Ast von dem unter M — (M_0) befindlichen Teil der Schneide durchschnitten, wodurch der Unterschnitt entsteht.

Um die Bedingungen für das Vermeiden des Unterschnittes und auch die Gleichungen des Übergangsprofils aufstellen zu können, werden die Elemente der betrachteten Planverzahnung bestimmt.

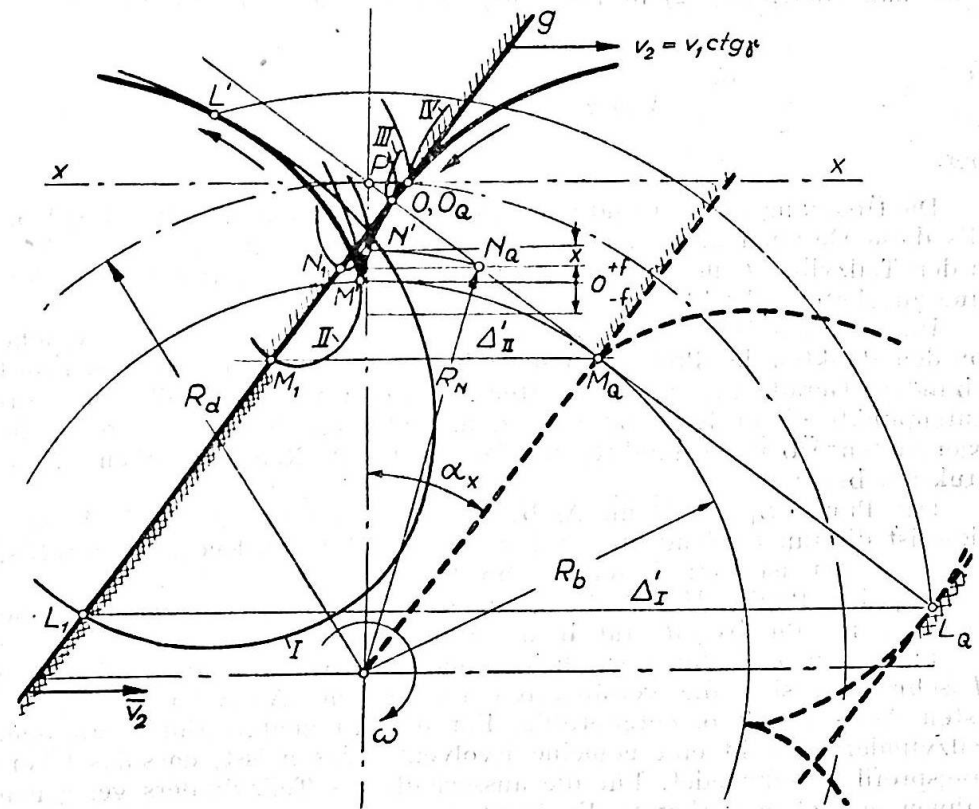


Abb. 2.

Der Halbmesser R_d des Teilkreises ist gegeben durch

$$v_2 = R_d \omega = v_1 \operatorname{ctg} \gamma = h \omega \operatorname{ctg} \gamma,$$

woraus

$$(1) \quad R_d = h \operatorname{ctg} \gamma = h \operatorname{tg} \delta$$

Der Eingriffswinkel α_x im Stirnschnitt wird mit Hilfe des normalen Eingriffswinkels α ausgedrückt

$$(2) \quad \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \delta}$$

Der Halbmesser R_b des Grundkreises ist gegeben durch

$$(3) \quad R_b = R_d \cos \alpha_x = h \operatorname{ctg} \gamma \cos \alpha_x$$

Zieht man Gleichung (2) in Betracht, so geht Gleichung (3) in

$$(4) \quad R_b = \frac{h \cdot \cos \gamma}{\sqrt{\sin^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{h \sin \delta}{\sqrt{\cos^2 \delta + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

über.

Die Übergangsflanken sind von den Geraden Δ gebildete Regelflächen, falls diese Geraden an diejenige Tangentenebene gebunden sind, welche an den Teilzylinder im Hauptpunkt P gelegt wird und auf dem Zylinder, ohne zu gleiten, abrollt.

Im Stirnschnitt Q bilden diese Schraubenflächen Evolventen, welche von den Punkten des Profils g beschrieben werden, falls die an das Profil gebundene Gerade xx , ohne zu gleiten auf dem Teilkreis abrollt. Die Tangentenpunkte dieser Evolventen an dem umhüllten Evolventenprofil, die sogenannten Übergangspunkte, werden nach der Reuleaux-schen Konstruktion bestimmt.

Der Punkt L_1 der Bahn Δ_1 beschreibt eine verlängerte Evolvente. Diese ist die innere Tangente an dem zweiten Ast des Evolventenprofils, der erste Ast ist von dieser geschnitten.

Für den Punkt M_1 ist die verlängerte Evolvente die gemeinsame Tangente im Punkte M' für beide Evolventenäste.

Für diejenigen Bahnen, welche die Charakteristik oberhalb des Punktes M schneiden, sind die verlängerten Evolventen Aussentangenten des ersten Astes des Evolventenprofils. Für die Tangentenbahn Δ an dem Teilzylinder entsteht eine gemeine Evolvente, das heisst, dass das Übergangsprofil verschwindet. Für die ausserhalb des Teilzylinders gelegenen Bahnen entstehen verkürzte Evolventen.

Bezeichnet man mit f den Abstand der Bahn Δ vom Grundzylinder, so kann der Ortsvektor $\bar{R}_N$ des entsprechenden Übergangspunktes im Stirnschnitt analytisch bestimmt werden. Es wird

$$(5) \quad R_N = \sqrt{(R_b \mp f)^2 + \left(\frac{R_b}{\cos \alpha_x} - R_b \pm f \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha_x}$$

Die radiale Tiefe des Übergangsprofils wird

$$(6) \quad x = \sqrt{(R_b \mp f)^2 + \left(\frac{R_b}{\cos \alpha_x} - R_b \pm f \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha_x} - (R_b \mp f)$$

ist $f = (R_b - R_b \cos \alpha_x)$, das heisst genau an der Unterschnittsgrenze, so folgt aus (6), dass $x = f$.

Um den Unterschnitt zu vermeiden, muss die Bahn Δ entweder ausserhalb des Grundzylinders, oder im innern desselben, jedoch höchstens, im Abstände $f = R_b - R_b \cos \alpha_x$, von diesem liegen. Kennt man R_d , R_b und f , so können die Gleichungen der Übergangsprofile mit Leichtigkeit bestimmt werden.

Was geschieht jedoch, wenn die Bahn des äussersten Punktes der Schneide nicht senkrecht zum Normalschnitt S des Zahnes der Zahnstange steht, wie dies vorher der Fall war?

Die Unterschnittgrenze ist auch in diesem Fall durch die Bahn Δ_{II_1} bzw. Δ_{II_2} bestimmt, welche durch den Punkt M geht und welche mehr oder weniger gegenüber K geneigt ist als Δ_{II} .

Der Unterschied besteht darin, dass für Δ_{II_1} eine grössere Übergangsprofiltiefe entsteht, dem gegenüber für Δ_{II_2} eine kleinere.

Diese neuen Profile werden mit Hilfe anderer Teilkreise mit dem Halbmesser R_{d_1} bzw. R_{d_2} im Stirnschnitt gebildet.

Diese werden durch die Bahnen Δ_{II_1} und Δ_{II_2} bestimmt und können als Normale anderer Schnittebenen S_1 bzw. S_2 derselben Zahnstange betrachtet werden, deren Spitzenwinkel kleiner als α ist.

In diesem Falle treten an Stelle des Neigungswinkels δ die Winkel $\delta_1 > \delta$ und $\delta_2 < \delta$.

Da sich in diesen Varianten weder R_b noch h ändern, so können δ_1 bzw. δ_2 aus Gleichung (4) berechnet werden, da $\alpha = \alpha_1$ oder $\alpha = \alpha_2$ gesetzt werden kann.

Kennt man nun δ_1 oder δ_2 so kann aus Gleichung (2) α_{x_1} bzw. α_{x_2} , und aus Gleichung (1) R_{d_1} bzw. R_{d_2} berechnet werden.

In Abb. 3 sind diese Grössen auch graphisch bestimmt und die neuen von den Punkten M_1 und M_2 beschriebenen verlängerten Evolventen eingezeichnet worden.

Es ist ersichtlich, dass die Tiefen der Übergangsprofile

$$x_1 > x > x_2$$

Das Obige gilt auch für jeden anderen auf der Charakteristik K liegenden Punkt. An jeden beliebigen Punkt des umhüllten Evolventenprofils kann somit, bei entsprechender Wahl des Teilkreises und des Stirneingriffswinkels, ein Übergangsprofil angelegt werden mit einer im Voraus bestimmten Übergangsprofiltiefe.

