

OBSERVATIONS SUR LA SUITE DES POLYNOMES DE S. N. BERNSTEIN D'UNE FONCTION CONTINUE

par

ELENA MOLDOVAN

à Cluj

1. Dans les travaux [1] et [5] on démontre le

THÉOREME (*) Si la fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $[0, 1]$, est convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe ou concave d'ordre 1, alors la suite des polynomes de S. N. Bernstein

$$(1) \quad B_1[f; x], B_2[f; x], \dots, B_n[f; x], \dots$$

relatifs à la fonction $f(x)$ et à l'intervalle $[0, 1]$ est respectivement décroissante, non-croissante, stationnaire, non-décroissante ou croissante.

Dans l'énoncé de ce théorème, la propriété de convexité, non-concavité, polynomialité, non-convexité ou concavité d'ordre 1, de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$ signifie que les différences divisées $[x_1, x_2, x_3; f]$ pour chaque système de trois points x_1, x_2, x_3 de l'intervalle $[0, 1]$, sont > 0 , ≥ 0 , $= 0$, ≤ 0 , ou < 0 .

Dans le travail [2] on démontre le suivant théorème réciproque du théorème que nous avons énoncé :

THÉOREME (**) Si la dérivée $f''(x)$ existe, est continue sur $[0, 1]$ et si sur cet intervalle on a $B_{n+1}[f; x] \leq B_n[f; x]$, $n = 1, 2, \dots$, alors $f(x)$ est convexe d'ordre 1 sur $[0, 1]$. (Par la convexité on a entendu non-concavité).

2. Le but de cette court note est de faire l'observation que dans l'énoncé du théorème (**) on peut remplacer la condition de continuité de la dérivée $f''(x)$, par une hypothèse plus faible.

Considérons le polynôme du degré n de S. N. Bernstein

$$(2) \quad P_n[f; x] = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{i=0}^n f(a_i) \binom{n}{i} (b-x)^{n-i} (x-a)^i$$

relatif à l'intervalle $[a, b]$ où $a_i = a + i \frac{b-a}{n}$ et la fonction $f(x)$ est définie sur $[a, b]$.

Pour $a = 0$ et $b = 1$, on obtient le polynôme

$$(3) \quad B_n[f; x] = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i.$$

Le polynôme du degré n de S. N. Bernstein est en même temps le polynôme d'interpolation de Lagrange sur les $n+1$ noeuds

$$a_i = a + i \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

et pour une fonction dont les valeurs sur les noeuds s'obtiennent par des opérations appliquées aux valeurs de la fonction $f(x)$ sur les points considérés. Cette observation a été faite dans le travail [3]. Pour le polynôme (2) on a

$$(4) \quad P_n\left[f; a + s \frac{b-a}{n}\right] = \frac{1}{n^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} s^i (n-s)^{n-i} f(a_i).$$

On voit donc, que le polynôme $P_n[f; x]$, prend sur les points $a_s = a + s \frac{b-a}{n}$ des valeurs qui s'obtiennent de celles de la fonction $f(x)$ comme on l'indique dans la partie droite dans (4). Dans le travail [3] on a donné aussi une construction géométrique des points $A_s(a + s \frac{b-a}{n}, b_s^*)$, où

$$b_s^* = \frac{1}{n^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} s^i (n-s)^{n-i} f(a_i), \quad s = 0, 1, \dots, n.$$

C'est une construction des lignes polygonales successives.

On remarque que la démonstration du théorème (*) peut se déduire de la formule (4) et de la propriété des polynômes $P_n[f; x]$ de conserver les caractères de convexité de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle considéré [4].

3. L e m m e 1. Si la fonction $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ et si la suite $\{P_n[f; x]\}_{n=1}^{\infty}$ est non-décroissante, alors $f(x) \geq P_n[f; x]$, $x \in [a, b]$, $n = 1, 2, \dots$

La démonstration résulte du fait que la fonction $f(x)$ étant continue sur $[a, b]$, la suite $\{P_n[f; x]\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers $f(x)$, sur $[a, b]$ et donc, à cause de la monotonie qu'on a supposée pour la suite des polynômes $P_n[f; x]$, on ne peut pas avoir $f(x) < P_n[f; x]$ sur aucun point de $[a, b]$.

On peut démontrer de la même façon le

L e m m e 2. Si la fonction $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ et si la suite $\{P_n[f; x]\}_{n=1}^{\infty}$ est non-croissante, alors $f(x) \leq P_n[f; x]$, $x \in [a, b]$, $n = 1, 2, \dots$.

À l'aide de la formule (4) on obtient immédiatement le

L e m m e 3. Si la fonction $f(x)$ est non-concave (non-convexe) d'ordre 1 sans être polynomiale sur $[a, b]$ alors il existe au moins un point dans $[a, b]$ sur lequel $P_n[f; x] > f(x)$ ($P_n[f; x] < f(x)$). Si la fonction $f(x)$ continue*) sur $[a, b]$ n'est pas d'ordre 1**) alors pour n suffisamment grand on a $P_n[f; x] < f(x)$ sur au moins un point et $P_n[f; x] > f(x)$ sur au moins un point de $[a, b]$.

4. THÉOREME 1. Si la fonction $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ et si l'on a $f(x) \geq P_n[f; x]$ pour $x \in [a, b]$ et pour $n = 1, 2, \dots$, alors $f(x)$ est non-convexe d'ordre 1 sur $[a, b]$.

Pour démontrer ce théorème, on voit, en considérant tous les cas de négations de la non-convexité, qu'ils sont en contradiction avec l'hypothèse faite sur la fonction $f(x)$. En effet, si l'on suppose que la fonction $f(x)$ est convexe, ou non-concave d'ordre 1 sur $[a, b]$ alors en utilisant le lemme 3, on est en contradiction avec l'inégalité $f(x) \geq P_n[f; x]$, $x \in [a, b]$ et $n = 1, 2, \dots$. Si l'on suppose que la fonction $f(x)$ n'est pas d'ordre 1, alors on obtient la même contradiction.

Le théorème suivant est aussi vrai.

THÉOREME 2. Si la fonction $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ et si l'on a $f(x) \leq P_n[f; x]$ pour $x \in [a, b]$ et pour $n = 1, 2, \dots$, alors $f(x)$ est non-concave d'ordre 1 sur $[a, b]$ ***).

*) Quand on a supposé que la fonction $f(x)$ est d'ordre 1 sur $[a, b]$, la continuité sur (a, b) en résulte.

**) Dans ce cas il existe trois points x_1, x_2, x_3 dans $[a, b]$ sur lesquels $[x_1, x_2, x_3; f] > 0$ et trois points x'_1, x'_2, x'_3 sur lesquels $[x'_1, x'_2, x'_3; f] < 0$.

***). Dans les théorèmes 1 et 2 la non-concavité contient aussi le cas de convexité et la non-convexité le cas de concavité.

5. On peut maintenant obtenir en se basant sur les lemmes 1, 2 et les deux théorèmes, le

THÉOREME 3. Si la fonction $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ et si la suite $\{P[f; x]\}_{n=1}^{\infty}$ est non-décroissante (non-croissante), alors la fonction $f(x)$ est non convexe (non concave) d'ordre 1 sur $[a, b]$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Арамэ О., Относительно свойств монотонности последовательности интерполяционных многочленов С. Н. Бернштейна и их применения к исследованию приближения функций. *Mathematica*, 2 (25), 1, 25—40 (1960).
- [2] Kosmak Ladislaw, A note on Bernstein Polynomials of Convex Function. *Mathematica* 2(23), 2, 281-282 (1960).
- [3] Popoviciu Tiberiu, Despre cea mai bună aproximație a funcțiilor continue prin polinoame, Cluj, 1937.
- [4] — Sur les fonctions convexes d'ordre supérieur. *Act. Sc. Ind. Paris*, 1948.
- [5] Schoenberg I. J., On variation diminishing approximation methods. *On numerical App. Proc. of a Symposium, Madison*, April, 21-23, 249-174 (1959).

Reçu le 10, VIII, 1961

SUR UN CYCLE LIMITE

par

I. MUNTEANU

à Cluj

Dans ce travail on établit l'existence, l'unicité et la stabilité orbitale d'un cycle limite pour un système d'équations différentielles qui généralise au sens indiqué dans [4] et [5] le système bien connu de LIÉNARD [3] ainsi que le système considéré par LEVINSON et SMITH [2]. En utilisant la méthode de STOKER et FLANDERS [8] on étudie ensuite le comportement à la limite d'une famille de cycles limite qui dépendent d'un paramètre.

1. Considérons le système d'équations différentielles :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = h(y) - F(x), \\ \frac{dy}{dt} = -g(x). \end{cases}$$

Nous supposons que les conditions suivantes sont remplies :

1°. Les fonctions $F(x)$, $g(x)$ et $h(y)$ sont définies sur tout l'axe réel, sont impaires, continues et satisfont à des exigences qui assurent l'unicité et la possibilité de prolongement de toute solutions du problème de Cauchy relatif au système (1);

2°. La fonction $F(x)$ a une seule racine positive $x = a$, $F(x) < 0$ pour $0 < x < a$ et $F(x)$ est croissante dans l'intervalle $[a, \infty)$;

3°. $\operatorname{sgn} g(x) = \operatorname{sgn} x$;

4°. La fonction $h(y)$ est croissante et $\lim_{y \rightarrow \infty} h(y) = \infty$