

4. В работах [2], [3] показано, что многие граничные задачи для дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и эллиптического типа, приводят к исследованию уравнений вида

$$(12) \quad Mu - \lambda Nu = 0 \quad \left(\mu Mu - Nu = 0, \quad \mu = \frac{1}{\lambda} \right) \quad u \in R$$

где M и N — линейные операторы (порожденные заданными дифференциальными выражениями и граничными условиями), определенные соответственно на плотных в X линейных множествах R и $D_N \supseteq R$ удовлетворяющие следующим условиям: множества образов операторов M и N связаны условием $M(R) \supseteq N(D_N)$, M и N — симметрические операторы: $(Mu, v) = (u, Mv)$, $(Nu, v) = (u, Nv)$, $u, v \in R$, M — строго положительный оператор: $(Mu, u) \geq \gamma_M(u, u)$, $\gamma_M > 0$, имеющий обратный оператор M^{-1} , вполне непрерывный в X , оператор $M^{-1}N$ имеет дискретный спектр.

Уравнение (12) эквивалентно уравнению

$$u - \lambda M^{-1}Nu = 0 \quad (\mu u - M^{-1}Nu = 0) \quad u \in R.$$

Оператор $A = M^{-1}N$ удовлетворяет всем условиям § 1, его симметризатором является оператор $H = M$. Поэтому, для уравнения (12) справедливы все результаты § 2, где в формулировках теорем надо оператор A заменить на $M^{-1}N$, а оператор H на M .

Если N также имеет обратный оператор N^{-1} , вполне непрерывный в X , то система собственных элементов уравнения (12) полна (см. § 3), ибо оператор $A^{-1}H^{-1} = (M^{-1}N)^{-1}M^{-1} = N^{-1}$ вполне непрерывен в X и для уравнения (12) справедлива теорема 5.

Соображения, приведенные в этом § дают возможность применять результаты, полученные в этой работе к изучению распределения характеристических значений дифференциальных операторов, порождаемых различными граничными задачами (см. [2], [3]).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bückner H., *Die praktische Behandlung von Integralgleichungen*. Berlin, 1952.
 [2] Харазов Д. Ф., О некоторых свойствах линейных операторов, обеспечивающих справедливость теории Гильберта — Шмидта. УМН XII, 4 (76), (1957).
 [3] Харазов Д. Ф., К спектральной теории полуограниченных операторов. Тр. Тбил. мат. ин-та XXVI, 153—170 (1959).

Поступило 21. IX. 1962

SUR LES MÉTHODES D'ITÉRATION APPLIQUÉES DANS L'ESPACE DE BANACH POUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES NONLINÉAIRES.

par

BELA JANKÓ

à Cluj

Considérons la catégorie des méthodes, ayant la forme générale [2]

$$(1) \quad \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + \Phi([P'(\tilde{x}_n)]^{-1}, P(\tilde{x}_n), P'(x_n), P''(\tilde{x}_n), \dots)$$

qui servent à la résolution des équations opérationnelles nonlinéaires $P(x)=0$, définies dans l'espace de Banach X . On voit dans cette formule qu'on suppose l'existence de l'inverse de la première dérivée du type Fréchet. Il est cependant bien connu qu'il y a souvent des difficultés dans l'application effective de ces méthodes. Il est difficile de vérifier l'existence des inverses et de délimiter convenablement leurs normes. Le calcul effectif des inverses présente aussi des difficultés, ce calcul étant équivalent à la résolution d'une équation opérationnelle linéaire. Souvent ces inverses ne peuvent pas être calculées exactement.

