

Е - 3734/38

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ  
РУМЫНО-СОВЕТСКИЙ НАУЧНЫЙ ИНСТИТУТ

# БЮЛЛЕТЕНЬ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

СЕРИЯ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ХИМИИ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

2

ИЮЛЬ—ДЕКАБРЬ 1961

---

Адрес редакции — Бухарест, ул. Гутенберга, д. 3-б

Член-корр: Академии РНР Т. ПОПОВИЧИУ

## РАЗДЕЛИМЫЕ РАЗНОСТИ И ПРОИЗВОДНЫЕ

„Studii și cercetări matematice“, Cluj, t. XI, 1960

1. В данной работе изучается остаточный член  $R_s[f]$  формулы приближения

$$A[f] = A[L(y_0, y_1, \dots, y_s; f|x)] + R_s[f], \quad (1)$$

где  $A[f]$  является линейным функционалом (аддитивным и однородным), определенным на некотором векторном пространстве  $S$ , образованном действительными функциями  $f=f(x)$ , от действительной переменной  $x$ , определенными и непрерывными в интервале  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ). Пространство  $S$  содержит все многочлены и его элементы удовлетворяют всем необходимым свойствам дифференцируемости для того, чтобы существовали данные линейные функционалы.

$L(y_0, y_1, \dots, y_s; f|x)$  является интерполяционным многочленом Лагранжа-Эрмита относительно функции  $f$  и на узлах

$$y_0, y_1, \dots, y_s, \quad (3)$$

являющихся частью, конечного или бесконечного ряда различных или не различных точек

$$y_0, y_1, \dots \quad (3)$$

Формула (1) полностью охарактеризована тем, что выражается соотношением

$$A[f] = \sum_{v=0}^s C_v[y_0, y_1, \dots, y_v; f] + R_s[f], \quad (4)$$

где коэффициенты

$$C_v = A \left[ \prod_{i=0}^{v-1} (x - y_i) \right], \quad v=0, 1, \dots, s \quad (5)$$

являются независимыми по отношению к функции  $f$ , а также и тем, что остаточный член  $R_s[f]$  имеет степень точности, равную по крайней мере  $s'$ ; это значит, что  $R_s[f]$  имеет нулевое значение на всяком многочлене степени  $s$ . В формуле (4) пользуемся обозначением  $[y_0, y_1, \dots, y_v; f]$  для разности функции  $f$ , разделенной на узлах  $y_0, y_1, \dots, y_v$ .

Формула (1) является обобщением интерполяционной формулы Лагранжа-Эрмита и, следовательно, формулы Тейлора.

2. В этой работе рассматривается несколько случаев, когда остаточный член  $R_s[f]$  выражается *простой формой*, означающей, что он может быть представлен в виде  $R_s[f] = k[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{s+2}; f]$ , где  $k$  является независимым от функции  $f$  и где все  $s+2$  точки  $\xi_i$  являются различными и расположенными внутри интервала  $I$  ( $s \geq 0$ ). Эти точки могут зависеть от функции  $f$ .

Рассмотрим эту задачу для функционала

$$A[f] = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^{K_i-1} a_{i,j} f^{(j)}(z_i), \quad (6)$$

где  $p, k_1, k_2, \dots, k_p$  являются натуральными данными числами,  $z_i, i=1, 2, \dots, p$ ,  $p$  различными точками  $I$ , а  $a_{i,j}$  числами, независимыми от функции  $f$ . Этот случай является важным, так как подобные функционалы встречаются во многих формулах числового дифференцирования и интегрирования.

3. Доказывается, что у остаточного члена  $R_s[f]$  формулы

$$[x_1, x_2, \dots, x_m; f] = \sum_{v=0}^s [x_1, x_2, \dots, x_m; \prod_{i=0}^{v-1} (x - y_i)] [y_0, y_1, \dots, y_v; f] + R_s[f], \quad (7)$$

будет простое выражение, если  $s \geq m-1$  и если все точки (2) суть  $\leq a'$  или все  $\geq b'$ , где  $[a', b']$  является самым малым замкнутым интервалом, содержащим все узлы, отдельные или нет,  $x_1, x_2, \dots, x_m$  раздельной разности первого члена.

Этот результат является действительным при следующих условиях:

Пусть вообще,  $x_1, x_2, \dots, x_m$  будут узлами линейного функционала (6), и каждый узел будет взят со своей степенью кратности. Положим, что  $m = k_1 + k_2 + \dots + k_p$ . Точки  $x_1, x_2, \dots, x_p$  образуют неубывающий или невозрастающий ряд или нормальную перестановку. Обозначая узлы  $z_i$  соответственно со степенью кратности  $k_i, i=1, 2, \dots, p$  в ряде  $x_1, x_2, \dots, x_m$  мы таким образом пронумеруем (первыми  $m$  натуральными числами) перестановку узлов. Нумерование или перестановка будут нормальными, если для каждого  $i$  эти все  $k_i$  узлы  $x_j$ , совпадающие с  $z_i$  будут пронумерованы  $k_i$  — последовательными показателями. Узлы, совпадающие с  $z_1$  — это  $x_1, x_2, \dots, x_{k_1}$  и ни одна из точек  $y_0, y_1, \dots$  не совпадет ни с одним из узлов  $z_2, z_3, \dots, z_p$  (если  $p > 1$ ). Имеем  $s' \geq s + m - k - 1 (\geq m - 1)$ , где  $k$  является самым малым между числом  $k_1$  и числом членов ряда (2), которые совпадают с  $z_1$ , а  $S'$  является самым малым показателем, так, чтобы ряд  $y_0, y_1, \dots, y_{s'-1}$  содержал самое меньшее  $k$  членов, равных с  $z_1$ . Если  $k=0$  берем  $s'=0$ . Наконец, предполагается, что  $p > 1$  или  $p=1$ , а  $k < k_1$ .

В этих условиях для линейного функционала (6) остаточный член  $R_s[f]$  формулы (1) будет дан выражением:

$$R_s[f] = \sum_{i=k+1}^m \mu_i^{(s)} [y_0, y_1, \dots, y_{s+Z+K-i}, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_i; f], \quad (8)$$

где коэффициенты  $\mu_i^{(s)}$  не зависят от функции  $f$ .

4. При наличии вышеуказанных условий и если возьмем линейный функционал (6), а точки  $y_0, y_1, \dots$  являются все  $\leq a'$  или же все  $\geq b'$ ,

а также если существует некоторое  $s_0$  так, чтобы  $\mu_i^{(s)}$  были все однозначными для  $s = s_0$ , то тогда  $R_s[f]$  будет простое выражение для  $s \geq s_0$ . Доказывается также, что, если точки  $y_0, y_1, \dots$  совпадают, то  $R_s[f]$  будет простым выражением для  $s$  достаточно большого значения. Как  $p$  применение доказывается, что остаточный член  $R_s[f]$  формулы

$$A[f] = \sum_{v=1}^s A[x^v] \frac{f^{(v)}(0)}{v!} + R_s[f],$$

где  $A[f] = f(6) - f(0) - 0,28[f'(0) + f'(6)] - 1,62[f'(1) + f'(5)] - 2,2f'(3)$  имеет простое выражение для  $S \geq 13$ . Указанная формула выражает структуру остаточного члена формулы квадратуры Харди, у которой, как известно, остаточный член не имеет простого выражения.