MATHEMATICA VOL. 4 (27), 2, 1962, pp. 205 – 224

SUR QUELQUES POLYNOMES DE TYPE BERNSTEIN

par

OLEG ARAMĂ

à Cluj

1. Dans le présent travail on continue quelques recherches antérieures [1], relatives à l'approximation des fonctions par des polynomes de type Bernstein.

Pour des fonctions $f(x)$ qui admettent dans l'intervalle $[0,1]$ des dérivées d'ordre k, continues, on introduit les polynomes d'interpolation $B_m^{(k)}(x;f)$, définis par la formule (2) et on étudie les différences

$$R_{m,k,i}(x;f) = \frac{d^i f(x)}{dx^i} - \frac{d^i}{dx^i} B_m^{(k)}(x;f) \qquad (i = 0, 1, \ldots, k)$$

On montre que si $k \geqq 1$, dans certaines hypothèses supplémentaires concernant la fonction $f(x)$, les polynomes (2) approximent la fonction $f(x)$ dans le voisinage de l'origine mieux que les polynomes habituels (1) de S. N. Bernstein.

En vue de l'étude du reste $R_{m,k,i}(x;f)$, nous avons appliqué la méthode générale proposée par T. POPOVICIU dans le travail [13], méthode basée sur l'utilisation des fonctions convexes.

On montre dans le présent travail que quels que soient les nombres naturels k, m et $i = 0, 1, \ldots, k$, le reste est de „forme simple" [13]. A cette fin, on met en évidence certaines propriétés de monotonie de la suite de polynomes (2) (théorème 1).

Les résultats obtenus de la sorte s'étendent à des fonctions de deux variables indépendantes.

Ces recherches ont été faites — d'une part — en vue des applications qu'elles ont dans l'intégration approximative des équations différentielles ordinaires. Si l'on se réfère à la méthode d'intégration approximative proposée dans le travail [1] et basée sur l'utilisation des polynomes d'interpolation (1), on peut agrandir (dans certaines hypothèses) son ordre d'approximation, si l'on utilise les polynomes d'interpolation (2) à la place des polynomes (1).

L'extension des résultats obtenus dans ce travail pour des fonctions d'une seule variable indépendante, à des fonctions de deux variables indépendantes a été faite aussi en vue des applications qu'ils auraient à l'intégration approximative de certaines équations aux dérivées partielles.

La présentation de toutes ces applications fera l'objet d'un autre travail.

2. Soit $f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle $[0, 1]$ et soit $B_m(x; f)$ le polynome d'interpolation de S. N. Bernstein, associé à cette fonction ainsi qu'à l'intervalle $[0, 1]$, c'est-à-dire

$$B_m(x; f) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i x^i (1-x)^{m-i} f\left(\frac{i}{m}\right). \tag{1}$$

Soit k un nombre naturel choisi arbitrairement que toutefois nous supposerons fixé dans ce qui suit. Nous supposerons que $f(x) \in C^k[0, 1]$, c'est-à-dire que $f(x)$ admet dans l'intervalle $[0, 1]$ une dérivée continue d'ordre k. Nous introduisons les polynomes d'interpolation suivants :

$$\begin{aligned} B_m^{(k)}(x; f) &= f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(0) + \\ &+ \int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} B_m\left(s; \frac{d^k f}{dx^k}\right) ds \qquad (m = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{2}$$

En notant

$$\begin{aligned} \varphi_{i,m,k}(x) &= C_m^i \int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} s^i (1-s)^{m-i} ds = \\ &= C_m^i \sum_{\alpha=0}^{m-i} \frac{(-1)^\alpha C_{m-i}^\alpha x^{\alpha+i+k}}{(\alpha+i+1)(\alpha+i+2)\ldots(\alpha+i+k)} \qquad (k \geq 1,\ 0 \leq i \leq m), \end{aligned} \tag{3}$$

on obtient

$$B_m^{(k)}(x; f) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(0) + \sum_{i=0}^{m} \varphi_{i,m,k}(x) \frac{d^k f\left(\frac{i}{m}\right)}{dx^k}. \tag{4}$$

Les théorèmes suivants ont lieu :

THÉORÈME 1. *Si dans l'intervalle* $[0, 1]$ *la fonction* $\frac{d^k f(x)}{dx^k}$ *est convexe, respectivement non concave du premier ordre (c'est-à-dire si n'importe quelle différence divisée sur trois noeuds distincts dans l'intervalle* $[0, 1]$ *est* >0, *respectivement* $\geqq 0$), *alors, quel que soit* $i = 0, 1, \ldots, k$, *la suite de polynomes*

$$\frac{d^i}{dx^i} B_1^{(k)}(x; f),\quad \frac{d^i}{dx^i} B_2^{(k)}(x; f), \ldots,\quad \frac{d^i}{dx^i} B_m^{(k)}(x; f), \ldots \tag{5}$$

correspondant à la fonction $f(x)$ *et à l'intervalle* $[0, 1]$ *est décroissante, respectivement non croissante pour tout* $x \in (0, 1)$. *Cette propriété de monotonie de la suite* (5) *se maintient vraie aussi dans le point* $x = 1$, *excepté le cas* $i = k$.

L'affirmation de ce théorème résulte du théorème suivant [1] :

Si une fonction $F(x)$, continue dans l'intervalle $[0, 1]$ est convexe du premier ordre dans cet intervalle, alors ont lieu pour elle dans l'intervalle $(0, 1)$ les inégalités

$$B_{m+1}(x; f) - B_m(x; f) < 0 \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Si l'on écrit ces inégalités pour la fonction $F(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k}$, supposée par hypothèse, continue et convexe du premier ordre dans l'intervalle $[0, 1]$, et si l'on tient compte de la formule (2), on obtient l'affirmation du théorème 1.

THÉORÈME 2. *Si la fonction* $f(x)$ *appartient à la classe* $C^k[0, 1]$, *pour elle ont lieu les relations*

$$f(x) - B_m^{(k)}(x; f) = -\frac{x^{k+1}}{m}\left(\frac{k+2}{2} - x\right) \cdot \left[\xi_{m,1}^{(k)}, \xi_{m,2}^{(k)}, \ldots, \xi_{m,k+3}^{(k)}; f\right] \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

où $\xi_{m,1}^{(k)}, \xi_{m,2}^{(k)}, \ldots, \xi_{m,k+3}^{(k)}$ *sont des valeurs distinctes de l'intervalle* $(0, 1)$. *Les relations* (6) *sont valables quel que soit* $x \in [0, 1]$.[1)]

Démonstration. Si l'on note

$$R_{m,k}(x; f) = f(x) - B_m^{(k)}(x; f)$$

1) La notation $[\xi_{m,1}^{(k)}, \ldots, \xi_{m,k+3}^{(k)}; f]$ représente la différence divisée de la fonction $f(x)$ sur les noeuds $\xi_{m,1}^{(k)}, \ldots, \xi_{m,k+3}^{(k)}$.

et on suppose x fixé dans l'intervalle $[0,1]$, $R_{m,k}(x;f)$ apparaît comme une fonctionnelle définie sur l'espace $C^k[0,1]$ des fonctions qui admettent dans l'intervalle $[0,1]$ des dérivées d'ordre k, continues. Cette fonctionnelle est additive, homogène et bornée par rapport à la norme

$$||f|| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sum_{i=0}^{k-1} |f^{(i)}(0)|.$$

On remarque que

$$(7) \qquad R_{m,k}(x;1) \equiv R_{m,k}(x;x) \equiv \ldots \equiv R_{m,k}(x;x^{k+1}) \equiv 0$$

et que

$$(8) \qquad R_{m,k}(x;x^{k+2}) = x^{k+2} - \int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} B_m\left(s;\ \frac{(k+2)!}{2} x^2\right) ds =$$

$$= \frac{(k+2)!}{2}\int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} s^2\, ds - \frac{(k+2)!}{2}\int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} B_m(s;x^2)\,ds =$$

$$= \frac{(k+2)!}{2}\int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!}\left\{s^2 - \frac{s}{m}[1+(m-1)s]\right\} ds = \frac{(k+2)!}{2}\int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!}\,\frac{s(s-1)}{m}\, ds =$$

$$= -\frac{x^{+1}}{m}\left(\frac{k+2}{2} - x\right).$$

Les relations (7) et (8) nous montrent que la fonctionnelle $R_{m,k}(x;f)$ possède le degré d'exactitude $g = k+1$.