Dans notre travail nous cherchons à éviter l'utilisation des inverses dans la résolution des équations fonctionnelles de la forme $F(x) = 0$. Par conséquent nous considérons une autre catégorie de méthodes,

$$(2) \quad x_{n+1} = x_n + \Psi\left(\frac{1}{F'(x_n)}, y_n, F(x_n), F'(x_n), \dots, F^{(m)}(x_n)\right) y_n, \quad (n = 0, 1, \dots)$$

où Ψ est une fonctionnelle nonlinéaire donnée et $F^{(v)}(x_n)$, ($v = 1, 2, \dots, m$) représentent les dérivées de Fréchet de la fonctionnelle nonlinéaire, continue $F(x)$, définie dans un domaine convexe et complet D de l'espace de

Banach X . L'élément $x_0 \in D \subset X$ désigne l'approximation initiale et $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in X$ sont les approximations successives calculées par la formule (2). Les éléments $y_n \in D$ sont choisis de telle manière qu'ils satisfont à la condition [1],

$$(A) \quad |F'(x_n) y_n| = \|F'(x_n)\|, \quad \|y_n\| = 1.$$

Nous introduisons en ce qui suit les notations suivantes :

$$\Delta_n = x_{n+1} - x_n, \quad |F_n| = \eta_n, \quad \frac{1}{\|F'_n\|} = B_n$$

où

$$F_n = F(x_n) \text{ et } F_n^{(v)} = F^{(v)}(x_n), \quad (v = 1, 2, \dots, m).$$

Définition. La méthode d'itération (2) est dite convergente d'ordre k , si

- a) η_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, et
- b) les propriétés suivantes ont lieu [2]

$$\eta_{n+1} \leq G(B_n, \eta_n) \eta_n^k,$$

(C)

$$\|\Delta_n\| \leq H(B_n, \eta_n) \eta_n$$

où les fonctions G, H peuvent être données et elles sont monotones non-décroissantes.

Nous pouvons mettre en évidence que les relations (C) peuvent être établies facilement pour les méthodes connues, telles [1] la méthode de M. ALTMAN

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F_n}{F'_n y_n} y_n$$

et la méthode de TCHEBYCHEFF généralisée

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F_n}{F'_n y_n} y_n - \frac{1}{2} \frac{F''_n (F_n y_n)^2}{(F'_n y_n)^3} y_n$$

qui constituent des cas particuliers de la méthode générale (2).

THÉOREME. On considère l'équation fonctionnelle nonlinéaire $F(x) = 0$, définie dans le domaine complet et convexe D de l'espace de Banach X et de plus nous supposons satisfaites les conditions suivantes :

- 1°. les relations (A) et (C) ont lieu ;
- 2°. il existe la délimitation

$$B_0 = \frac{1}{\|F'_0\|} < B < +\infty$$

et supposons encore que l'approximation x_1 , est déjà calculée, en partant de l'approximation initiale x_0 ;

3°. il existe les dérivées du type Fréchet jusqu'à l'ordre $m \geq 2$ et nous avons la délimitation

$$\|F''(x)\| \leq K$$

pour n'importe quelle $x \in D$;

4°. en notant par $h = H(B, \eta_0)$, $g = G(B, \eta_0)$, $\beta = g \eta_0^{k-1}$ et $h_0 = B_0 K h \eta_0$, nous supposons remplies les inégalités

$$(3) \quad 0 < h_0 \leq 1 - \beta$$

et

$$(4) \quad \beta + \frac{h_0}{1 - h_0} \frac{B^2}{(B - B_0) B_0} \leq 1 ;$$

5°. supposons que les approximations x_0, x_1 , appartiennent à la sphère $S = S(x_1; r) \subset D$, où $S(x_1; r)$ est définie par l'inégalité

$$\|x - x_1\| \leq r = \frac{h \eta_0 \beta}{1 - \beta^k}.$$

Si les conditions 1° — 5° énoncées ci-dessus sont satisfaites, alors

$$B_n = \frac{1}{\|F'_n\|} < B$$

pour toutes les approximations x_n calculées moyennant l'itération (2), et l'équation $F(x) = 0$, admet une solution $x^* \in S$ vers laquelle tendent les approximations x_n . La rapidité de convergence est caractérisée par la délimitation

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{h \eta_0 b_n}{1 - \beta^{k^n}}$$

où $b_n = \beta^{1+k+\dots+k^{n-1}}$ pour $n > 0$ et $b_0 = 1$.