Falls die Bearbeitung mit einer Schleifscheibe erfolgt, so ist die Unterschnittsgrenze erreicht, falls die äussere Schleifscheibenkante C durch den Punkt M geht (Abb. 1).

Liegt der Punkt M ausserhalb dieses Kreises so ist der Unterschnitt vermieden, liegt der Punkt M jedoch innerhalb des Kreises, so entsteht Unterschnitt.

In Abhängigkeit von der Lage der Mittelpunkte gegebener Kreise, welche die Charakteristik in demselben Punkt schneiden, können verschiedene Tiefen der Übergangsprofile erreicht werden.

Je geringer der Abstand des Kreises C zur Oy Achse ist, um so grösser wird die Tiefe des Übergangsprofils. In diesem Falle wird das Übergangsprofil keine verlängerte Evolvente, sondern eine Kurve, welche der geometrische Ort der Schnittpunkte des Kreises C und der Ebene Q ist, falls diese zusammen mit dem Werkstück eine Schraubenbewegung mit dem Parameter h ausführt.

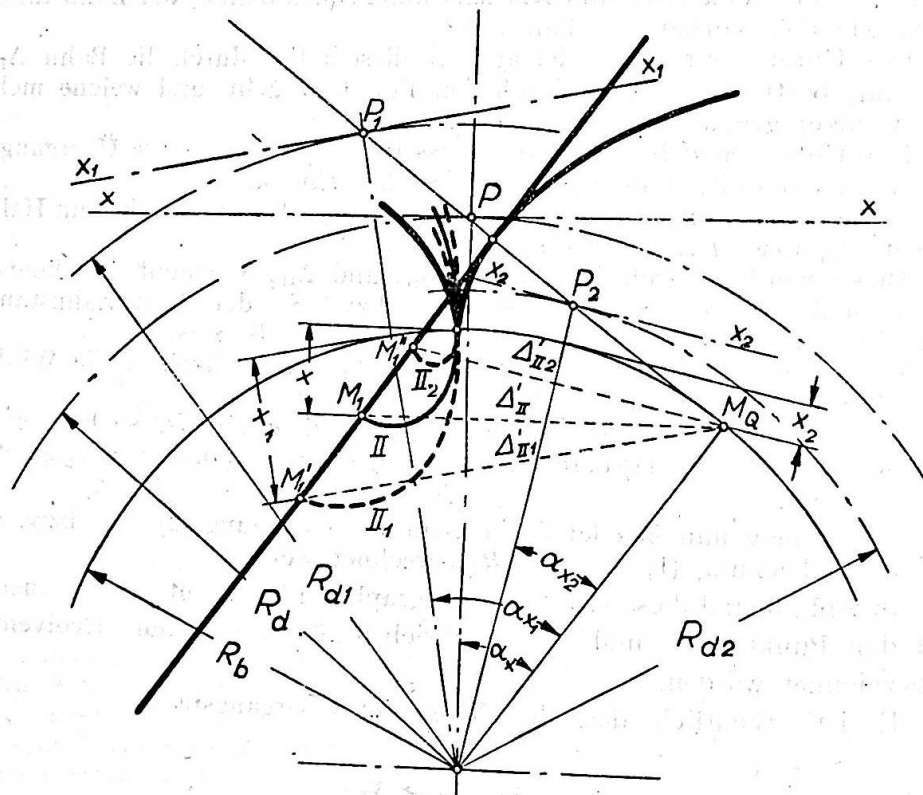


Abb. 3

Bei der Bearbeitung mit kegeligem Fräser (Abb. 4), sind die Erscheinungen dieselben. In diesem Fall ist die Charakteristik K jedoch keine Gerade, sondern eine auf der durch die Schneiden des Werkzeuges dargestellten imaginären Oberfläche liegende Kurve.

Die Charakteristik nähert sich von der Kegelspitze S an die Werkstückachse Oy und beim Punkte M ist sie dieser Achse am nächsten, nachher entfernt sie sich neuerdings von ihr. Es lässt sich beweisen [1], dass der Punkt M die Rückkehrkurve der vom Kegel umhüllten Oberfläche beschreibt.

Der berührende Zylinder an die Charakteristik K im Punkte M kann in Analogie zum vorherigen Fall ebenfalls als Grundzylinder benannt werden. Die Unterschnittsgrenze wird im gleicher Weise, ebenfalls mit

Hilfe des Punktes M bestimmt. Um den Unterschnitt zu vermeiden, muss, — wie vorher — die Bahn des äussersten Punktes der Schneidkante — in diesem Falle kreisförmig und senkrecht auf die Kegelachse — die Charakteristik oberhalb M schneiden, d.i. in der von der Spitze S des imaginären Kegels und dem Punkte M begrenzte Zone (z.B. die Bahn Δ_{III}).

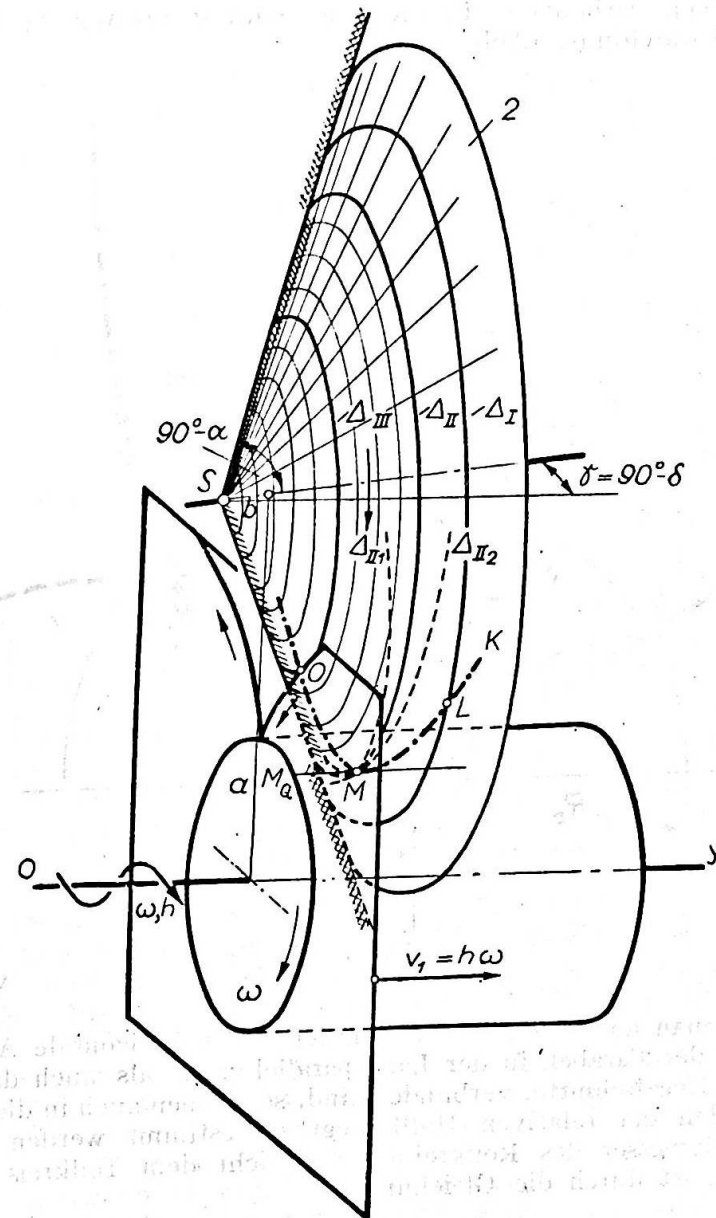


Abb. 4

Läuft die Bahn durch M , so entsteht der Grenzfall (entsprechend der Bahn Δ_{II}) und wenn der Schnitt nach dem Punkte M entsteht (die Bahn Δ_I) erscheint der Unterschnitt.

Auch in diesem Fall kann das Profil im Stirnschnitt als Hüllkurve aufgefasst werden, welche durch den elliptischen oder parabolischen Schnitt mit der Fläche Q des festen imaginären Kegels entsteht, wenn diese mit dem Werkstück verbundene Fläche eine Schraubenbewegung mit dem Parameter h durchführt (Abb. 5).