Dans un autre ordre d'idées, en tenant compte du théorème 1, il résulte que si la fonction $\frac{d^k}{dx^k}f(x)$ est convexe du premier ordre dans l'intervalle $[0,1]$, alors a lieu l'inégalité

$$(9) \qquad B_m^{(k)}(x;f) > B_{m+p}^{(k)}(x;f),$$

valable pour tout $x \in (0,1]$ et pour tout nombre naturel p. En passant à la limite, lorsque $p \to \infty$ et en tenant compte du fait que dans l'hypothèse

de la continuité dans $[0,1]$ de la fonction $f^{(k)}(x)$, les polynomes. $B_{m+p}^{(k)}(x;f)$ tendent uniformément dans l'intervalle $[0,1]$ vers la fonction

$$f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \ldots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(s)\,ds \equiv f(x),$$

ainsi que du fait que la suite $B_m^{(k)}(x;f)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ est décroissante, il résulte de (9) l'inegalité

$$(10) \qquad B_m^{(k)}(x;f) > f(x), \qquad x \in (0,1].$$

Ce résultat nous montre que quel que soit x fixé dans l'intervalle $(0,1]$, la fonctionnelle $R_{m,k}(x;f)$ pred des valeurs négatives pour toute fonction $f(x)$ qui est convexe de l'ordre $k+1$ dans l'intervalle $[0,1]$.[2)]

Dans ce qui suit nous utiliserons le résultat suivant, obtenu par T. POPOVICIU dans le travail [13]:

Soit $R[f]$ une fonctionnelle (réelle) linéaire, définie sur un espace vectoriel $\mathcal{F}$ formé de fonctions réelles, continues dans un intervalle J et contenant tous les polynomes. La condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle $R[f]$ ayant le degré d'exactitude n soit de forme simple, c'est-à-dire de la forme

$$R[f] = A\cdot[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f],$$

où A est un nombre indépendant de la fonction f, et $\xi_1, \ldots, \xi_{n+2}$ sont $n+2$ points distincts à l'intérieur de l'intervalle J, est que quelle que soit la fontction f $(\in \mathcal{F})$ convexe d'ordre n dans l'intervalle J, ait lieu la relation $R[f] \neq 0$.

En mettant à profit ce théorème et en tenant compte de ce qui vient d'être établi précédemment relativement à la fonctionnelle $R_{m,k}(x;f)$, il ressort que cette fonctionnelle aura pour tout $x \in (0,1]$ la forme

$$(11) \qquad R_{m,k}(x;f) = A_{m,k}\cdot[\xi_{m,1}^{(k)}, \xi_{m,2}^{(k)}, \ldots, \xi_{m,k+3}^{(k)}; f],$$

où la constante $A_{m,k}$ ne dépend pas de la fonction f et où $\xi_{m,1}^{(k)}, \ldots, \xi_{m,k+3}^{(k)}$ sont $k+3$ points distincts dans l'intervalle $(0,1)$.

2) On dit qu'une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle J est convexe (non concave respectivement) d'ordre ν dans cet intervalle, si n'importe laquelle de ses différences divisées sur $\nu+2$ noeuds distincts dans J est positive (non négative respectivement).

On obtient la valeur de la constante $A_{m,k}$ dès que l'on remplace dans la relation ci-dessus f par x^{k+2} et en tenant compte de la formule (8) :

$$A_{m,k} = R_{m,k}(x; x^{k+2}) = -\frac{x^{k+1}}{m}\left(\frac{k+2}{2} - x\right).$$

En remplaçant la valeur obtenue de la sorte de $A_{m,k}$ dans (11), on obtient la formule (6), valable pour tout $x \in (0, 1]$. On observe cependant que cette relation a lieu aussi pour $x = 0$, car pour cette valeur de x, les deux membres de (6) sont nuls.

Observation. Pour $k = 0$, la formule (2) n'a pas de sens. Dans ce cas, au lieu des polynomes (2) il faut considérer les polynomes (1) qui représentent les polynomes habituels de S. N. Bernstein. Nous utiliserons pour ces polynomes la notation $B_m^{(0)}(x; f)$, en soulignant ainsi le fait qu'ils correspondent à la valeur $k = 0$. Comme il a été montré dans le travail [1], quelle que soit la fonction $F(x)$ continue dans l'intervalle $[0, 1]$, pour elle ont lieu dans l'intervalle $[0, 1]$ les relations

$$(12)\qquad F(x) - B_m^{(0)}(x; F) = -\frac{x(1-x)}{m}\cdot[\xi_{m,1}, \xi_{m,2}, \xi_{m,3}; F] \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

où $\xi_{m,1}, \xi_{m,2}, \xi_{m,3}$ sont des valeurs dans l'intervalle $(0, 1)$. En comparant la relation (12) avec la relation (6) où l'on suppose $k \geqq 1$, on constate que les polynomes $B_m^{(k)}(x; f)$ $(k \geqq 1)$ approximent la fonction $f(x)$ dans le voisinage de l'origine mieux que les polynomes habituels de S. N. Bernstein, $B_m^{(0)}(x; f)$. On observe également que, dans le voisinage de l'origine, l'ordre d'approximation croît avec le nombre k.

THÉORÈME 2*. *Si la fonction $f(x)$ appartient à la classe $C^k[0,1]$, on a les relations suivantes*

$$(13)\qquad \frac{d^i f(x)}{dx^i} - \frac{d^i}{dx^i} B_m^{(k)}(x; f) = -\frac{x^{k-i+1}}{m}\left(\frac{k-i+2}{2} - x\right)\times$$

$$\times\left[\xi_{m,1}^{(k,i)}, \xi_{m,2}^{(k,i)}, \ldots, \xi_{m,k-i+3}^{(k,i)}; \frac{d^i f(x)}{dx^i}\right],$$

où $\xi_{m,1}^{(k,i)}, \xi_{m,2}^{(k,i)}, \ldots, \xi_{m,k-i+3}^{(k,i)}$ sont des valeurs dans l'intervalle $(0, 1)$. *Ces relations sont valables quel que soit $x \in [0, 1]$ et quel que soit $i = 1, 2, \ldots, k$.*

La démonstration de ce théorème se fait aisément si l'on observe que, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, k$, l'identité suivante a lieu

$$(14)\qquad \frac{d}{dx^i} B_m^{(k)}(x; f) = f^{(i)}(0) + \frac{x}{1!} f^{(i+1)}(0) + \ldots + \frac{x^{k-i-1}}{(k-i-1)!} f^{(k-1)}(0) +$$

$$+ \int_0^x \frac{(x-s)^{k-i-1}}{(k-i-1)!} B_m^{(0)}\left(s; \frac{d^k f}{ds^k}\right) ds = B_m^{(k-i)}(x; F),$$

où on a noté $F(x) = \dfrac{d^i f(x)}{dx^i}$.

En supposant d'abord que le nombre naturel i satisfait à l'inégalité $i < k$, on peut remplacer dans l'énoncé du théorème 2, $f(x)$ par $F(x)$, et considérer le nombre $k - i$ $(k - i \geqq 1)$ à la place du nombre k. On obtient ainsi l'affirmation du théorème 2* pour le cas envisagé.

Lorsque $i = k$ on tient compte des relations (12).

THÉORÈME 3. *Si la fonction $f(x)$ appartient à la classe $C^k[0,1]$, pour elle ont lieu dans l'intervalle $[0,1]$ les relations*

$$(15)\qquad B_{m+1}^{(k)}(x; f) - B_m^{(k)}(x; f) = -\frac{x^{k+1}}{m(m+1)}\left(\frac{k+2}{2} - x\right)[\xi_{m,1}^{(k)}, \xi_{m,2}^{(k)}, \ldots, \xi_{m,k+3}^{(k)}; f]$$
$$(m = 1, 2, \ldots).$$

La démonstration de ce théorème se fait en considérant la fonctionnelle linéaire

$$\overline{R}_{m,k}(x; f) = B_{m+1}^{(k)}(x; f) - B_m^{(k)}(x; f)$$

et en procédant ensuite comme dans le cas du théorème 2.

THÉORÈME 3*. *Dans les hypothèse du théorème 3, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, k$, ont lieu dans l'intervalle $[0,1]$ les relations*

$$(16)\qquad \frac{d^i}{dx^i} B_{m+1}^{(k)}(x; f) - \frac{d^i}{dx^i} B_m^{(k)}(x; f) =$$

$$= -\frac{x^{k-i+1}}{m(m+1)}\left(\frac{k-i+2}{2} - x\right)\left[\xi_{m,1}^{(k,i)}, \ldots, \xi_{m,k-i+3}^{(k,i)}; \frac{d^i f}{dx^i}\right] \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

où $\xi_{m,1}^{(k,i)}, \xi_{m,2}^{(k,i)}, \ldots, \xi_{m,k-i+3}^{(k,i)}$ sont des valeurs de l'intervalle $(0, 1)$.

Démonstration. On obtient ce théorème du théorème 3, tout comme le théorème 2* a été obtenu du théorème 2. Lorsque $i = k$, on tient compte aussi de la propriété suivante, établie dans le travail [1] :

Quelle que soit la fonction $F(x)$ continue dans l'intervalle $[0,1]$, pour elle ont lieu dans l'intervalle $[0,1]$ les relations

$$(17)\qquad B^{(0)}_{m+1}(x\,;f)-B^{(0)}_{m}(x\,;f)=-\frac{x(1-x)}{m(m+1)}[\xi_{m,1},\ \xi_{m,2},\ \xi_{m,3}\,;\ f]$$

$$(m=1,2,\ldots).$$

3. Pour des fonctions de plusieurs variables indépendantes on peut également obtenir des polynomes d'interpolation du type de ceux que nous venons de considérer. Afin de ne pas compliquer l'exposé, nous nous bornerons au cas des fonctions de deux variables indépendantes. L'extension des résultats que nous exposons dans ce travail à des fonctions de plusieurs variables indépendantes ne présente aucune difficulté.

Soit donc $f(x,y)$ une fonction définie dans le domaine D défini par les inégalités

$$D:0\leqq x\leqq 1,\qquad 0\leqq y\leqq 1$$

et soit

$$(18)\qquad B_{m,n}(x,y\,;f)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}C_m^iC_n^jx^i(1-x)^{m-i}y^j(1-y)^{n-j}f\left(\frac{i}{m},\ \frac{j}{n}\right)$$

le polynome habituel de S. N. Berstein, correspondant à la fonction $f(x,y)$ et au domaine D considéré.

Soient aussi k et l deux nombres naturels, arbitrairement choisis, que nous supposerons néanmoins fixés dans ce qui suit.

Nous supposerons que la fonction $f(x,y)$ admet dans le domaine D des dérivées partielles d'ordre $k+l$, continues.

En considérant pour le moment y fixé et x variable, $f(x,y)$ apparaît comme une fonction d'une seule variable indépendante x. En construisant le polynome $B^{(k)}_m$ correspondant à cette fonction, conformément à la formule (4), on obtient la formule approximative suivante :

$$(19)\qquad f(x,y)\approx\sum_{p=0}^{k-1}\frac{x^p}{p\,!}\frac{\partial^pf(0,y)}{\partial x^p}+\sum_{i=0}^{m}\varphi_{i,m,k}(x)\frac{\partial^kf\left(\frac{i}{m},y\right)}{\partial x^k},$$

où $\varphi_{i,m,k}(x)$, représente les polynomes (3).

Considérant le deuxième membre de la formule (19) comme une somme de fonctions de la variable y et écrivant à la place de ces fonctions les

polynomes $B^{(l)}_n$ correspondants (relativement à la variable y), on obtient la formule

$$(20)\qquad f(x,y)\approx\sum_{p=0}^{k-1}\frac{x^p}{p\,!}\left\{\sum_{r=0}^{l-1}\frac{y^r}{r\,!}\frac{\partial^{p+r}f(0,0)}{\partial x^p\partial y^r}+\sum_{j=0}^{n}\varphi_{j,n,l}(y)\frac{\partial^{p+l}f\left(0,\frac{j}{n}\right)}{\partial x^p\partial y^l}\right\}+$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\varphi_{i,m,k}(x)\left\{\sum_{r=0}^{l-1}\frac{y^r}{r\,!}\frac{\partial^{k+r}f\left(\frac{i}{m},0\right)}{\partial x^k\partial y^r}+\sum_{j=0}^{n}\varphi_{j,n,l}(y)\frac{\partial^{k+l}f\left(\frac{i}{m},\frac{j}{n}\right)}{\partial x^k\partial y^l}\right\}.$$

Le deuxième membre de cette formule est un polynome dans les variables x et y, du degré $m+k$ en rapport avec x et du degré $n+l$ en rapport avec y. Dans ce qui suit nous le noterons par $B^{(k,l)}_{m,n}(x,y;f)$. On a donc

$$(21)\qquad B^{(k,l)}_{m,n}(x,y\,;f)=\sum_{p=0}^{k-1}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{x^py^r}{p\,!r\,!}\frac{\partial^{p+r}f(0,0)}{\partial x^p\partial y^r}+\sum_{r=0}^{l-1}\frac{y^r}{r\,!}\sum_{i=0}^{m}\varphi_{i,m,k}(x)\frac{\partial^{k+r}f\left(\frac{i}{m},0\right)}{\partial x^k\partial y^r}+$$

$$+\sum_{p=0}^{k-1}\frac{x^p}{p\,!}\sum_{j=0}^{n}\varphi_{j,n,l}(y)\frac{\partial^{p+l}f\left(0,\frac{j}{n}\right)}{\partial x^p\partial y^l}+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\varphi_{i,m,k}(x)\varphi_{j,n,l}(y)\frac{\partial^{k+l}f\left(\frac{i}{m},\frac{j}{n}\right)}{\partial x^k\partial y^l}.$$

Dans ce qui suit, nous démontrerons pour ces polynomes des théorèmes analogues aux théorèmes 1, 2, 2*, 3, 3* précédemment établis.

THÉORÈME 4. *Si la fonction $f(x,y)$ admet dans le domaine D des dérivées partielles d'ordre $k+l$, continues, alors a lieu dans le domaine D l'évaluation*

$$(22)\qquad f(x,y)-B^{(k,l)}_{m,n}(x,y\,;f)=-\frac{x^{k+1}}{m}\left(\frac{k+2}{2}-x\right)[\xi_1,\ldots,\xi_{k+3}\,;f(x,y)]_x-$$

$$-\frac{y^{l+1}}{n}\left(\frac{l+2}{2}-y\right)\left\{\frac{x^k}{k\,!}\left[\eta_1,\ldots,\eta_{l+3}\,;\ \frac{\partial^kf(\xi,\ y)}{\partial x^k}\right]_y+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{k-1}\frac{x^p}{p\,!}\left[\eta_1,\ldots,\eta_{l+3}\,;\ \frac{\partial^pf(0,y)}{\partial x^p}\right]_y\right\},$$

où ξ, $\xi_1,\ldots,\xi_{k+3}$ et $\eta_1,\ldots,\eta_{l+3}$ représentent des valeurs dans les intervalles $0<x<1$, respectivement $0<y<1$.[3)]

3) La notation $[\xi_1,\ldots,\xi_{k+3}\,;f(x,y)]_x$ représente la différence divisée partielle de la fonction $f(x,y)$ par rapport avec la variable x, sur les noeuds $\xi_1,\ldots,\xi_{k+3}$.

Démonstration. Considérons l'expression qui figure dans le membre droit de la relation (19). Elle représente le polynome $B^{(k)}_m[x;\ F(x)]$ correspondant à la fonction d'une seule variable indépendante $F(x) = f(x, y)$, y étant considéré paramètre. Dans ce qui suit, nous noterons ce polynome par le symbole $B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}[x, y\,; f(x, y)]$. En tenant compte de (3), on peut écrire la formule suivante analogue à la formule (4) :

$$B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}[x, y\,; f(x, y)] = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p\,!}\, \frac{\partial^p f(0, y)}{\partial x^p} + \sum_{i=0}^{m} \varphi_{i,m,k}(x)\, \frac{\partial^k f\left(\frac{i}{m}, y\right)}{\partial x^k}. \tag{23}$$

On définit de manière analogue

$$B^{(\cdot,l)}_{\cdot,n}[x, y\,; f(x, y)] = \sum_{r=0}^{l-1} \frac{y^r}{r\,!}\, \frac{\partial^r f(x, 0)}{\partial y^r} + \sum_{j=0}^{n} \varphi_{j,n,l}(y)\, \frac{\partial^l f\left(x, \frac{j}{n}\right)}{\partial y^l}. \tag{24}$$

Avec ces notations, considérons l'identité

$$\begin{aligned} f(x, y) - B^{(k,l)}_{m,n}(x, y\,; f) = \{f(x, y) - B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}[x, y\,; f(x, y)]\} + \\ + \{B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}[x, y\,; f(x, y)] - B^{(k,l)}_{m,n}[x, y\,; f(x, y)]\}. \end{aligned} \tag{25}$$

Le premier terme de cette identité peut être écrit en vertu de la formule (6) sous la forme

$$\begin{aligned} & f(x, y) - B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}[x, y\,; f(x, y)] = \\ & = -\frac{x^{k+1}}{m}\left(\frac{k+2}{2} - x\right) \cdot [\xi^{(k)}_{m,1}, \ldots, \xi^{(k)}_{m,k+3}\,; f(x, y)]_x, \end{aligned} \tag{26}$$

où est notée par $[\xi^{(k)}_{m,1} \ldots, \xi^{(k)}_{m,k+3}\,; f(x, y)]_x$ la différence divisée partielle de la fonction $f(x, y)$, relativement à la variable x, sur les noeuds $\xi^{(k)}_{m,1}, \ \ldots,\ \xi^{(k)}_{m,k+3}$. Ces noeuds dépendent des variables x et y et sont situés dans l'intervalle $0 < x < 1$.

Pour évaluer le deuxième terme qui figure dans le membre droit de l'identité (25), nous utilisons l'expression (20) du polynome $B^{(k,l)}_{m,n}[x, y\,; f(x, y)]$, qui nous conduit à l'identité

$$B^{(k,l)}_{m,n}[x, y\,; f(x, y)] = B^{(\cdot,l)}_{\cdot,n}\,\{x, y\,;\ B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}[x, y\,; f(x, y)]\}. \tag{27}$$

En utilisant cette identité, on remarque que le deuxième terme du membre droit de l'identité (25) représente l'approximation donnée par le polynome $B^{(\cdot,l)}_{\cdot,n}$ correspondant à la fonction $B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}[x, y\,; f(x, y)]$, relativement à la variable y. En vertu de théorème 2 (formule (6)) on peut écrire

$$\begin{aligned} & B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}[x, y\,; f(x, y)] - B^{(k,l)}_{m,n}[x, y\,; f(x, y)] = \\ & = B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}[x, y\,; f(x, y)] - B^{(\cdot,l)}_{\cdot,n}\,\{x, y\,;\ B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}[x, y\,; f(x, y)]\} = \\ & = -\frac{y^{l+1}}{n}\left(\frac{l+2}{2} - y\right) \cdot D(x, y), \end{aligned} \tag{28}$$

où $D(x,y)$ a l'expression

$$D(x, y) = [\eta^{(k,l)}_{n,1}(x),\ \eta^{(k,l)}_{n,2}(x), \ldots,\ \eta^{(k,l)}_{n,l+3}(x)\,;\ B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}(x, y;\ f(x, y))]_y \tag{29}$$

et représente la différence divisée partielle de la fonction $B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}[x, y\,; f(x, y)]$ par rapport à la variable y sur les noeuds $\eta^{(k,l)}_{n,1}(x), \ldots,\ \eta^{(k,l)}_{n,l+3}(x)$. Ces noeuds dépendent des variables x et y et appartiennent à l'intervalle $0 < y < 1$.

Soit $\mathbf{a} = (a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{l+3})$ un système de $l + 3$ noeuds distincts dans l'intervalle $0 < y < 1$. Considérons l'expression suivante

$$E[\mathbf{a}\,; f(x, y)] = [\mathbf{a}\,; B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}(x, y\,; f(x, y))]_y, \tag{30}$$

représentant la différence divisée partielle de la fonction $B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}(x, y\,; f(x, y))$ par rapport à la variable y, sur le système de noeuds $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{l+3})$. Nous considérons ces noeuds comme étant des paramètres indépendants des variables x et y.

Vu que les deux opérateurs (la différence divisée et l'opérateur $B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}$) qui s'appliquent à la fonction $f(x, y)$ dans la formule (30) sont linéaires et que ces opérateurs se réfèrent à des variables indépendantes, on peut le permuter et obtenir de la sorte l'égalité

$$E[\mathbf{a}\,; f(x, y)] = B^{(k)}_m(x;\ [\mathbf{a}; f(x, y)]_y),$$

où $B^{(k)}_m$ représente l'opérateur défini par la formule (2). En utilisant cette formule, on obtient

$$\begin{aligned} E[\mathbf{a}\,; f(x, y)] = [\mathbf{a}\,;\ f(0, y)]_y + \frac{x}{1\,!}\left[\mathbf{a}\,; \frac{\partial f(0, y)}{\partial x}\right]_y + \ldots + \\ + \frac{x^{k-1}}{(k-1)\,!}\left[\mathbf{a}\,; \frac{\partial^{k-1} f(0, y)}{\partial x^{k-1}}\right]_y + \int_0^x \frac{(x - s)^{k-1}}{(k-1)\,!}\, B_m\!\left(s\,;\ \left[\mathbf{a}\,; \frac{\partial^k f(s, y)}{\partial s^k}\right]_y\right) ds. \end{aligned} \tag{31}$$

En appliquant à l'intégrale la deuxième formule de la moyenne, on obtient la relation

$$(32)\qquad \int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} B_m\left(s; \left[\mathbf{a}; \frac{\partial^k f(s,y)}{\partial s^k}\right]_y\right) ds = \frac{x^k}{k!} B_m\left(\bar{s}; \left[\mathbf{a}; \frac{\partial^k f(s,y)}{\partial s^k}\right]_y\right),$$

où $\bar{s} \in (0, x)$ et donc $\bar{s} \in (0,1)$. Puis, compte tenu de la formule (1) ainsi que de l'identité

$$\sum_{i=0}^m C_m^i x^i (1-x)^{m-i} = 1,$$

on observe que $B_m\left(\bar{s}; \left[\mathbf{a}; \frac{\partial^k f(s,y)}{\partial s^k}\right]_y\right)$ de (32) représente une moyenne des valeurs de la fonction $F(x) = \left[\mathbf{a}; \frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^k}\right]_y$ d'une seule variable indépendante x, dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$. En tenant compte de cette observation, en vertu de la continuité de la fonction $\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^k}$ dans le domaine D, on pourra écrire la formule de la moyenne suivante

$$B_m\left(\bar{s}; \left[\mathbf{a}; \frac{\partial^k f(s,y)}{\partial s^k}\right]_y\right) = \left[\mathbf{a}; \frac{\partial^k f(\bar{\bar{s}},y)}{\partial x^k}\right]_y,$$

où $\bar{\bar{s}} \in (0,1)$. Ainsi on obtiendra, pour l'intégrale de (31), la formule de la moyenne

$$(33)\qquad \int_0^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)} B_m\left(s; \left[\mathbf{a}; \frac{\partial^k f(s,y)}{\partial s^k}\right]_y\right) ds = \frac{x^k}{k!}\left[\mathbf{a}; \frac{\partial^k f(\bar{\bar{s}},y)}{\partial x^k}\right]_y,$$

et on transcrit la relation (31)

$$(34)\qquad E[\mathbf{a}; f(x,y)] = \left\{\sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p!}\left[\mathbf{a}; \frac{\partial^p f(0,y)}{\partial x^p}\right]_y\right\} + \frac{x^k}{k!}\left[\mathbf{a}; \frac{\partial^k f(\bar{\bar{s}},y)}{\partial x^k}\right]_y.$$

Revenant à l'expression de $D(x,y)$ de (29), on observe qu'on peut l'obtenir de (30), en effectuant les remplacements $a_1 = \eta_{n,1}^{(k,l)}(x), \ldots, a_{l+3} = \eta_{n,l+3}^{(k,l)}(x)$

$$(35)\qquad D(x,y) = E[\mathbf{a}; f(x,y)]\big|_{a_i = \eta_{n,i}^{(k,l)}(x),\ (i=1,2,\ldots,l+3)}.$$

En remplaçant cette expression de $D(x,y)$ dans (28) et en tenant compte de la relation (34), on obtient une évaluation de la différence qui figure au premier membre de la relation (28). En employant cette évaluation, ainsi que l'évaluation (26), on obtient de (25) la relation (22), ce qui démontre le théorème envisagé.

Observations 1°. Si la fonction $f(x,y)$ admet des dérivées partielles d'ordre assez élevé, alors la formule (22) devient

$$(36)\qquad f(x,y) - B_{m,n}^{(k,l)}(x,y;f) = -\frac{x^{k+1}}{(k+2)!\,m}\left(\frac{k+2}{2} - x\right)\frac{\partial^{k+2} f(\xi,y)}{\partial x^{k+2}} -$$
$$-\frac{y^{l+1}}{(l+2)!\,n}\left(\frac{l+2}{2} - y\right)\left\{\frac{x^k}{k!}\frac{\partial^{k+l+2} f(\bar{\xi},\bar{\eta})}{\partial x^k \partial y^{l+2}} + \sum_{p=0}^{k-1}\frac{x^p}{p!}\frac{\partial^{l+p+2} f(0,\eta_p)}{\partial x^p \partial y^{l+2}}\right\},$$

où ξ, $\bar{\xi}$ et η_p, $\bar{\eta}$ $(p = 0, \ldots, k-1)$ sont des valeurs des intervalles $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ respectivement.

2°. En vue de l'évaluation du reste $f(x,y) - B_{m,n}^{(k,l)}(x,y;f)$, nous avons utilisé dans l'exposé précédent la représentation

$$(27)\qquad B_{m,n}^{(k,l)}(x,y;f) = B_{\cdot,n}^{(\cdot,l)}\{x,y; B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}[x,y; f(x,y)]\},$$

qui d'ailleurs nous a conduit à la formule (21). Tenant compte de la forme symétrique de l'expression (21) du polynome $B_{m,n}^{(k,l)}(x,y;f)$, on constate aisément que le même polynome $B_{m,n}^{(k,l)}(x,y;f)$ admet, outre la représentation (27), aussi la représentation

$$(27')\qquad B_{m,n}^{(k,l)}(x,y;f) \equiv B_{m,\cdot}^{(k,\cdot)}\{x,y; B_{\cdot,n}^{(\cdot,l)}[x,y; f(x,y)]\}.$$

En utilisant cette nouvelle représentation et en faisant un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème 4, on obtient pour le reste $f(x,y) - B_{m,n}^{(k,l)}(x,y;f)$ l'expression suivante, analogue à l'expression (22)

$$(37)\qquad f(x,y) - B_{m,n}^{(k,l)}(x,y;f) = -\frac{y^{l+1}}{n}\left(\frac{l+2}{2} - y\right)[\eta_1, \ldots, \eta_{l+3}; f(x,y)]_y -$$
$$-\frac{x^{k+1}}{m}\left(\frac{k+2}{2} - x\right)\left\{\frac{y^l}{l!}\left[\xi_1, \ldots, \xi_{k+3}; \frac{\partial^l f(x;\eta)}{\partial y^l}\right]_x +\right.$$
$$\left. + \sum_{r=0}^{l-1}\frac{y^r}{r!}\left[\xi_1, \ldots, \xi_{k+3}; \frac{\partial^r f(x,0)}{\partial y^r}\right]_x\right\},$$

où $\xi_1, \ldots, \xi_{k+3}$ et η, $\eta_1, \ldots, \eta_{l+3}$ représentent des valeurs des intervalles $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ respectivement.

Si $f(x,y)$ admet des dérivées partielles d'ordre suffisamment élevé, alors cette formule devient

$$(38)\qquad f(x,y)-B^{(k,l)}_{m,n}(x,y;f)=-\frac{y^{l+1}}{(l+2)!\,n}\left(\frac{l+2}{2}-y\right)\frac{\partial^{l+2}f(x,\eta)}{\partial y^{l+2}}-$$

$$-\frac{x^{k+1}}{(k+2)!\,m}\left(\frac{k+2}{2}-x\right)\left\{\frac{y^l}{l!}\frac{\partial^{l+k+2}f(\overline{\xi},\overline{\eta})}{\partial x^{k+2}\partial y^l}+\sum_{r=0}^{l-1}\frac{y^r}{r!}\frac{\partial^{k+r+2}f(\xi_r,0)}{\partial x^{k+2}\partial y^r}\right\},$$

où $\overline{\xi}$, ξ_r $(r=0,1,\ldots,l-1)$ et η, $\overline{\eta}$ sont des valeurs dans les intervalles $0<x<1$, $0<y<1$ respectivement.

3°. Dans le cas spécial $k=0$, $l=0$, il faut considérer, à la place du polynome $B^{(k,l)}_{m,n}(x,y;f)$ de (21), le polynome $B_{m,n}(x,y;f)$ de (18). Dans ce cas, dans l'hypothèse de la continuité de la fonction $f(x,y)$ dans le domaine D, on obtient la formule

$$(39)\qquad f(x,y)-B_{m,n}(x,y;f)=-\frac{x(1-x)}{m}[\xi_1,\xi_2,\xi_3;f(x,y)]_x-$$

$$-\frac{y(1-y)}{n}[\eta_1,\eta_2,\eta_3;f(\xi,y)]_y,$$

où ξ, ξ_i et η_i sont des valeurs dans les intervalles $0<x<1$, $0<y<1$ respectivement.

En effet, en utilisant les notations

$$(40)\qquad B^{(0,\cdot)}_{m,\cdot}[x,y;\ f(x,y)]=\sum_{i=0}^{m}C_m^i x^i(1-x)^{m-k}f\left(\frac{i}{m},y\right),$$

$$(41)\qquad B^{(\cdot,0)}_{\cdot,n}[x,y;f(x,y)]=\sum_{j=0}^{n}C_n^j y^j(1-y)^{n-j}f\left(x,\frac{j}{n}\right),$$

on peut écrire

$$B_{m,n}(x,y)=B^{(\cdot,0)}_{\cdot,n}\{x,y;B^{(0,\cdot)}_{m,\cdot}[x,y;f(x,y)]\}$$

et donc

$$(42)\qquad f(x,y)-B_{m,n}(x,y;f)\equiv\{f(x,y)-B^{(0,\cdot)}_{m,\cdot}[x,y;f(x,y)]\}+$$

$$+\{B^{(0,\cdot)}_{m}[x,y;f(x,y)]-B^{(\cdot,0)}_{\cdot,n}[x,y;B^{(0,\cdot)}_{m,\cdot}(x,y;f)]\}.$$

Le premier terme de cette identité s'écrit en vertu de la formule (12) sous la forme

$$f(x,y)-B^{(0,\cdot)}_{m,\cdot}[x,y;f(x,y)]\equiv-\frac{x(1-x)}{m}[\xi_{m,1},\xi_{m,2},\xi_{m,3};f]_x,$$

où $\xi_{m,1}$, $\xi_{m,2}$, $\xi_{m,3}$, représentent des valeurs de l'intervalle $0<x<1$. Le deuxième terme de l'identité (42) représente l'approximation donnée par le polynome $B^{(\cdot,0)}_{\cdot,n}$ correspondant à la fonction $B^{(0,\cdot)}_{m,\cdot}[x,y;f(x,y)]$, relatif à la variable y. En vertu de la formule (12), ce terme peut être écrit sous la forme $-\frac{y(y-1)}{n}D(x,y)$, où

$$(43)\qquad D(x,y)=[\eta_{n,1},\eta_{n,2},\eta_{n,3},B^{(0,\cdot)}_{m,\cdot}(x,y;f(x,y)]_y$$

représente la différence divisée partielle de la fonction $B^{(0,\cdot)}_{m,\cdot}[x,y;f(x,y)]$ par rapport à la variable y sur les noeuds $\eta_{n,1}$, $\eta_{n,2}$, $\eta_{n,3}$. Ces noeuds dépendent des variables x et y et appartiennent à l'intervalle $0<y<1$. De la formule (43) on obtient aussitôt l'évaluation :

$$(44)\qquad D(x,y)=B_m(x;[a_1,a_2,a_3;f(x,y)]_y)|_{a_1=\eta_{n,1},\ a_2=\eta_{n,2},\ a_3=\eta_{n,3}}.$$

On sait toutefois que si $F(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle $[0,1]$ alors la formule de moyenne a lieu

$$B_m(x;F)=F(\xi),\quad \xi\in(0,1).$$

Considérant dans cette formule $F(x)=[a_1,a_2,a_3;f(x,y)]_y$ et en tenant compte de la continuité de la fonction $f(x,y)$ par rapport à la variable x, on obtient de (44) l'évaluation

$$D(x,y)=[a_1,a_2,a_3;f(\xi,y)]_y|_{a_1=\eta_{n,1},\ldots,\ a_3=\eta_{n,3}}.$$

De là et de (42) résulte en définitive la formule (39).

Une formule similaire à la formule (39) a été obtenue récemment, moyennant une autre méthode, par D. D. STANCU [19].

THÉORÈME 4*. *Dans les hypothèses du théorème 4, quels que soient les nombres naturels et satisfaisant aux inégalités* $0 \leqq \alpha \leqq k$, $0 \leqq \beta \leqq l$, *on a les évaluations*

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} f(x, y)}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} - \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} B^{(k,l)}_{m,n}[x, y ; f(x, y)] = \tag{45}$$

$$= -\frac{x^{k-\alpha+1}}{m}\left(\frac{k-\alpha+2}{2} - x\right)\left[\xi_1^{(\alpha,\beta)}, \ldots, \xi^{(\alpha,\beta)}_{k-\alpha+3} ; \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(x, y)}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}}\right]_x -$$

$$-\frac{y^{l-\beta+1}}{n}\left(\frac{l-\beta+2}{2} - y\right)\left\{\frac{x^{k-\alpha}}{(k-\alpha)!}\left[\eta_1^{(\alpha,\beta)}, \ldots, \eta^{(\alpha,\beta)}_{l-\beta+3} ; \frac{\partial^{k+\beta} f(\bar{x}, y)}{\partial x^{k} \partial y^{\beta}}\right]_y + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=0}^{k-\alpha-1} \frac{x^p}{p!}\left[\eta_1^{(\alpha,\beta)}, \ldots, \eta^{(\alpha,\beta)}_{l-\beta+3} ; \frac{\partial^{\alpha+\beta+p} f(0, y)}{\partial x^{\alpha+p} \partial y^{\beta}}\right]_y\right\}.$$

Toutes les différences divisées qui interviennent dans cette formule sont prises sur des noeuds des intervalles $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ *respectivement.*

Ce théorème résulte du théorème précédent, si l'on tient compte de l'identité

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} B^{(k,l)}_{m,n}[x, y ; f(x, y)] \equiv B^{(k-\alpha,\, l-\beta)}_{m,n}\left[x, y ; \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(x, y)}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}}\right], \tag{46}$$

qui s'établit d'ailleurs facilement en utilisant, l'identité (14) ainsi que l'identité (27).

Là aussi on peut faire des observations analogues aux observations 1° et 2° du théorème 4.

THEOREME 5. *Quelle que soit la fonction* $f(x, y)$ *admettant dans le domaine D des dérivées partielles d'ordre* $k + l$, *continues, les relations suivantes ont lieu*

$$B^{(k,l)}_{m+1,\,n+1}[x, y ; f(x, y)] - B^{(k,l)}_{m,n}[x, y ; f(x, y)] = \tag{47}$$

$$= -\frac{x^{k+1}}{m(m+1)}\left(\frac{k+2}{2} - x\right)\left\{\frac{y^l}{l!}\left[\xi_1, \ldots, \xi_{k+3} ; \frac{\partial^l f(x, \eta)}{\partial y^l}\right]_x + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=0}^{l-1} \frac{y^r}{r!}\left[[\xi_1, \ldots, \xi_{k+3} ; \frac{\partial^r f(x, 0)}{\partial y^r}\right]_x\right\} -$$

$$-\frac{y^{l+1}}{n(n+1)}\left(\frac{l+2}{2} - y\right)\left\{\frac{x^k}{k!}\left[\eta_1, \ldots, \eta_{l+3} ; \frac{\partial^k f(\xi, y)}{\partial x^k}\right]_y + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p!}\left[\eta_1, \ldots, \eta_{l+3} ; \frac{\partial^p f(0, y)}{\partial x^p}\right]_y\right\},$$

où ξ *et* ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, k+3)$ *sont des valeurs de l'intervalle* $0 < x < 1$, *et* η_j $(j = 1, 2, \ldots, l+3)$ *sont des valeurs de l'intervalle* $0 < y < 1$.

Démonstration. Nous montrerons d'abord qu'on a l'évaluation

$$\Delta_{\cdot,n} = B^{(k,l)}_{m,n+1}[x, y ; f(x, y)] - B^{(k,l)}_{m,n}[x, y ; f(x, y)] = \tag{48}$$

$$= -\frac{y^{l+1}}{n(n+1)}\left(\frac{l+2}{2} - y\right)\left\{\frac{x^k}{k!}\left[\eta_1, \ldots, \eta_{l+3} ; \frac{\partial^k f(\xi, y)}{\partial x^k}\right]_y + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=0}^{k-1} \frac{x^p}{p!}\left[\eta_1, \ldots, \eta_{l+3} ; \frac{\partial^p f(0, y)}{\partial x^p}\right]_y\right\},$$

où ξ et $\eta_1, \ldots, \eta_{l+3}$ sont des valeurs des intervalles $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ respectivement.