Démonstration. Considérons les propriétés

$$\text{I)} \quad \eta_n \leq \eta_0 b_n$$

$$\text{II)} \quad B_n = \frac{1}{\|F'_n\|} < +\infty,$$

$$\text{III)} \quad h_n \leq h_0 < 1 \quad \text{où} \quad h_n = B_n K h \eta_n,$$

IV) l'approximation x_{n+1} peut être calculée par l'itération (2) et $x_{n+1} \in S$;

$$\text{V)} \quad B_n \leq B - (B - B_0) b_n.$$

Il résulte des conditions 1^o — 5^o que les propriétés I) — V) énoncées ci-dessus sont remplies pour $n = 0$. Nous supposons qu'elles sont valables pour n et nous montrons qu'elles sont vraies aussi pour $n + 1$.

I. La propriété IV) entraîne que la valeur $F(x_{n+1})$ peut être calculée. Il résulte de la condition (C) et de la propriété I), que

$$\begin{aligned} (5) \quad \eta_{n+1} &\leq G(B_n, \eta_n) \eta_n^k \leq G(B, \eta_0) \eta_n^k = g \eta_n^{k-1} \eta_0 b_n^k = \\ &= \beta \eta_0 \beta^{k+k^2+\dots+k^n} = \eta_0 b_{n+1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la propriété I) est valable aussi pour $n + 1$.

II. Soient les relations

$$\|F'_{n+1}\| > \|F'_n\| - \|F'_n - F'_{n+1}\| = \|F'_n\| \left(1 - \frac{\|F'_n - F'_{n+1}\|}{\|F'_n\|}\right)$$

où

$$\|F'_{n+1}\| \geq \|F'_n\| (1 - B_n K h \eta_n),$$

par conséquent, si nous nous servons aussi de la condition V), nous obtenons

$$B_{n+1} = \frac{1}{\|F'_{n+1}\|} \leq \frac{B_n}{1 - h_n} \leq \frac{B_0}{1 - h_0} < +\infty.$$

III. En tenant compte des formules (5), (3) et de la propriété III), nous trouvons que

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= B_{n+1} K h \eta_{n+1} \leq \frac{B_n}{1 - h_n} \leq K h g \eta_n^k = \frac{h_n}{1 - h_n} g \eta_n^{k-1} \leq \\ &\leq \frac{h_n}{1 - h_0} g \eta_0^{k-1} = \frac{h_n}{1 - h_0} \beta \leq h_n \leq h_0. \end{aligned}$$

Nous pouvons observer que $\{h_n\}$ est une suite de nombres noncroissants.

IV. $\frac{1}{\|F'_{n+1}\|}$ étant fini nous pouvons calculer l'approximation x_{n+2} par la formule (2). Nous montrons que $x_{n+2} \in S$. En effet

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - x_1\| &\leq \sum_{i=1}^{n+1} \|\Delta_i\| \leq \sum_{i=1}^{n+1} h \eta_i \leq \sum_{i=1}^{n+1} h \eta_0 b_i = \\ &= h \eta_0 [\beta + \beta^{1+k} + \beta^{1+k+\dots+k^n}] \leq \frac{\beta h \eta_0}{1 - \beta^k} \end{aligned}$$

par conséquent $x_{n+2} \in S$.

V. En tenant compte de $0 \leq h_n < 1$ nous obtenons que

$$\frac{1}{1 - h_n} \leq 1 + \frac{h_n}{1 - h_0}.$$

Alors nous avons

$$(6) \quad B_{n+1} \leq \frac{B_n}{1 - h_n} \leq B_n \left(1 + \frac{h_n}{1 - h_0}\right) \leq B_n (1 + B q b_n)$$

où

$$q = \frac{K h}{1 - h_0} \eta_0 = \frac{h_0}{B_0 (1 - h_0)}.$$

La dernière inégalité de (6) peut être vérifiée immédiatement en tenant compte des relations $\eta_n \leq \eta_0 b_n$ et $B_n \leq B$.