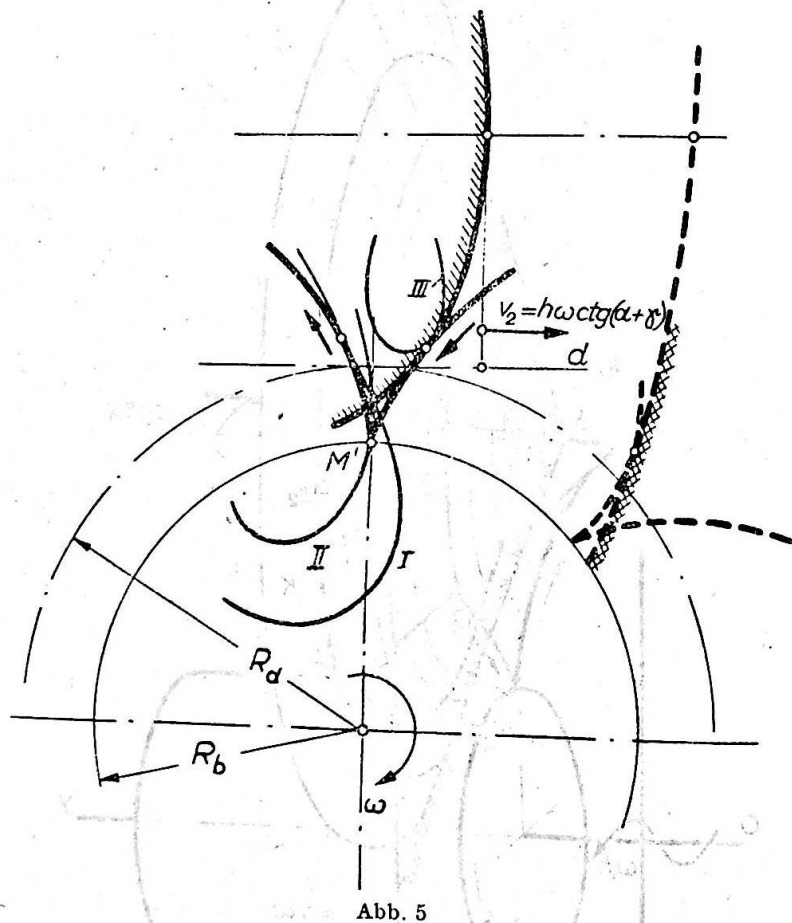


Abb. 5

Nimmt man an, dass mit der Geraden d die horizontale Achse der Ellipse oder der Parabel, in der Lage parallel zu d , als auch das rechte Ende dieser Kegelschnitte, verbunden sind, so können auch in diesem Fall die Centroiden der relativen Hüllbewegung bestimmt werden.

Der Halbmesser des Rollkreises, entspricht dem Teilkreis im vorherigen Fall, ist durch die Gleichung

$$v_2 = h \omega \operatorname{ctg}(\alpha + \gamma) = R_d \omega$$

gegeben, woraus folgt, dass

$$(7) \quad R_d = h \operatorname{ctg}(\alpha + \gamma)$$

Die Profile im Stirnschnitt können somit als Hüllkurven von nach einem gegebenen Gesetz veränderlicher Ellipse oder Parabel betrachtet werden.

Die auf die Ebene Q bezogene Relativbewegung der wagerechten Achse des nach rechts begrenzten Kegelschnittes ist durch eine gerade Centroiden d und eine kreisförmige mit dem Halbmesser R_d bestimmt.

Bei der angegebenen Schraubenbewegung bewegt sich der umhüllende Kegelschnitt nach rechts und der Hüllpunkt Q , d.i. der Schnittpunkt der Charakteristik mit der Ebene Q , beschreibt in dieser das mit Pfeil bezeichnete Profil.

Für diesen Fall können dieselben Schlussfolgerungen wie im vorherigen gezogen werden.

Bis zum Punkte M kann die effektive Umhüllung nur dann stattfinden, wenn die Werkzeugschneiden die innere Fläche des imaginären Kegels bestreichen, das heisst wenn sich der kegelige Fräser im Inneren des Kegels befindet—in der einfach gestrichelten Zone.

Weiter, kann die effektive Umhüllung des zweiten Profilastes (im Abb. 5 der unterbrochenen Linie) nur mit der inneren Fläche des Kegels verwirklicht werden, und zwar nur, falls der kegelige Fräser ausserhalb des imaginären Kegels steht—in der kreuzweise gestrichelten Zone. Befindet sich der kegelige Fräser auch in diesem Teil des imaginären Kegels, wie dies im Allgemeinen der Fall ist, so wird der zweite Ast effektiv umhüllt, der erste dagegen durchschnitten, wodurch ein Unterschnitt entsteht.

Das Übergangsprofil ist der geometrische Ort der Schnitte der Kreise Δ_I , Δ_{II} oder Δ_{III} mit der Ebene Q , falls diese die Schraubenbewegung mitmacht.

Es ist auffallend dass der Kreis Δ_{III} ein Übergangsprofil bestimmt, welcher die Aussentangente des von dem Kegel umhüllten ersten Profilastes bildet. Der Kreis Δ_{II} bestimmt ein Übergangsprofil, welches die gemeinsame Tangente an beiden umhüllten Profilästen darstellt. Der Kreis Δ_I bildet ein Übergangsprofil, welches die innere Tangente des zweiten Astes ist. Es ist ersichtlich, dass wir dieselben Erscheinungen wie bei der Evolventenschnecke vor uns haben.

Auch in diesem Fall gibt es jedoch einen Kreis, welcher einen punktförmigen Übergang bestimmt. Wenn nun auf dem imaginären Kegel weitere Kurven Δ_{II1} , Δ_{II2} gewählt werden, welche durch M oder durch einem anderen Punkt der Charakteristik gehen, erhält man Übergänge von verschiedener Tiefe, genau wie im Falle der Evolventenschnecke. Angenommen, dass diese geschlossene Kurven sind und die Endpunkte der Schneiden eines kegelförmigen Fräasers darstellen, dann ist die Art und die Tiefe des Übergangsprofils durch denjenigen Kreis bestimmt, welcher diese Kurve umhüllt, falls er sich um die Fräserachse dreht. Wenn dieser auf die Drehachse senkrecht stehende Kreis die Charakteristik unter dem Punkte M schneidet, entsteht Unterschnitt auch dann, wenn die gewählte Kurve die Charak-

teristik in einem Abschnitt schneidet, im welchem an sonst kein Unterschnitt entsteht. Für die quantitative Untersuchung der Obenangeführten wird der in der Abhandlung [2] angegebene Weg vorgeschlagen, das heisst: die Darstellung im Achsialschnitt.

Es ist selbstverständlich, dass alle qualitativen für den Stirnschnitt geltenden Ableitungen bezüglich der Unterschnittgrenze und die Berührungsart zwischen dem Hüllprofil und dem Übergangsprofil auch für den Achsialschnitt geltend bleiben.

Der alleinige Unterschied besteht darin, dass in diesem Fall der rechte Ast in Stirnschnitt als linker Ast im Achsialschnitt erscheint und umgekehrt.

Für die Bestimmung des Rückkehrpunktes im Achsialschnitt entspricht die klassische Methode nicht mehr, da diese zu sehr komplizierten Gleichungen führt, welche nur durch grobe Annäherung gelöst werden können.

Aus diesem Grunde wurde der Weg der schrittweisen Annäherung des Achsialprofils durch Punkte verfolgt, welche in der Abhandlung [2] dargelegt ist.

Die zahlenmässig berechneten Koordinaten sind in dieser Abhandlung in Tabelle I Kolonne 1 und 4 für ein konkretes Beispiel angegeben.

Im Grunde genommen geht die Untersuchung auf die Bestimmung des Minimums der Funktion $z = z(u)$. Nachdem dieses Minimum besteht, ist der vorgeschlagene Algorithmus der Folgende*: bei der Ausarbeitung der Tabelle I kann immer ein Intervall derart festgelegt werden, dass der Funktionswert in der Intervallmitte kleiner sei als dessen Grenzwerte. In dem angegebenen Beispiel $u'_k = 29$ und $u''_k = 31$.

Bezeichnet man mit u'_k die Intervallmitte, und mit $z'_k = z(u'_k)$, $z''_k = z(u''_k)$, $z'''_k = z(u'''_k)$, die entsprechenden Funktionswerte, dann wird das folgenden Ungleichheiten entsprechen:

$$(8) \quad \begin{aligned} z''_k &< z'_k \\ z'''_k &< z''_k \end{aligned}$$

Wir bezeichnen weiter mit I^s_k und I^d_k die Intervalle $[u'_k, u''_k]$ bzw. $[u''_k, u'''_k]$. Halbiert man diese Intervalle ständig, so erhält man einen der drei in Abb. 6 gezeigten Fälle.

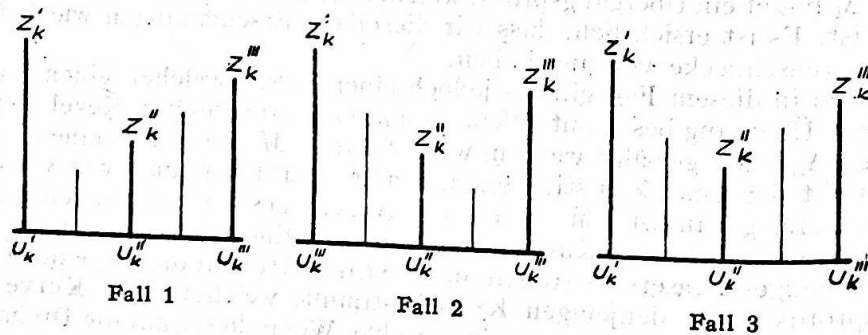


Abb. 6

* Dieser Algorithmus zur Berechnung des Minimums stammt von Docent F. Radó.

Eines der betrachteten neuen Intervalle I^s_k oder I^d_k , oder aber das Intervall, dessen Endpunkte die Mittelpunkte der beiden vorhergehenden Intervalle sind — ist ein Intervall, bei welchem derjenige Wert der Funktion, welcher dem Mittelpunkt des Intervalls entspricht, die Ungleichungen (8) befriedigt. Halbiert man weiterhin dieses Intervall, so erhält man kleinere Intervalle, die ebenfalls die Bedingungen der Ungleichheit (8) erfüllen.

Ein betrachteter Wert $\bar{z}$, welcher der Intervallmitte entspricht, nähert sich nur dann im Überschuss im Toleranzgebiet η dem Minimum der Funktion $z = z(u)$, falls der Bedingung

$$(9) \quad \Delta z \leq \eta$$

entsprochen wird, wobei

$$(10) \quad \Delta z = \max(z'_k - z''_k; z''_k - z'''_k)$$

$$k = 0, 1, 2 \dots$$

und η die vorgeschriebene Toleranz bedeutet.

Die Koeffizienten k stellen die Grössenordnung der Annäherung dar und weisen auch darauf hin welcher Halbierungsschritt der Intervalle berechnet wurde. Auf dieser Weise erhält man mit den in der Tabelle 1 angegebenen Daten beim dritten Halbierungsschritt für $u = 29,875$ den Wert $z = 27,116489$. Dieser Wert nähert sich von oben an das Minimum der Funktion $z(u)$ innerhalb der gegebenen Toleranz $\eta = 0,004$. In Abb. 7 ist in einem Massstab 10000:1 ein Teil der Profile um den Rückkehrpunkt mit den entsprechenden Koordinaten der Parameter u laut Angaben der Tabelle 1 dargestellt.

Dies schraubenförmige vom Kreis umhüllte Übergangsflanke wird, wie oben bereits gezeigt, von der kreisförmigen, am Kegelboden

Tabelle* 1

U_{mm}	Schritt 0	Schritt 1	Schritt 2	Schritt 3
	$Z_{mm} =$			
29	27,293783			
29,5		27,148720	27,148720	27,148720
29,625				27,130805
29,75			27,120011	27,120011
29,875				27,116489
30	27,120328	27,120328	27,120328	27,120328
30,25				
30,5		27,207413		
31	27,406678			
ΔZ_{mm}	0,286350	0,087085	0,028709	0,003839

* bei der Bearbeitung dieser Tabelle haben mitgewirkt: L. Negrescu, A. Németh, T. Rus.

ausgebildeten Schneide, welche im Abstände u von der Kegelspitze steht, ausgearbeitet.

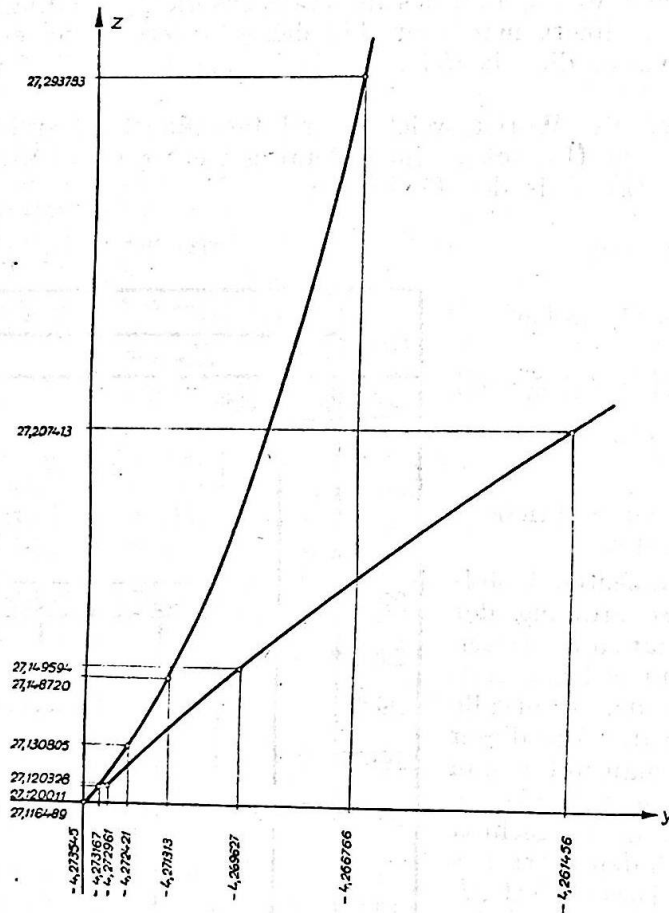


Abb. 7

Um die Gleichungen dieses Profils bestimmen zu können, und zwar die Gleichungen im Achsialschnitt, gehen wir von den Koordinaten des auf der Schneidkante befindlichen laufenden Punktes aus (Abb. 8).

Im Bezug auf das bewegliche System mit den Koordinatenachsen XYZ sind diese Gleichungen die folgenden

$$\begin{aligned}
 X &= b \sin \gamma - (u \sin \gamma + u \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin v \cdot \cos \gamma) \\
 Y &= -b \cos \gamma + (u \cos \gamma - u \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin v \cdot \sin \gamma) \\
 Z &= a - u \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos v
 \end{aligned}
 \quad (11)$$

Wendet man die Umformungsformeln

$$\begin{aligned}
 x &= Z \sin \varphi + X \cos \varphi \\
 y &= Y + h\varphi \\
 z &= Z \cos \varphi - X \sin \varphi.
 \end{aligned}
 \quad (12)$$

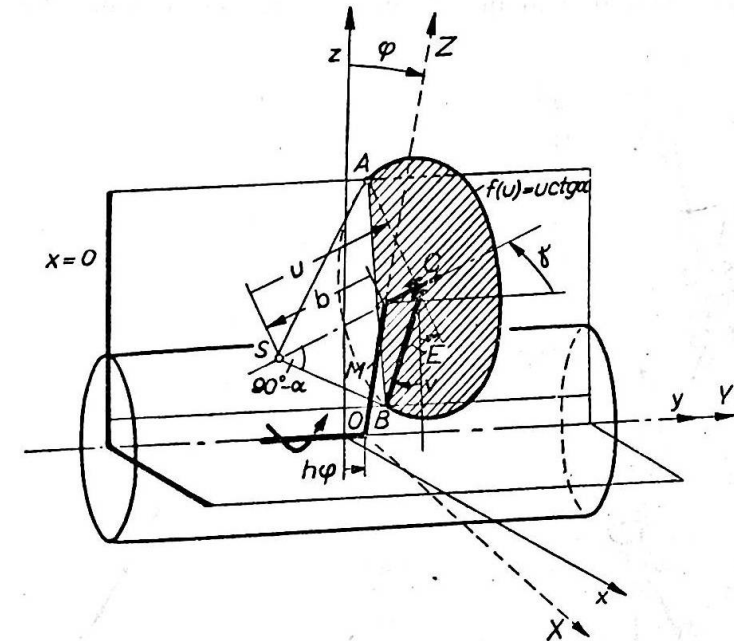


Abb. 8

an, so entstehen die Gleichungen der kreisförmigen Schneide im bezug auf das feste Koordinatensystem mit den Gleichungen x, y, z

$$\begin{aligned}
 x &= (a - u \operatorname{ctg} \alpha \cos v) \sin \varphi + [b \sin \gamma - (u \sin \gamma + u \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin v \cos \gamma)] \cos \varphi \\
 y &= [-b \cos \gamma + (u \cos \gamma - u \operatorname{ctg} \alpha \sin v \sin \gamma)] + h\varphi \\
 z &= (a - u \operatorname{ctg} \alpha \cos v) \cos \varphi - [b \sin \gamma - (u \sin \gamma + u \operatorname{ctg} \alpha \sin v \cos \gamma)] \sin \varphi
 \end{aligned}
 \quad (13)$$

Für $x = 0$ werden die Schnittpunkte A und B dieser Schneide mit der Achsialebene bestimmt, diese sind Punkte des Übergangsprofils.

Setzt man die erste Gleichung des Systems (13) gleich Null, so erhält man

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{u \operatorname{ctg} \alpha \sin v \cos \gamma - (b - u) \sin \gamma}{a - u \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos v}
 \quad (14)$$

Wird v als variabler Parameter betrachtet, so kann man mit Hilfe dieser Formel für jeden Wert von v den entsprechenden Wert φ berechnen.

Setzt man diese Werte in die Gleichung (13) ein, so können für jeden Punkt des Übergangsprofils im Achsialschnitt die entsprechenden Koordinaten bestimmt werden.

Man geht von demjenigen Wert v aus, welcher aus [2, Formel 41] berechnet wird, und welcher den Tangentenpunkt des Übergangsprofils und des vom Kegel umhüllten Profils darstellt.

Von diesem Werte werden nach links und nach rechts diskrete Größen angenommen, worauf man in der oben angegebenen Weise fortfährt. In

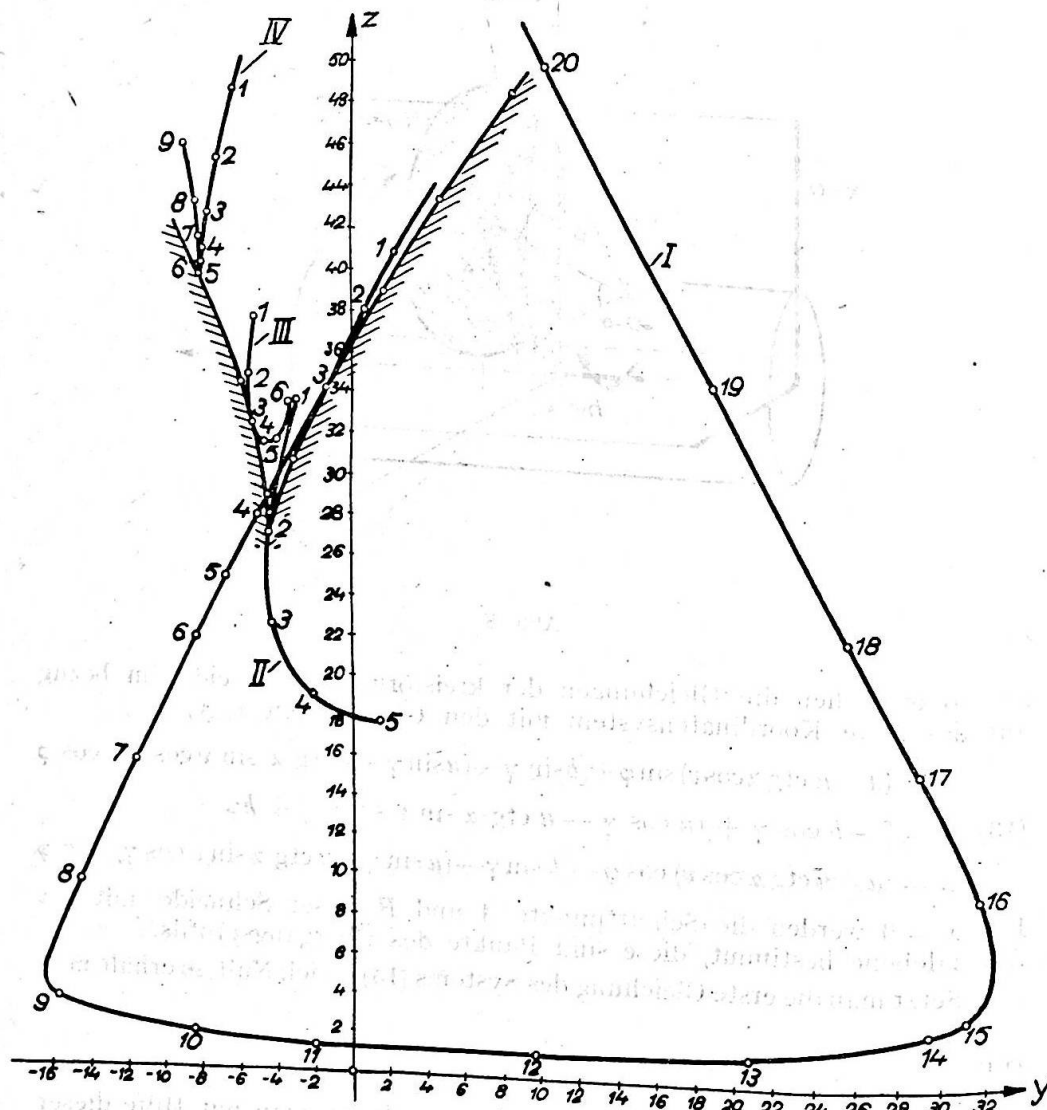


Abb. 9

der Tabelle 2 und Abb. 9 sind die, nach diesem Verfahren berechneten Werte in Abhängigkeit von v für $u = 25$, $u^* = 29,875$ und $u = 36$ dargestellt.

Tabelle* 2

	Nr. des Punktes	v°	y_{mm}	z_{mm}
Profil I $u = 36 \text{ mm}$	1	-28°	2,116347	40,379758
	2	-26°	0,405337	37,280781
	3	$-24^\circ 4' 52''$	-1,251405	34,305130
	4	-20°	-4,803345	27,941400
	5	-18°	-6,545732	24,864012
	6	-16°	-8,275704	21,757202
	7	-12°	-11,620494	15,546528
	8	-8°	-14,447340	9,348780
	9	-4°	-15,782533	3,263505
	10	-3°	-8,596156	1,890290
	11	$-2^\circ 30'$	-1,942308	1,359859
	12	-2°	9,733758	1,240468
	13	$-1^\circ 30'$	20,775180	1,354060
	14	$-0^\circ 30'$	29,689093	2,655803
	15	0°	31,212760	3,373010
	16	4°	31,888091	9,469936
	17	8°	29,009733	15,633369
	18	12°	25,626330	21,934181
	19	20°	18,521532	34,185662
	20	30°	9,809302	49,546519
Profil II $u = 29,875 \text{ mm}$	1	-20°	-3,000063	33,629855
	2	$-14^\circ 22' 5''$	-4,273545	27,116489
	3	-10°	-4,128789	22,531225
	4	-5°	-2,200817	19,176583
	5	0°	1,410179	17,924839
Profil III $u = 25 \text{ mm}$	1	-15°	-5,155280	37,990994
	2	-10°	-5,438122	34,842898
	3	$-5^\circ 1' 50''$	-5,193813	32,369219
	4	0°	-4,557460	31,360843
	5	5°	-3,845156	31,782069
	6	10°	-3,397547	33,569066
Profil IV $u = 21,84276 \text{ mm}$	1	-20°	-6,246639	48,606233
	2	-15°	-7,028862	45,338959
	3	-10°	-7,529135	42,740924
	4	-5°	-7,775259	41,014236
	5	$1^\circ 49' 42''$	-7,842180	40,028268
	6	5°	-7,846912	40,230362
	7	10°	-7,932370	41,349696
	8	15°	-8,208755	43,373358
	9	20°	-8,735029	46,175081

* bei der Bearbeitung dieser Tabelle haben mitgewirkt: L. Negrescu, A. Németh, T. Rus.

Diejenige v -Werte, welche den Tangentenpunkten entsprechen sind in der Tabelle unterstrichen. Das Übergangsprofil ist in jedem Fall tangent zum vom Kegel umhüllten Profil. Für $u < u^*$, das heisst für die Punkte des vom Kegel effektiv umhüllten Profils entsteht eine äussere Berührung (Profil III). Im Rückkehrpunkt des vom Kegel umhüllten Profils ist das Übergangsprofil zu beiden Profilaesten tangent. Für den ersten Ast ist das Übergangsprofil eine äussere Tangente, für den zweiten Ast eine innere (Profil II). Ist der Wert von u grösser als der entsprechende u^* -Wert des Rückkehrpunktes, so entsteht eine innere Berührung an dem imaginären Ast des vom Kegel umhüllten Profils (Profil I). In diesem Falle schneidet das Übergangsprofil das vom Kegel umhüllte effektive Profil, wodurch ein Unterschnitt desselben entsteht.

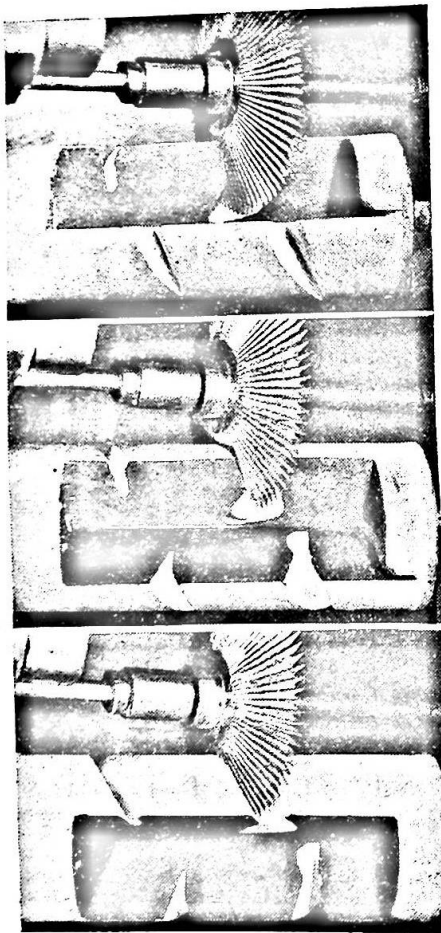


Abb. 10

In Abb. 10 wurden für diesen Fall die Phasen der Bearbeitung an einem Gipsmodell gezeigt.

Ein für die Praxis wichtiges Problem ist die Bestimmung desjenigen u -Wertes, für welchen das Übergangsprofil einen Rückkehrpunkt aufweist, und sich an das vom Kegel umhüllte Profil bei diesem singulären Punkt anschmiegt. In diesem Fall geht die vom Kegel umhüllte Flanke unmittelbar auf den inneren Zylinder der Schnecke über, ähnlich wie dies bei der Evolventenschnecke der Fall ist.

Nachdem die umhüllende kreisförmige Schneide die charakteristische

Kurve der schraubenförmigen Übergangsflanke ist, wird für die Lösung dieses Problems in der obenangeführten Weise vorgegangen.

Es wird demzufolge bestimmt, unter welchen Bedingungen die Tangente an den umhüllenden Kreis im Berührungspunkt und dem Zylinder der beschriebenen Schraubenlinie entspricht. Der Halbmesser des Zylinders, welcher den im Abstande u von der Kegelspitze stehenden Kreis berührt, entspricht dem Minimalwert der Funktion

$$(15) \quad r = \min (\sqrt{X^2 + Z^2})$$

Wird in dieser Gleichung X und Z aus (11) eingesetzt, differenziert man nachher nach v und setzt man gleich Null, so erhält man folgende Beziehung

$$(16) \quad u = \psi(v) = \frac{b \sin \gamma \cos \gamma \cos v - a \sin v}{\sin \gamma \cdot \cos \gamma \cdot \cos v + (\operatorname{ctg} \alpha \cos^2 \gamma - \operatorname{ctg} \alpha) \sin v \cdot \cos v}$$

Diese zeigt, welchen Wert der Parameter u hat, wenn der Punkt auf dem Berührungszylinder durch den Winkel v festgelegt wird.

In Abb. 11 wurde der berührende Zylinder mit der Grundebene des Kegels, welche im Abstande u von dessen Spitze steht, geschnitten und die Tangente in zwei Projektionen dargestellt.

Für das Auffinden des realen Wertes des Winkels β , den die Tangente T mit der Zylinderachse bildet, wurde das Kippverfahren angewendet.

Auf Grund der geometrischen Beziehungen der Abb. 11 nachdem $AB' = AB_1$, kann geschrieben werden

$$(17) \quad AB' \cos v \sin \gamma = AB' \cos \beta$$

Hieraus folgt

$$(18) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 v \sin^2 \gamma}}{\cos v \cdot \sin \gamma}$$

Der Neigungswinkel β' der vom Berührungspunkt auf dem Zylinder beschriebenen Schraubenlinie kann, wie folgt errechnet werden:

$$(19) \quad \operatorname{tg} \beta' = \frac{\min (\sqrt{X^2 + Z^2})}{h}$$

In dem wir diese zwei Winkel gleichstellen, erhalten wir

$$(20) \quad \frac{1 - \cos^2 v \sin^2 \gamma}{\cos^2 v \sin^2 \gamma} = \frac{\min (X^2 + Z^2)}{h^2}$$

Durch Einsetzung für X und Y die Werte aus (11) und weiter im Besitze des Zusammenhanges (14) zwischen u und v folgt sofort

$$(21) \quad f(u, v) = f(u, \psi(u)) = \frac{(a - u \operatorname{ctg} \alpha \cos v)^2 + [b \sin \gamma - u(\sin \gamma + \operatorname{ctg} \alpha \cos \gamma \sin v)]^2}{h^2} - \frac{1 - \sin^2 \gamma \cos^2 v}{\sin^2 \gamma \cdot \cos^2 v} = 0$$

Um eine reelle Wurzel dieser Gleichung zu kalkulieren, was vom praktischen Gesichtspunkte aus interessant ist, sollen wir ein möglichst kleines Gebiet für v bestimmen, in welchem sich der Rückkehr-

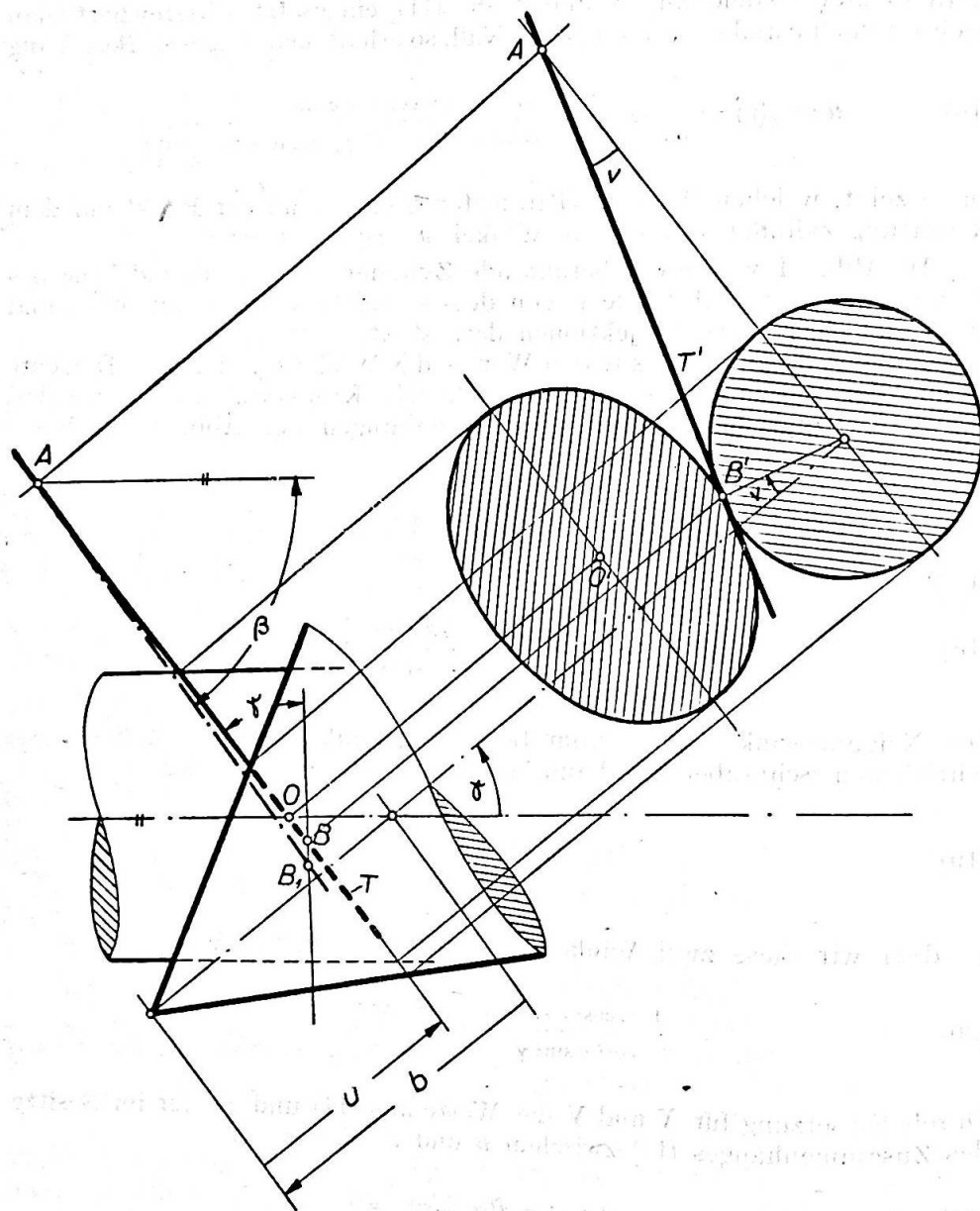


Abb. 11

punkt befindet. Zu diesem Zwecke können wir uns einen Mechanismus vorstellen, welcher aus einer Winkelkurbel M und aus einem auf das Kniestück senkrechten Glied E , welches in C artikuliert ist, besteht (Abb. 8). Beim Drehen der Kurbel M , welche zugleich auch eine Translation in Richtung der Achse Oy ausführt, hier gesichert durch eine Schrauben-

bindung, beschreibt die Spitze des Gliedes E , welche sich auf die Ebene $x = 0$ stützt, die entsprechende Übergangskurve. Wenn wir die Länge des Gliedes E variieren, in Verbindung mit den verschiedenen Positionen der Artikulation C auf dem Kniestücke der Kurbel, können wir eine ganze Reihe (Familie) der Übergangskurven bekommen.

Für jene Übergangskurve, welche sich näherungsweise im Eckpunkt endet, ist das Bereich für ν festgelegt.

Im Falle des gegebenen Beispiels

$$0^\circ < \nu < 10^\circ$$

Wenn man $u = \psi(\nu)$ aus (16) für $\nu = 0^\circ$ und 10° bestimmt, und wenn man diese Werte in (21) einsetzt, bekommt man für $f(u, \nu) = 2,929070$ und $57,501088$. Wenn wir nun mit dem Halbierungsverfahren weitergehen, können wir u mit einer vorher gegebenen, gewünschten Genauigkeit bestimmen.

In der Tabelle 3 bekommt man nach dem neunten Schritt für u

$$21,808631 \text{ mm} < u < 21,887922 \text{ mm}$$

also mit einer Toleranz $\Delta u = 0,079291 \text{ mm}$.

In der Tabelle 2 sind auch die diesem Falle entsprechenden Koordinaten gegeben. Das entsprechende Profil ist in Abb. 9 mit IV bezeichnet.

Es ist empfehlenswert die lange Rechnung der Koordinaten des von der Kegelfläche eingehüllten Profils und auch die Rechnung des Rückkehrpunktes mit einer elektronischen Rechenmaschine zu bewerkstelligen.

Das Schema des Programmes für den entsprechenden Algorithmus ist in Abb. 12 gegeben.

Auf Grund dieses Schemas ist das entsprechende Programm für die Maschine CIFA-2 gegeben. Das Programm enthält 200 Wörter der Maschine sowohl für die Instruktionen, als auch für die Eingangsdaten. Die Blocks aus diesem Schema nennen wir im Folgenden Operatoren [4] und ihre Bedeutung ist die folgende:

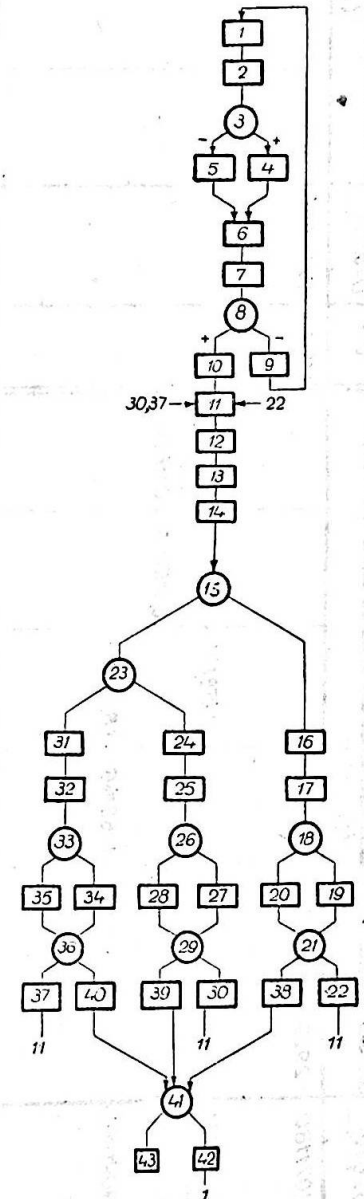


Abb. 12

v°	$u = \psi(v)_{mm}$	Schritt 0	Schritt 1	Schritt 2	Schritt 3	Schritt 4	Schritt 5	v°	$u = \psi(v)_{mm}$	Schritt 6	Schritt 7	Schritt 8	Schritt 9
0°	-1071180	-2,929070	-2,929070	-2,929070				$1^\circ 33' 45''$	-22,901475		$f(u, v) =$		
$1^\circ 15'$	24,131151				-1,158794	-1,158794		$1^\circ 43' 8''$	22,278720	-0,233337			
$1^\circ 33' 45''$	22,901475				-0,116649	-0,116649	-0,559128	$1^\circ 48' 59''$	21,887922				
$1^\circ 52' 30''$	21,639359						0,116649	$1^\circ 50' 10''$	21,808631				
$2^\circ 30'$	19,091783			-1,655166	-1,655166			$1^\circ 52' 30''$	21,639359	0,116649	0,116649		
5°	7,941697		11,521116										
10°	-19,986387	57,501088											
Δf	60,430158	14,450186	4,584236	2,813960	1,275443	0,675777				0,349986	0,180779	0,086574	0,043740
Δv°		10°	5°	$2^\circ 30'$	$1^\circ 15'$	$37' 30''$	$18' 45''$			$9' 23''$	$4' 41''$	$2' 20''$	$1' 10''$
ΔU_{mm}	-21,057567	6,870517	18,020603	5,039368	2,491792	1,262116				0,639361	0,326652	0,157380	0,079291

* bei der Bearbeitung dieser Tabelle haben mitgewirkt: L. Negrescu, A. Németh, T. Rus.

Op. 1 bewerkstelligt die Rechnung der Ausdrücke

$$C_k = a_1 u_k - b_1$$

bzw.

$$F_k = \frac{C_k B + A \sqrt{A^2 - B^2 + C_k^2}}{A^2 + C_k^2}$$

und es folgt Op. 2. A und B wie auch a_1 und b_1 sind gegebene Konstanten wie in [2, Formel 49]Op. 2 berechnet den Wert $\sqrt{1 - F_k^2}$ und es folgt Op. 3.Op. 3 vergleicht F_k mit F_{k-1} . Wenn $F_k > F_{k-1}$ folgt Op. 4 sonst Op. 5.Op. 4 berechnet den Wert $+\sqrt{1 - F_k^2}$. Es folgt Op. 6.Op. 5 berechnet den Wert $-\sqrt{1 - F_k^2}$. Es folgt Op. 6.Op. 6 der Inhalt der Zelle F_{k-1} ist mit F_k vertauscht. Es folgt Op. 7.

Op. 7 es ist die Rechnung der Formeln realisiert

$$E_k = (b - u_k) \sin \gamma - \sqrt{1 - F_k^2} u_k \operatorname{ctg} \alpha \cos \gamma,$$

$$G_k = a - u_k F_k \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\theta_k = \frac{-E_k}{\sqrt{E_k^2 + G_k^2}}$$

$$z_k = G_k \sqrt{1 - \theta_k^2} - \theta_k E_k$$

$$y_k = h \arcsin \theta_k + (u - b) \cos \gamma - u_k \sqrt{1 - F_k^2} \operatorname{ctg} \alpha \sin \gamma$$

Im selben Operator werden auch die Werte z_k , y_k , u_k gedruckt. Es folgt Op. 8.Op. 8 vergleicht z_k mit z_{k-1} . Wenn $z_k < z_{k-1}$ folgt Op. 9, sonst Op. 10.Op. 9 in diesem Fall haben wir keinen Wert für u_k realisiert, für welchen der Wert der Funktion kleiner sei, als die zwei extremen Fälle. Der Operator bewerkstelligt die Adressenänderung

$$z_{k-1} \rightarrow z_{k-2}$$

$$u_{k-1} \rightarrow u_{k-2}$$

$$z_k \rightarrow z_{k-1}$$

$$u_k \rightarrow u_{k-1}$$

Weiter berechnet sich $u_{k+1} = u_k + 1$ und es folgt Op. 1.

Op. 10 in diesem Falle werden die Grenzpunkte des Intervalls I_k bestimmt, also u_{k-2} und u_k . Der Operator bewerkstelligt die Transformationen

$$\begin{array}{ll} u_{k-2} \rightarrow u'_k & z_{k-2} \rightarrow z'_k \\ u_{k-1} \rightarrow u''_k & z_{k-1} \rightarrow z''_k \\ u_k \rightarrow u'''_k & z_k \rightarrow z'''_k \end{array}$$

Es folgt Op. 11.

Op. 11 berechnet $u_{k+1}^s = \frac{u'_k + u''_k}{2}$ und es folgt Op. 12.

Op. 12 bewerkstelligt, dass der Operator 7 das Kommando dem Operator 13 übergibt. Es wird die Transformation $u_{k+1}^s \rightarrow u_k$ gemacht. Es folgt Op. 1.

Op. 13 berechnet $u_{k+1}^d = \frac{u''_k + u'''_k}{2}$ und es folgt Op. 14.

Op. 14 bewerkstelligt, dass der Operator 7 das Kommando dem Operator 15 übergibt. Es wird die Transformation $u_{k+1}^d \rightarrow u_k$ gemacht. Es folgt Op. 1.

Op. 15 vergleicht z_{k+1}^s mit z_k'' . Wenn $z_k'' > z_{k+1}^s$, sind wir im Falle 1 und es folgt Op. 16. Sonst sind wir im Falle 2 oder 3 und es folgt Op. 23.

Op. 16 berechnet die Differenzen $d_1 = z'_k - z_{k+1}^s$ und $d_2 = z''_k - z_{k+1}^s$.

Op. 17 berechnet die Differenz $d = d_1 - d_2$. Es folgt Op. 18.

Op. 18 bestimmt ob $d_1 > d_2$ und in diesem Falle folgt es Op. 19, sonst Op. 20.

Op. 19 in diesem Falle $r = d_1$ und es wird $r_1 = r - \Delta z$ berechnet und es folgt Op. 21.

Op. 20 in diesem Falle $r = d_2$ und es wird $r_1 = r - \Delta z$ berechnet und es folgt Op. 21.

Op. 21 es wird das Vorzeichen r_1 analysiert. Wenn $r_1 > 0$ ist, wird $r > \Delta z$ und es folgt Op. 22. In diesem Falle ist die Rechnung nicht beendet. Wenn nicht, es folgt Op. 38.

Op. 22 bewerkstelligt die Transformationen

$$\begin{array}{ll} z'_k \rightarrow z'_{k+1} & u'_k \rightarrow u'_{k+1} \\ z_{k+1}^s \rightarrow z''_{k+1} & u_{k+1}^s \rightarrow u''_{k+1} \\ z''_k \rightarrow z'''_{k+1} & u''_k \rightarrow u'''_{k+1} \end{array}$$

Op. 23 dieser Operator vergleicht z'_k mit z_{k+1}^d . Wenn $z'_k < z_{k+1}^d$ ist, es folgt Op. 24, sonst Op. 31.

Op. 24 dieser Operator arbeitet im Falle 2. Er rechnet die Differenzen $d_1 = z'''_k - z_{k+1}^d$ und $d_2 = z''_k - z_{k+1}^d$. Es folgt Op. 25.

Op. 25 es wird die Differenz $d = d_1 - d_2$ gerechnet. Es folgt Op. 26.

Op. 26 es wird das Vorzeichen d analysiert. Wenn $d > 0$, folgt dass $d_1 > d_2$ und es folgt Op. 27, sonst Op. 28.

Op. 27 in diesem Falle $r = d_1$ und es wird $r_1 = r - \Delta z$ gerechnet und es folgt Op. 29.

Op. 28 in diesem Falle $r = d_2$ und es wird $r_1 = r - \Delta z$ berechnet und es folgt Op. 29.

Op. 29 wenn $r_1 > 0$, das bedeutet, dass $r > \Delta z$ und die Rechnung ist nicht beendet; es folgt Op. 30, sonst Op. 39.

Op. 30 bewerkstelligt die Transformationen

$$\begin{array}{lll} z''_k \rightarrow z'_{k+1}; & z_{k+1}^d \rightarrow z''_{k+1}; & z'''_k \rightarrow z'''_{k+1} \\ u''_k \rightarrow u'_{k+1}; & u_{k+1}^d \rightarrow u''_{k+1}; & u'''_k \rightarrow u'''_{k+1} \end{array}$$

es folgt Op. 11.

Op. 31 wir sind im Falle 3 und dieser Operator rechnet die Differenzen $d_1 = z_{k+1}^s - z''_k$ und $d_2 = z_{k+1}^d - z''_k$. Es folgt Op. 32.

Op. 32 es wird die Differenz $d = d_1 - d_2$ berechnet und es folgt Op. 33.

Op. 33 es wird das Vorzeichen d analysiert und es wird bestimmt ob $d_1 > d_2$ und es folgt Op. 34, oder, wenn $d_1 < d_2$ ist, es folgt Op. 35.

Op. 34 in diesem Falle $r = d_1$, es wird $r_1 = r - \Delta z$ berechnet und es folgt Op. 36.

Op. 35 in diesem Falle $r = d_2$, es wird $r_1 = r - \Delta z$ berechnet und es folgt Op. 36.

Op. 36 es wird das Vorzeichen r_1 analysiert. Wenn $r_1 > 0$, es bedeutet, dass $r > \Delta z$ und die Rechnung wird wiederholt. Es folgt Op. 37. Sonst folgt Op. 40.

Op. 37 dieser Operator bewerkstelligt die Transformationen

$$\begin{array}{lll} z_{k+1}^s \rightarrow z'_{k+1} & z''_k \rightarrow z''_{k+1} & z_{k+1}^d \rightarrow z'''_{k+1} \\ u_{k+1}^s \rightarrow u'_{k+1} & u''_k \rightarrow u''_{k+1} & u_{k+1}^d \rightarrow u'''_{k+1} \end{array}$$

und es folgt Op. 11.

Op. 38 es wird die Transformation $u_{k+1}^s \rightarrow u_k$ bewerkstelligt. Es folgt Op. 41.

Op. 39 es wird die Transformation $u_{k+1}^d \rightarrow u_k$ bewerkstelligt. Es folgt Op. 41.

Op. 40 es wird die Transformation $u_k'' \rightarrow u_k$ bewerkstelligt. Es folgt Op. 41.

Op. 41 es wird u_k mit $u_{\max}$ verglichen. Wenn $u_k < u_{\max}$, es folgt Op. 42. Sonst folgt es Op. 43.

Op. 42 es wird $u_{k+1} = u_k + 1$ berechnet. Es wird die Transformation 7 gemacht, so dass die Bewerkstelligung der Rechnung dem Op. 41 übergeben wird. Es folgt Op. 1.

Op. 43 es wird die Rechnung beendet.

Ähnlich können wir das Schema der Rechnung auch für die anderen, in dieser Arbeit vorgeführten Rechnungen aufstellen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Bauersfeld W., *Ein Beitrag zur Theorie der Schneckengetriebe und zur Normung der Schnecken*. VDI. Forschungsheft 427, 1949/50.
- [2] Gergely E., Maros D., *Über die Abweichungen zwischen den mit geradprofiligen Werkzeugen bearbeiteten Flankenprofilen von Schnecken*. Mathematica, vol. 3 (26), 1, 19–38 (1961).
- [3] Maros D., *Cîteva probleme legate de standardizarea melcilor cilindrici*. Standardizarea nr. 2, 68–71 1960.
- [4] Leapunov A. A., *Despre schemele logice de programare. Probleme de cibernetică*, Bibl. Analelor Rom.-Sov., seria tehnică nr. 69–70, 265–306 (1959).

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ А. ANGELESCU

А. ХАРАДЗЕ

Тбилиси, СССР

Как указал А. ANGELESCU в своей диссертации [1], для многочлена Эрмита $H_n(x)$ степени n имеет место интегральное представление

$$(1) \quad H_n(x) \equiv (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x + it)^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

В настоящей заметке показывается, что формула Angelescu некоторым образом может быть обобщена.

Пусть $k \geq 2$ — фиксированное натуральное число. Рассмотрим последовательность чисел

$$(S_k) \quad 0, 1, k, k+1, 2k, 2k+1, \dots, mk, mk+1, \dots$$

Обозначим через $\{mk\}!$ или $\{mk+1\}!$ обобщённые факториалы — произведение чисел последовательности (S_k) , начиная от 1 до mk или $mk+1$, соответственно. По этой же последовательности образуем обобщённые биномиальные коэффициенты $\begin{bmatrix} mk \\ p \end{bmatrix}$, $p \leq 2m$ или $\begin{bmatrix} mk+1 \\ q \end{bmatrix}$, $q \leq 2m+1$ по следующему правилу: для некоторого mk , взятого из (S_k) и заданного натурального $p \leq 2m$ образуем дробь, числитель которой представляет произведение p множителей, начиная от mk вниз в порядке убывания по последовательности (S_k) , а в знаменателе стоит обобщённый факториал, состоящий из p множителей.

Такую же дробь можно образовать и для некоторого $mk+1$ и заданного $q \leq 2m+1$. Так, например,

$$\begin{bmatrix} 2k+1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{(2k+1)2k(k+1)}{\{k+1\}!} = \frac{(2k+1)2k(k+1)}{1k(k+1)} = 2(2k+1).$$