En effet, on peut écrire

$$\Delta_{\cdot,n} = B^{(\cdot,l)}_{\cdot,n+1}\{B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}[x, y ; f(x, y)]\} - B^{(\cdot,l)}_{\cdot,n}\{B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}[x, y ; f(x, y)]\}.$$

En appliquant le théorème 3, on obtient l'évaluation

$$\Delta_{\cdot,n} = -\frac{y^{l+1}}{n(n+1)}\left(\frac{l+2}{2} - y\right)[\eta_1, \ldots, \eta_{l+3} ; B^{(k,\cdot)}_{m,\cdot}(x, y ; f(x, y))]_y,$$

où les noeuds $\eta_1, \ldots, \eta_{l+3}$ dépendent des variables x et y et sont situés dans l'intervalle $0 < y < 1$. En procédant par la suite comme à l'évaluation de l'expression $D(x, y)$ de (29), on obtient pour $\Delta_{\cdot,n}$ l'évaluation (48).

C'est de la même façon que l'on obtient l'évaluation

$$\Delta_{m,\cdot} = B^{(k,l)}_{m+1,n}[x, y ; f(x,y)] - B^{(k,l)}_{m,n}[x, y ; f(x,y)] = \tag{49}$$

$$= -\frac{x^{k+1}}{m(m+1)}\left(\frac{k+2}{2} - x\right)\left\{\frac{y^l}{l!}\left[\xi_1, \ldots, \xi_{k+3} ; \frac{\partial^l f(x, \eta)}{\partial y^l}\right]_x + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=0}^{l-1} \frac{y^r}{r!}\left[\xi_1, \ldots, \xi_{k+3} ; \frac{\partial^r f(x, 0)}{\partial y^r}\right]_x\right\},$$

où η et $\xi_1, \ldots, \xi_{k+3}$ appartiennent aux intervalles $0 < y < 1$, $0 < x < 1$ respectivement.

Revenant à la démonstration du théorème 5, nous utilisons l'identité

$$B^{(k.l)}_{m+1,n+1} - B^{(k,l)}_{m,n} \equiv [B^{(k,l)}_{m+1,n+1} - B^{(k,l)}_{m,n+1}] + [B^{(k,l)}_{m,n+1} - B^{(k,l)}_{m,n}].$$

En évaluant les deux termes qui apparaissent de la sorte, conformément aux formules (48) et (49), on obtient la relation (47).

THEOREME 5*. *Dans les hypothèse du théorème 5, quel que soient les nombres naturels* α *et* β *satisfaisant aux inégalités* $0 \leqq \alpha \leqq k,\ 0 \leqq \beta \leqq l$ *on a des évaluations de la forme*

$$(50)\quad \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} B^{(k,l)}_{m,n+1}[x, y; f(x,y)] - \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} B^{(k,l)}_{m,n}[x, y; f(x,y)] =$$

$$= -\frac{y^{l-\beta+1}}{n(n+1)}\left(\frac{l-\beta+2}{2} - y\right)\left\{\frac{x^{k-\alpha}}{(k-\alpha)!}\left[\eta_1, \ldots, \eta_{l-\beta+3};\ \frac{\partial^{k+\beta} f(\xi, y)}{\partial x^k \partial y^\beta}\right]_y + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=0}^{k-\alpha-1} \frac{x^p}{p!}\left[\eta_1, \ldots, \eta_{l-\beta+3};\ \frac{\partial^{\alpha+\beta+p} f(0,y)}{\partial x^{\alpha+p}\partial y^\beta}\right]_y\right\}.$$

$$(51)\quad \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} B^{(k,l)}_{m+1,n}[x, y; f(x,y)] - \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} B^{(k,l)}_{m,n}[x, y; f(x,y)] =$$

$$= -\frac{x^{k-\alpha+1}}{m(m+1)}\left(\frac{k-\alpha+2}{2} - x\right)\left\{\frac{y^{l-\beta}}{(l-\beta)!}\left[\xi_1, \ldots, \xi_{k-\alpha+3};\ \frac{\partial^{l+\alpha} f(x,\eta)}{\partial x^\alpha \partial y^l}\right]_x + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=0}^{l-\beta-1} \frac{y^r}{r!}\left[\xi_1, \ldots, \xi_{k-\alpha+3};\ \frac{\partial^{\alpha+\beta+r} f(x,0)}{\partial x^\alpha \partial y^{\beta+r}}\right]_x\right\},$$

$$(52)\quad \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} B^{(k,l)}_{m+1,n+1}[x, y; f(x,y)] - \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} B^{(k,l)}_{m,n}[x, y; f(x,y)] =$$

$$= -\frac{x^{k-\alpha+1}}{m(m+1)}\left(\frac{k-\alpha+2}{2} - x\right)\left\{\frac{y^{l-\beta}}{(l-\beta)!}\left[\xi_1, \ldots, \xi_{k-\alpha+3};\ \frac{\partial^{\alpha+l} f(x,\eta)}{\partial x^\alpha \partial y^l}\right]_x + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=0}^{l-\beta-1} \frac{y^r}{r!}\left[\xi_1, \ldots, \xi_{k-\alpha+3};\ \frac{\partial^{\alpha+\beta+r} f(x,0)}{\partial x^\alpha \partial y^{\beta+r}}\right]_x\right\} -$$

$$-\frac{y^{l-\beta+1}}{n(n+1)}\left(\frac{l-\beta+2}{2} - y\right)\left\{\frac{x^{k-\alpha}}{(k-\alpha)!}\left[\eta_1, \ldots, \eta_{l-\beta+3};\ \frac{\partial^{k+\beta} f(\xi, y)}{\partial x^k \partial y^\beta}\right]_y + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=0}^{k-\alpha-1} \frac{x^p}{p!}\left[\eta_1, \ldots, \eta_{l-\beta+3};\ \frac{\partial^{\alpha+\beta+p} f(0,y)}{\partial x^{\alpha+p}\partial y^\beta}\right]_y\right\}.$$

L'affirmation de ce théorème résulte immédiatement du théorème 5 si l'on tient compte de l'identité (46).

THÉORÈME 6. *Si dans le domaine* $D\{0 \leqq x \leqq 1,\ y \leqq 0 \leqq 1\}$ *les fonctions*

$$(53)\quad f(x,0),\ \frac{\partial f(x,0)}{\partial y},\ \ldots,\ \frac{\partial^{l-1} f(x,0)}{\partial y^{l-1}},\ \frac{\partial^l f(x,y)}{\partial y^l}$$

sont convexes (non concaves respectivement) d'ordre $k+1$ *par rapport à la variable* x, *alors la suite double* $\{B^{(k,l)}_{m,n}(x, y; f)\}_{m,n=1,2,\ldots}$ *est décroissante (non croissante respectivement) par rapport à l'indice* m, *dans le domaine* $D^*\{0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$, *c'est-à-dire*

$$(54)\quad B^{(k,l)}_{m+1,n}(x, y; f) - B^{(k,l)}_{m,n}(x, y; f) < 0, \quad (x,y) \in D^*.$$

Une propriété analogue a lieu relativement à l'indice n, *dans l'hypothése que dans le domaine* D *sont convexes (non concaves respectivement) d'ordre* $l+1$ *par rapport à la variable* y *les fonctions suivantes :*

$$(55)\quad f(0,y),\ \frac{\partial f(0,y)}{\partial x},\ \ldots,\ \frac{\partial^{k-1} f(0,y)}{\partial x^{k-1}},\ \frac{\partial^k f(0,y)}{\partial x^k}.$$

Les affirmations de ce théorème résultent tout de suite des formules (49) et (48).

Observation. Lorsque l'un des nombres k ou l est nul, ou lorsque les deux sont nuls, la formule (21) n'a plus de sens. Par exemple, si $k = l = 0$, au lieu des polynomes (21) il faut considérer les polynomes (18). Avec cette convention le théorème 6 demeure vrai dans ce cas aussi.

THÉORÈME 6*. *Soient* α *et* β *des nombres naturels satisfaisant aux inégalités* $0 \leqq \alpha \leqq k,\ 0 \leqq \beta \leqq l$. *Si dans le domaine* $D\{0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ *les fonctions*

$$(56)\quad \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(x,0)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta},\ \frac{\partial^{\alpha+\beta+1} f(x,0)}{\partial x^\alpha \partial y^{\beta+1}},\ \ldots,\ \frac{\partial^{\alpha+l-1} f(x,0)}{\partial x^\alpha \partial y^{l-1}},\ \frac{\partial^{\alpha+l} f(x,y)}{\partial x^\alpha \partial y^l}$$

sont convexes (non concaves respectivement) d'ordre $k-\alpha+1$ *par rapport à la variable* x, *alors la suite double* $\left\{\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} B^{(k,l)}_{m,n}[x, y; f]\right\}_{m,n=1,2,\ldots}$ *est décroissante (non croissante respectivement) par rapport à l'indice* m *dans le domaine* $D^*\{0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$.

Une propriété analogue a lieu relativement à l'indice n, *dans l'hypothèse que dans le domaine* D *sont convexes (non concaves respectivement) d'ordre* $l-\beta+1$ *par rapport à la variable* y, *les fonctions suivantes*

$$(57)\quad \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(0,y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta},\ \frac{\partial^{\alpha+\beta+1} f(0,y)}{\partial x^{\alpha+1}\partial y^\beta},\ \ldots,\ \frac{\partial^{k+\beta-1} f(0,y)}{\partial x^{k-1}\partial y^\beta},\ \frac{\partial^{k+\beta} f(x,y)}{\partial x^k \partial y^\beta}.$$

Les affirmations de ce théorème résultent tout de suite des formules (51) et (50).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aramă O., *Proprietăţi privind monotonia şirului polinoamelor de interpolare ale lui S.N.Bernstein şi aplicarea lor la studiul aproximării funcţiilor.* Studii şi cercet. de matematică (Cluj), VIII, 195–210 (1957).

[2] Арамэ О., *Относительно свойств монотонности последовательности интерполяционных многочленов С. Н. Бернштейна и их применения к исследованию приближения функций.* Mathematica 2 (25), 25—40 (1960).

[3] Butzer P. L., *Linear Combinations of Bernstein Polynomials.* Can. J. Math., 5, 559-567 (1953).

[4] — *On two-dimensional Bernstein Polinomials.* Canad. J. Math., 5, No. 1, 107-113 (1953)

[5] Ипатов А. Ф., *Оченка погрешности и порядок приближения функций двух переменных, полиномами С. Н. Бернштейна.* Уч. Зап. Петрозаводского. Ун-та, 4, N°4, 31—48 (1955).

[6] — *Некоторые теоремы сходимости полиномов $B_{m,n}(f\,;\,x,\,y)$ скелетов $f(r,s)$ $\bar{\in}S$. и дифференцированых полиномов.* Уч. Зап. Петрозаводского Ун-та, 4, N° 4, 49—58 (1955).

[7] Kingsely E. H., *Bernstein Polynomials for Fonctions of two Variables of Class $C^{(k)}$.* Proc. Amer. Math. Soc., 2, No. 1, 64-71 (1951).

[8] Lorentz G. G., *Bernstein Polynomials.* Toronto, 1953.

[9] Moldovan E., *Asupra unei modificări a procedeului de interpolare a lui S.N.Bernstein.* Studii şi cercet. ştiinţifice, Acad. R.P.R., Filiala Cluj, III, No. 3-4, 18-22 (1952)

[10] Popoviciu T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur.* Mathematica, Cluj, 10, 49-54 (1935).

[11] — *Despre cea mai bună aproximaţie a funcţiilor continue prin polinoame.* Cluj, 1937.

[12] — *Asupra restului în unele formule liniare de aproximare ale analizei.* Studii şi cercetări de matematică (Cluj), X, 337-389 (1959).

[13] — *Sur le rest dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse.* Mathematica 1(24), 95-142 (1959).

[14] — *Différences divisées et dérivées.* Mathematica, 1 (24), 297-319 (1959).

[15] — *Diferenţe divizate şi derivate.* Studii şi cercetări de matematică (Cluj), XI, 119-145 (1960).

[16] Stancu D. D., *Asupra aproximării prin polinoame de tip Bernstein a funcţiilor de două variabile.* Comunicările Acad. R.P.R., 9, No. 8, 773-777 (1959).

[17] — *Asupra aproximării funcţiilor de două variabile prin polinoame de tip Bernstein. Citeva evaluări asimptotice.* Studii şi cercetări de matem. (Cluj), XI, 171-175 (1960).

[18] — *Sur l'approximation des derivées des fonctions par les derivées correspondantes de certains polynomes du type Bernstein.* Mathematica 2 (25), 335-348 (1960).

[19] — *A method for obtaining polynomials of Bernstein type of two variables.* Amer. Math. Monthly, 70, 3, 260-264 (1963).

[20] Schoenberg I. J., *On Variation diminishing Approximation Methods.* On numerical approximation. Proceedings of a Symposium, Madison, April 21-23, 1958, pp. 249-274. Publication No. 1 of the Mathematics Research Center, U.S.Army, the University of Wisconsin. The University of Wisconsin Press, Madison, 1959.

Reçu le 1. IX. 1961.

MATHEMATICA VOL, 4 (27), 2, 1962, pp. 225 — 233

SUR CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES CONSIDÉRÉES PAR I. STAMATE

par

B. CHOCZEWSKI et M. KUCZMA

à Gliwice à Krakow

§ 1

I. STAMATE a considéré dans ses travaux [5], [6] les équations fonctionelles suivantes :

$$\frac{xf(y)-yf(x)}{x-y}=f\left(\frac{x+y}{2}\right)-\frac{x+y}{2}\,f'\left(\frac{x+y}{2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{xf(y)-yf(x)}{x-y}=g\left(\frac{x+y}{2}\right)\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)-\frac{x+y}{2}\,f'\left(\frac{x+y}{2}\right)\right], \tag{2}$$

$$\frac{xf(y)-yf(x)}{x-y}=f\left(\frac{x+y}{2}\right)-\frac{x+y}{2}\,g\left(\frac{x+y}{2}\right), \tag{3}$$

$$\frac{xf(y)-yf(x)}{x-y}=f(\sqrt{xy})-\sqrt{xy}\,f'(\sqrt{xy}). \tag{4}$$

Ces équations sont des cas particuliers de l'équation

$$\frac{xf(y)-yf(x)}{x-y}=F[\xi, f(\xi), f'(\xi), \ldots, f^{(n)}(\xi), g(\xi), g'(\xi), \ldots, g^{(m)}(\xi)], \tag{5}$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont les fonctions inconnues et $\xi=\xi(x,y)$ et $F(t, u_0, u_1, \ldots, u_n, v_0, v_1, \ldots, v_m)$ sont des fonctions données.

Dans ce travail nous allons présenter une méthode de la résolution de l'équation (5). Nous allons supposer que la fonction $f(x)$ est de la classe C^1. Si l'on a $n \geqq 1$, cette supposition est tout à fait naturelle. Mais si les