D'autre part

$$B_{n+1} \leq [B - (B - B_0) b_n] [1 + B q b_n] = B - (B - B_0) b_n \bar{q}$$

où

$$\bar{q} = 1 - \frac{B^2 q}{B - B_0} + B q b_n \geq 1 - \frac{B^2 q}{B - B_0} = 1 - \frac{B^2}{(B - B_0) B_0} \cdot \frac{h_0}{1 - h_0} \geq \beta \geq \beta^{k^n}$$

et enfin

$$B_{n+1} \leq B - (B - B_0) b_{n+1}.$$

Ainsi nous avons démontré que les propriétés I) — V) sont valables aussi pour $n + 1$, par conséquent pour tous les nombres naturels. Considérons les délimitations

$$\begin{aligned} \|x_{n+p+1} - x_n\| &\leq \sum_{i=n}^{n+p} \|\Delta_i\| \leq \sum_{i=n}^{n+p} h \eta_i \leq \sum_{i=n}^{n+p} h \eta_0 b_i = \\ &= h \eta_0 \beta^{1+k+\dots+k^{n-1}} (1 + \beta^{k^n} + \dots + \beta^{k^n+\dots+k^{n+p-1}}) \leq \frac{h \eta_0 b_n}{1 - \beta^{k^n}} \end{aligned}$$

où p est un nombre entier nonnégatif quelconque, $p > 1$. Si $n \rightarrow \infty$, alors $\|x_{n+p+1} - x_n\| \rightarrow 0$, où $x_n \in S$ pour chaque n . La sphère S étant complète, il existe un élément $x^* \in S$ telle que $x_n \rightarrow x^*$. La limite x^* est une solution de l'équation fonctionnelle $F(x) = 0$. En effet $|F(x_n)| = \eta_n \leq \eta_0 b_n$, où $b_n \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$ et $F(x)$ étant continue, il résulte $F(x^*) = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Altman M., *Concerning appropriate solutions of non-linear functional equations*. Bulletin de l'Acad. Polon. V, 5, 461—465 (1957).
 [2] Collatz L., *Nährungsverfahren höherer Ordnung für Gleichungen in Banach-Räumen*. Archive for Rational Mechanics and Analysis. II, 1, 66-75 (1958).

Reçu le 21. III. 1962

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

И. КОЛУМБАН

Клуж

1. Пусть E — линейное пространство, M — линейное подпространство пространства E , а $E^\#$ и $M^\#$ — множество адитивных и однородных функционалов определённых на E , соответственно на M . Пусть, дальше p — субадитивный и положительно однородный функционал, определённый на E . Если функционал $f \in M^\#$ мажорирован функционалом p , т.е. $f(x) \leq p(x)$ для всех $x \in M$, тогда на основе теоремы Хана — Банаха [1] f обладает по крайней мере одним продолжением $F \in E^\#$, также мажорируемым функционалом p .

В настоящей работе даётся необходимое и достаточное условие для того, чтобы указанное продолжение было единственным. В том случае, когда E является нормированным линейным пространством, такое условие было дано Р. Р. ФЕЛПСОМ [2] в 1960 году.

2. Определение 1. Функционал $f \in E^\#$ называется p -ограниченным, если существует неотрицательное число m так, чтобы $f(x) \leq m p(x)$ для всех $x \in E$.

Будем обозначать в дальнейшем множество функционалов p -ограниченных из $M^\#$, соответственно из $E^\#$, через $M_p^\#$, соответственно через $E_p^\#$.

Определение 2. Подмножество W вещественного линейного пространства L называется клином, если оно выпуклое и для всех вещественных и неотрицательных чисел λ из условия $u \in W$ следует $\lambda u \in W$.

Определение 3. Клину W называется нормированным, если на нем определен функционал обозначаемый $\| \cdot \|$ со следующими свойствами: