

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Aczél, J., Golab, S. *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*. Monografie Matematyczne, t. 29, Warszawa 1960.
- [2] Golab, S. *Sur les comitants scalaires du premier ordre des champs de scalaires*. Mathematica, 2(25), 253–255 (1960).
- [3] Makai, I. *Über Invarianten, die aus gewissen Tensoren gebildet sind*. Publicationes mathematicae, Debrecen 7, 359–363 (1960).
- [4] Móór, A. *Über die kovariante Ableitung der vektoren*. Acta sci. math. Szeged 19, 237–246, (1958).
- [5] Móór, A. *Über Tensoren, die aus angegebenen geometrischen Objekten gebildet sind*. Publicationes mathematicae Debrecen 6, 15–25 (1959).

Reçu le 14. VIII. 1961.

SUR LA MONOTONIE DE LA SUITE DES DÉRIVÉES
DES POLYNOMES DE BERNSTEIN

par

O. ARAMĂ et D. RIPIANU

à Cluj

1. Dans le travail [1] on a démontré la propriété suivante :

Si la fonction $f(x)$, définie dans l'intervalle $[0, 1]$ est dans cet intervalle convexe, respectivement non-concave du 1^{er} et du 2^e ordre (c'est-à-dire si chaque différence divisée du 2^e ordre et chaque différence divisée du 3^e ordre de cette fonction est positive, respectivement non-négative), et si les différences divisées du 2^e ordre sont bornées dans cet intervalle, tandis que $\lim_{x \rightarrow 0} |[x_1, x_2, x_3; f]| \neq 0$, alors la suite

$$(1) \quad \frac{d}{dx} B_1(x; f), \frac{d}{dx} B_2(x; f), \dots, \frac{d}{dx} B_n(x; f), \dots$$

est décroissante, respectivement non-croissante dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{5} - \varepsilon\right]$, à partir d'un certain terme $\frac{d}{dx} B_N(x; f)$, ou $N = N(\varepsilon)$ ne dépend pas de x et ε est un nombre positif arbitraire, moindre que $\frac{1}{5}$.

L'on a désigné par $B_n(x; f)$ le polynôme d'interpolation de Bernstein du degré n relatif à la fonction $f(x)$ et à l'intervalle $[0, 1]$:

$$(2) \quad B_n(x; f) = \sum_{i=0}^n C_n^i f\left(\frac{i}{n}\right) x^i (1-x)^{n-i}.$$

Dans la présente note nous nous proposons d'étudier l'intervalle *maximum* de la forme $[0, \lambda]$ dans lequel la suite (1) est non-croissante pour toute fonction analytique dans l'intervalle $[0, 1]$ et dont toutes les dérivées à partir du 2^e ordre sont dans cet intervalle non-négatives. Nous désignerons cet intervalle par $I_{\max} = [0, \lambda_{\max}]$.

Un calcul immédiat donne $B_n(x; x^2) = \frac{x}{n} [1 + (n-1)x]$, par suite

$$(3) \quad \frac{d}{dx} [B_{n+1}(x; x^2) - B_n(x; x^2)] = \frac{1}{n(n+1)} (2x-1),$$

d'où il s'ensuit que pour la fonction $f(x) = x^2$ l'intervalle *maximum* de monotonie de la suite (1) est l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Il en résulte

$$(4) \quad \lambda_{\max} \leq \frac{1}{2}.$$

2. En vertu des hypothèses relatives à la fonction $f(x)$, elle admet au voisinage de l'origine une représentation de la forme

$$(5) \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \dots + \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \dots$$

tous les coefficients $\frac{f^{(p)}(0)}{p!}$ ($p = 2, 3, \dots$) étant non-négatifs. Du résultat

bien connu suivant lequel si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ à rayon de convergence R ($0 < R < \infty$) a tous ses coefficients réels et non-négatifs, le point $x = R$ est un point singulier pour la fonction $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, on déduit de suite que le rayon de convergence de la série (3) est plus grand que l'unité.

D'autre part l'opérateur

$$\delta_n(x; \varphi) = \frac{d}{dx} B_{n+1}(x; \varphi) - \frac{d}{dx} B_n(x; \varphi)$$

est un opérateur défini dans l'espace $C[0,1]$, à valeurs dans le même espace. On constate de suite que c'est un opérateur linéaire, c'est-à-dire additif, homogène et continu, par rapport à la norme $\|\varphi\| = \max_{x \in [0,1]} |\varphi(x)|$.

En tenant compte de ces observations, on déduit pour la fonction $f(x)$ de (5), l'égalité

$$(6) \quad \delta_n(x; f) = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} f^{(p)}(0) \delta_n(x; x^p),$$

la série du deuxième membre étant uniformément convergente dans l'intervalle $[0,1]$.

Pour démontrer que dans les hypothèses adoptées relativement à la fonction $f(x)$ on a $\delta_n(x; f) \leq 0$ dans un intervalle $I = [0, \lambda]$, il suffira donc de démontrer l'inégalité

$$(7) \quad \delta_n(x; x^p) \leq 0 \quad \text{pour } x \in [0, \lambda],$$

quels que soient les nombres naturels n et p .

3. Nous allons noter

$$(8) \quad K_{n,p}(x) = \delta_n(x; x^p) = \frac{d}{dx} [B_{n+1}(x; x^p) - B_n(x; x^p)]$$

et démontrer le lemme suivant :

LEMME. Le polynome $K_{n,p}(x)$ a dans l'intervalle ouvert $(0,1)$ une racine et une seule (qui sera désignée par $x_{n,p}$) et prend dans cet intervalle le signe de $x - x_{n,p}$.

Démonstration. On déduit de (2)

$$(9) \quad B_n(x; f) = \sum_{i=0}^n C_n^i f\left(\frac{i}{n}\right) \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j C_{n-i}^j x^{i+j} = \sum_{k=0}^n C_k[f] x^k.$$

Le coefficient $C_k[f]$ s'obtient en faisant $i+j=k$,

$$C_k[f] = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_n^i C_{n-i}^{n-k} f\left(\frac{i}{n}\right) = \begin{cases} f(0) & \text{si } k=0, \\ (-1)^k C_n^k \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i f\left(\frac{i}{n}\right), & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Si l'on y fait $f(x) = x^p$ ($p \geq 1$), on obtient $C_0[x^p] = 0$ et

$$(10) \quad C_k[x^p] = (-1)^k \frac{C_n^k}{n^p} \sum_{i=1}^k (-1)^i C_k^i i^p = \frac{1}{n^p} n(n-1) \dots (n-k+1) B_k^{(p)}$$

où

$$(11) \quad B_k^{(p)} = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=1}^k (-1)^i C_k^i i^p \quad (k \geq 1).$$

On constate de suite que $B_1^{(p)} = 1$ et que

$$(12) \quad B_k^{(p+1)} = B_{k-1}^{(p)} + k B_k^{(p)}, \quad (k \geq 2).$$

Si p est un nombre entier quelconque supérieur à l'unité, on a également

$$(13) \quad B_k^{(p)} > 0 \quad (k = 2, 3, \dots, p) \text{ et } B_k^{(p)} = 0 \quad (k = p+1, p+2, \dots).$$

Les relations (13) s'établissent immédiatement ainsi qu'il suit. En supposant qu'elles ont lieu pour $p = h$, on déduit de (12) $B_k^{(h+1)} > 0$ ($k = 2, 3, \dots, h+1$) et $B_k^{(h+1)} = 0$ ($k = h+2, h+3, \dots$), donc les relations en question ont lieu aussi pour $p = h+1$. Or, pour $p = 2$, il résulte de (11) $B_2^{(2)} = 1$ et (pour $k \geq 3$)

$$B_k^{(2)} = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{i=1}^k (-1)^i i C_{k-1}^{i-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j C_{k-1}^j + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j j C_{k-1}^j \right] = 0,$$

étant donné que les relations

$$(1-x)^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j C_{k-1}^j x^j$$

et

$$-(k-1)(1-x)^{k-2} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j j C_{k-1}^j x^{j-1}$$

donnent pour $x = 1$ et $k \geq 3$

$$\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j C_{k-1}^j = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j j C_{k-1}^j = 0.$$

Ainsi donc, les relations (13) ont lieu pour $p = 2$. En vertu du principe de l'induction elles ont lieu pour tout nombre naturel $p > 2$. D'ailleurs ces relations ont lieu également pour $p = 1$, dans la forme $B_k^{(1)} = 1 > 0$ ($k = 1$) et $B_k^{(1)} = 0$ ($k = 2, 3, \dots$), ainsi qu'on le constate à l'aide de (11) et de la relation sus-mentionnée $\sum_{i=0}^k (-1)^i i C_k^i = 0$ ($k \geq 2$), de sorte qu'elles peuvent se remplacer, étant donné que $B_1^{(p)} = 1$, par les relations

$$(14) \quad B_k^{(p)} > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p) \quad \text{et} \quad B_k^{(p)} = 0 \quad (k = p+1, p+2, \dots).$$

On déduit de (6)

$$\frac{d}{dx} B_n(x; x^p) = \sum_{k=1}^{\min(p, n)} k C_k[x^p] x^{k-1},$$

attendu que si $p \leq n-1$, il résulte de (14) et de (10) que pour $k \geq p+1$ on a $C_k[x^p] = 0$.

On déduit donc de la relation ci-dessus et de (7) et (10) que pour $p \geq 2$ on a

$$(15) \quad K_{n,p}(x) = \frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} + \sum_{k=2}^{\min(p, n+1)} (n-1)(n-2) \dots (n-k+2) \left[\frac{n}{(n+1)^{p-1}} - \frac{n-k+1}{n^{p-1}} \right] k B_k^{(p)} x^{k-1},$$

à la condition de remplacer au cas $k = 2$ l'expression $(n-1)(n-2) \dots (n-k+2)$ par l'unité.

Nous désignerons par Γ_k le coefficient $\frac{n}{(n+1)^{p-1}} - \frac{n-k+1}{n^{p-1}}$ de (15). Ce coefficient croît avec k , et pour $k = p$

$$\Gamma_p = \frac{n^p - (n+1)^p + p(n+1)^{p-1}}{[n(n+1)]^{p-1}} = \frac{1}{[n(n+1)]^{p-1}} \sum_{i=0}^{p-2} (p-1-i) C_p^i n^i > 0.$$

Il est évident que $\Gamma_{n+1} > 0$ et que le terme libre de $K_{n,p}(x)$ est négatif pour $p \geq 2$. En tenant compte de ces observations, ainsi que des relations (14), on déduit que le polynôme $K_{n,p}(x)$ présente une variation et une seule, d'où il résulte qu'il a une racine positive et une seule.

Nous allons montrer que cette racine est inférieure à l'unité. A cet effet, on déduit de (2)

$$(16) \quad \frac{d}{dx} B_n(x; f) = \sum_{i=0}^n C_n^i f\left(\frac{i}{n}\right) (i - nx) x^{i-1} (1-x)^{n-1-i},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dx} B_n(x; f) = n f(1) x^{n-1} + C_n^{n-1} f\left(\frac{n-1}{n}\right) [(n-1) x^{n-2} - n x^{n-1}] + \sum_{i=0}^{n-2} C_n^i f\left(\frac{i}{n}\right) (i - nx) x^{i-1} (1-x)^{n-1-i}$$

de sorte que

$$\frac{d}{dx} B_n(x; x^p) \Big|_{x=1} = n - \frac{(n-1)^p}{n^{p-1}}.$$

Cette relation a lieu aussi pour $n = 1$, ainsi qu'on peut le voir directement. En l'utilisant, on déduit de (8)

$$f_1(p) = K_{n,p}(1) = 1 - (n+1) \left(\frac{n}{n+1}\right)^p + n \left(\frac{n-1}{n}\right)^p$$

Par suite $K_{1,p}(1) = 1 - \frac{1}{2^{p-1}} > 0$ et pour $n \geq 2$, la fonction de p

$$f_2(p) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^p f_1(p) = (n+1) \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^p \lg \frac{n+1}{n} + n \lg \frac{n-1}{n}$$

croît avec $p > 0$. Mais

$$f_3(n) = \frac{n-1}{n^2} f_2(1) = \lg \frac{n+1}{n} + \frac{n-1}{n} \lg \frac{n-1}{n},$$

de sorte que

$$f_4(n) = n^2 f_3'(n) = \frac{1}{n+1} - \lg \frac{n}{n+1}$$

donc

$$f_4'(n) = \frac{1+3n}{n(n-1)(n+1)^2} > 0, \quad f_4(n) < \lim_{n \rightarrow \infty} f_4(n) = 0, \quad f_3'(n) < 0,$$

$$f_3(n) > \lim_{n \rightarrow \infty} f_3(n) = 0, \quad f_2(p) > f_2(1) > 0, \quad f_1(p) > 0,$$

par conséquent

$$f_1(p) = K_{n,p}(1) > f_1(1) = 0.$$

On en déduit, en tenant compte qu'ainsi qu'il a été mentionné précédemment $K_{n,p}(0) < 0$, que $0 < x_{n,p} < 1$, ce qui démontre le lemme pour $p \geq 2$. Pour $p = 1$, $K_{n,1}(x) \equiv 0$, ainsi qu'il suit de (8).

4. On déduit du lemme que l'on obtient un intervalle $I = [0, \lambda]$ aux propriétés spécifiées au premier paragraphe en prenant $\lambda = \inf_{\substack{n=1,2,\dots \\ p=2,3,\dots}} x_{n,p}$.

On obtient ainsi d'ailleurs l'intervalle $I_{\max}$, car en choisissant un $\lambda = \bar{\lambda} > \inf_{n,p} x_{n,p}$ quelconque, il existe par définition un couple de valeurs n_1 et p_1 de n et de p , telles que $\inf_{n,p} x_{n,p} \leq x_{n_1,p_1} < \bar{\lambda}$. En choisissant une valeur $\bar{x}$ de x telle que $x_{n_1,p_1} < \bar{x} < \frac{n_1}{p_1}$, on déduit de (6) et de (8) $\delta_{n_1}(\bar{x}; x^{p_1}) = K_{n_1,p_1}(\bar{x}) > 0$, par conséquent on a bien $\inf_{n,p} x_{n,p} = \lambda_{\max}$. Nous sommes d'ailleurs portés à croire que $\lambda_{\max} = \frac{1}{2}$.

Cette affirmation équivaut à l'inégalité $K_{n,p}\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$, quels que soient les nombres entiers et positifs n et p , attendu que de cette dernière on déduit à l'aide du lemme $x_{n,p} \geq \frac{1}{2}$, de sorte que $\lambda_{\max} = \inf_{n,p} x_{n,p} \geq \frac{1}{2}$.

On en déduit à l'aide de (4) que $\lambda_{\max} = \frac{1}{2}$.

Nous allons donner à l'expression de $K_{n,p}\left(\frac{1}{2}\right)$ une forme plus symétrique que celle que l'on obtiendrait de (15) et de (11). A cet effet, on déduit de (2)

$$\frac{d}{dx} B_n(x; f) = \sum_{i=0}^n C_n^i f\left(\frac{i}{n}\right) (i - nx) x^{i-1} (1-x)^{n-i-1},$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} B_n(x; f) &= \sum_{i=1}^n n C_{n-1}^{i-1} f\left(\frac{i}{n}\right) x^{i-1} (1-x)^{n-i-1} [x + (1-x)] - \\ &\quad - \sum_{i=0}^n n C_n^i f\left(\frac{i}{n}\right) x^i (1-x)^{n-i-1} = \\ &= \sum_{i=1}^n n (C_{n-1}^{i-1} - C_n^i) f\left(\frac{i}{n}\right) x^i (1-x)^{n-i-1} + \sum_{i=0}^{n-1} n C_{n-1}^i f\left(\frac{i+1}{n}\right) x^i (1-x)^{n-i-1} - \\ &\quad - n f(0) (1-x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} n C_{n-1}^i \left[f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right] x^i (1-x)^{n-i-1}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{d}{dx} B_n(x; x^p) = \frac{1}{n^{p-1}} \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i [(i+1)^p - i^p] x^i (1-x)^{n-i-1}.$$

Par conséquent

$$\left. \frac{d}{dx} B_n(x; x^p) \right|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1} n^{p-1}} \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i [(i+1)^p - i^p].$$

L'expression (8) de $K_{n,p}\left(\frac{1}{2}\right)$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} (17) \quad K_{n,p}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2^{n(n+1)p-1}} \sum_{i=0}^n C_n^i [(i+1)^p - i^p] - \\ &\quad - \frac{1}{2^{n-1} n^{p-1}} \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i [(i+1)^p - i^p], \quad (n, p = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

La relation $\lambda_{\max} = \frac{1}{2}$ serait donc démontrée si l'on démontrait que l'expression (17) est non-positive. La démonstration — éventuellement l'infirimation — de ce fait reste une question non tranchée.

5. Nous allons déterminer en dernier lieu les limites $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,p}$ et $\lim_{p \rightarrow \infty} x_{n,p}$.

Si l'on remplace dans (12) k par $p+1$, on déduit en tenant compte de la seconde relation (13) que $B_{p+1}^{(p+1)} = B_p^{(p)}$.

Il en résulte — vu que $B_2^{(2)} = 1$,

$$(18) \quad B_p^{(p)} = 1 \quad (p = 2, 3, \dots).$$

On déduit donc de (15) à l'aide de (18) pour $n > p$,

$$(19) \quad \frac{K_{n,p}(x)}{p(n-1)(n-2) \dots (n-p+2)\Gamma_p} = \frac{\frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}}{p(n-1)(n-2) \dots (n-p+2)\Gamma_p} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{p-2} \frac{k B_k^{(p)}}{p(n-k+1)(n-k) \dots (n-p+2)} \frac{\Gamma_k}{\Gamma_p} x^{k-1} +$$

$$+ \frac{p-1}{p(n-p+2)} B_{p-1}^{(p)} \frac{\Gamma_{p-1}}{\Gamma_p} x^{p-2} + x^{p-1}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}}{p(n-1)(n-2) \dots (n-p+2)\Gamma_p} =$$

$$= \frac{1}{p} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-1}}{n(n-1) \dots (n-p+2) \left[1 - \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-1}\right]} =$$

$$= -\frac{1}{p} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p-1 + \frac{a_1}{n} + \dots}{(n-1)(n-2) \dots (n-p+2) \left[p(p-1) + \frac{b_1}{n} + \dots\right]} = 0 \quad (p \geq 3),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k B_k^{(p)}}{p(n-k+1)(n-k) \dots (n-p+2)} \frac{\Gamma_k}{\Gamma_p} =$$

$$= \frac{k}{p} B_k^{(p)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{(n+1)^{p-1}} - \frac{n-k+1}{n^{p-1}}}{(n-k+1)(n-k) \dots (n-p+2) \left[\frac{n}{(n+1)^{p-1}} - \frac{n-p+1}{n^{p-1}}\right]} =$$

$$= \frac{k}{p} B_k^{(p)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(k-p + \frac{a_1}{n} + \dots\right)}{(n-k+1)(n-k) \dots (n-p+2) \left[\frac{p(p-1)}{2} + \frac{b_1}{n} + \dots\right]} = 0$$

$$(20) \quad (k \leq p-2),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p-1) B_{p-1}^{(p)} \Gamma_{p-1}}{p(n-p+2) \Gamma_p} =$$

$$= \frac{p-1}{p} B_{p-1}^{(p)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{(n+1)^{p-1}} - \frac{n-p+2}{n^{p-1}}}{(n-p+2) \left[\frac{n}{(n+1)^{p-1}} - \frac{n-p+1}{n^{p-1}}\right]} =$$

$$= \frac{p-1}{p} B_{p-1}^{(p)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{a_1}{n} + \dots}{\frac{p(p-1)}{2} + \frac{b_1}{n} + \dots} = -\frac{2}{p^2} B_{p-1}^{(p)}.$$

Si l'on fait dans (12) $p = k = q-1$, on obtient à l'aide de (18)

$$B_{q-1}^{(q)} = B_{q-2}^{(q-1)} + q-1.$$

Si l'on fait dans cette relation successivement $q = p, p-1, \dots, 3$, on obtient en ajoutant terme à terme les relations obtenues

$$B_{p-1}^{(p)} = 1 + 2 + \dots + (p-1) = \frac{p(p-1)}{2},$$

auquel cas la dernière relation (20) donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p-1) B_{p-1}^{(p)} \Gamma_{p-1}}{p(n-p+2) \Gamma_p} = -\frac{p-1}{p}.$$

En tenant compte de cette relation et des relations (20) on déduit de (19)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n,p}(x)}{p(n-1)(n-2) \dots (n-p+2)\Gamma_p} = x^{p-1} - \frac{p-1}{p} x^{p-2} \quad (p \geq 3).$$

Par suite

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,p} = \frac{p-1}{p}$$

(d'ailleurs on déduit de (3) que (21) a lieu aussi pour $p = 2$).

Pour calculer $\lim_{p \rightarrow \infty} x_{n,p}$, on déduit de (15) pour $p > n$

$$\begin{aligned} \frac{K_{n,p}(x)}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{p-1}} B_{n+1}^{(p)}} &= \frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} + \\ &+ \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k(n-1)(n-2) \dots (n-k+2)}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{p-1}}} \Gamma_k \frac{B_k^{(p)}}{B_{n+1}^{(p)}} x^{k-1} + \\ &+ \frac{n - \left(\frac{n+1}{n}\right)^{p-1}}{n+1} \frac{B_n^{(p)}}{B_{n+1}^{(p)}} x^{n-1} + x^n. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} (22) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{p-1}} B_{n+1}^{(p)}} &= (-1)^{n+1} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p} - \frac{1}{(n+1)n^{p-1}}}{\sum_{s=1}^{n+1} (-1)^s C_{n+1}^s \left(\frac{s}{n+1}\right)^p} = 0, \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{k(n-1)(n-2) \dots (n-k+2)}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{p-1}}} \Gamma_k \frac{B_k^{(p)}}{B_{n+1}^{(p)}} &= \\ = (-1)^{n-k+1} C_{n+1}^{k-1} \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^p - \frac{n-k+1}{n+1} \right] \frac{\sum_{s=1}^k (-1)^s C_n^s \left(\frac{s}{n}\right)^p}{\sum_{s=1}^{n+1} (-1)^s C_{n+1}^s \left(\frac{s}{n+1}\right)^p} &= 0 \quad (k \leq n-1) \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{n - \left(\frac{n+1}{n}\right)^{p-1}}{n+1} \frac{B_n^{(p)}}{B_{n+1}^{(p)}} &= \\ = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n+1} - n \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \right] \frac{\sum_{s=1}^k (-1)^s C_n^s \left(\frac{s}{n}\right)^p}{\sum_{s=1}^{n+1} (-1)^s C_{n+1}^s \left(\frac{s}{n+1}\right)^p} &= -\frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

On déduit de (22) à l'aide de ces relations

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{K_{n,p}(x)}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{p-1}} B_{n+1}^{(p)}} = x^n - \frac{n}{n+1} x^{n-1},$$

d'où il résulte

$$(23) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} x_{n,p} = \frac{n}{n+1}.$$

En tenant compte que $x_{n,2} = \frac{1}{2}$, les relations (21) et (23) nous portent à croire que $x_{n,p}$ croît avec n et avec p séparément.

La question reste non tranchée.

On déduit d'ailleurs de ces mêmes relations

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow \infty}} x_{n,p} = 1.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Aramă O., *Proprietăți privind monotonia șirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein și aplicarea lor la studiul aproximării funcțiilor*. Studii și cercetări de matematică (Cluj), **VIII**, 195-210 (1957).
- [2] Арамэ О., *Относительно свойств монотонности последовательности интерполяционных многочленов С. Н. Бернштейна и их применения к исследованию приближения функций*, *Mathematica*, **2** (25), 25-40 (1960).
- [3] Lorentz G. G., *Bernstein Polynomials*. Toronto, 1953.

Reçu le 31. VII. 1961.