MATHEMATICA VOL. 4 (27), 1, 1962, pp. 65 – 69

SUR LES SOLUTIONS POSITIVES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

par

L. NEGRESCU, A. NÉMETH et T. RUS

à Cluj

On considère le système de n équations à n inconnues :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

aux conditions :

$$(2)\quad \begin{array}{ll} \text{a)} & a_{ij} > 0 \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n \\ \text{b)} & a_{ii} < a_{i+1\,i} < a_{i+2\,i} < \ldots < a_{ni} < a_{1i} < \ldots < a_{i-1\,i} \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

On note par $\Delta^{(n)}$, le déterminant de ce système, $\Delta^{(n)} = |a_{ij}|$. On dit qu'une solution de ce système $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ est positive si $x_j^0 > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

THÉORÈME. *Le système d'équations* (1) *aux conditions* (2) *admet une solution unique positive et* $(-1)^{n-1}\Delta^{(n)} > 0$.

Afin de démontrer ce théorème nous ferons quelques considérations sur le déterminant du système (1).

Si on note par $\Delta_i^{(n)}$ un déterminant de la forme du déterminant du système (1) dans les conditions (2) où la colonne i est remplacée par 1 en entier, alors nous montrerons que sign $\Delta_i^{(n)}$ = sign $\Delta^{(n)} = (-1)^{n-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Soit

$$\Delta_i^{(n)} = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1i-1} & 1 & a_{1i+1} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2i+1} & 1 & a_{2i+1} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{ni-1} & 1 & a_{ni+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Afin de démontrer l'affirmation ci-dessus, nous procéderons par induction complète sur n.

Pour $n = 2$ (le cas $n = 1$ étant banal) nous avons :

$$\Delta_1^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22} - a_{12} < 0\, ; \Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix} = a_{11} - a_{21} < 0$$

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} < 0$$

On voit immédiatement que sign $\Delta_1^{(2)}$ = sign $\Delta_2^{(2)}$ = sign $\Delta^{(2)} = (-1)^1 = -1$. Nous supposons que cette affirmation est vraie pour n et nous le montrerons pour $n+1$. A cette fin nous considérerons les déterminants $\Delta_i^{(n+1)}$, $i = 1, 2, \dots, n+1$.

$$\Delta_i^{(n+1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1i-1} & 1 & a_{1i+1} & \dots a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2i-1} & 1 & a_{2i-1} & \dots a_{2n+1} \\ \dots & & & & & \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots a_{i-1i-1} & 1 & a_{i-1i+1} & \dots a_{i-1n+1} \\ \dots & & & & & \\ a_{n+11} & a_{n+12} & \dots a_{n+1i-1} & 1 & a_{n+1i-1} & \dots a_{n+1n+1} \end{vmatrix}$$

Déduisons la ligne $i-1$ de toutes les autres lignes. On remarque que l'on obtient zéro sur la colonne i sauf l'élément de la ligne $i-1$ qui est égal à 1. Donc $\Delta_i^{(n+1)} = (-1)^{2i-1} D = (-1)\, D$, où D est le déterminant ci-dessous :

(3) $$D = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & & & \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{vmatrix}; \quad \lambda_{kj} = a_{kj} - a_{i-1j}$$

$k = 1, 2, \dots, i-2, i, i+1, \dots, n+1$

$j = 1, 2, \dots, i-1, \ i+1, \dots, n+1$

Etant donné que a_{kj} respecte les conditions (2) et que a_{i-1j} est constant sur une colonne quand k varie, on voit que λ_{kj} respecte la condition (2) b, a_{i-1j} étant positif conformément à la condition (2) a. Les éléments λ_{kj} ne respectent pas la condition (2) a. On remarque toutefois aisément que la ligne $i-1$ du déterminant D, notamment $\lambda_{i-11}, \lambda_{i-12}, \dots, \lambda_{i-1i-1} \dots \lambda_{i-1n}$ est composée entièrement d'éléments positifs, parce que

$$\begin{aligned} \lambda_{i-11} &= a_{i1} - a_{i-11} \\ \lambda_{i-12} &= a_{i2} - a_{i-12} \\ &\dots \\ \lambda_{i-1i+1} &= a_{ii+1} - a_{i-1i+1} \\ &\dots \\ \lambda_{i-1n} &= a_{in} - a_{i-1n} \end{aligned}$$

conformément à (3).

Conformément aux conditions (2) nous avons

$$\begin{aligned} a_{i1} &> a_{i-11} \\ a_{i2} &> a_{i-12} \\ &\dots \\ a_{ii+1} &> a_{i-1i+1} \\ &\dots \\ a_{in} &> a_{i-1n} \end{aligned}$$

On observe que sur la diagonale principale du déterminant D nous aurons, tout comme dans le cas des conditions (2), les éléments les plus petits.

Vu que la ligne $i-1$ du déterminant D est formée d'éléments positifs, on peut trouver un $k > 0$ suffisamment grand, tel que, en multipliant cette ligne par k et en l'additionnant à toutes les autres lignes du déterminant D, tous les éléments du déterminant D deviennent positifs.

De la sorte le déterminant D a les éléments positifs, la condition (2) b demeurant respectée. Alors, conformément à l'hypothèse sign $D = (-1)^{n-1}$, donc sign $\Delta_i^{(n+1)} = (-1)(-1)^{n-1} = (-1)^n$, $i = 1, 2, \dots, n+1$.

Pour montrer que sign $\Delta^{(n+1)} = (-1)^n$, nous utiliserons également l'hypothèse de l'induction :

Supposons que $(-1)^n\, \Delta^{(n+1)} < 0$. Si on considère alors $\Delta^{(n+1)}$ le déterminant d'un système de la forme (1) avec $n+1$ inconnues et $n+1$ conditions, celui-ci admet les solutions $x_i = \dfrac{\Delta_i^{(n+1)}}{\Delta^{(n+1)}}$, $i = 1, 2, \dots, n+1$.

Du fait que sign $\Delta_i^{(n+1)} = (-1)^n$, il résulte que $x_i < 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n+1$, ce qui contredit le sytème considéré dans les conditions (2).

Montrons que $\Delta^{(n+1)}$ ne peut pas être nul.

A cet effet, nous donnerons une petite variation à a_{11}, de façon que les hypothèses (2) se maintiennent et nous supposerons que $\Delta^{(n+1)} = 0$.

Le déterminant nouvellement obtenu par le changement de a_{11} en $a'_{11} = a_{11} + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ suffisamment petit est $\Delta'^{(n+1)} = \Delta^{(n+1)} + \varepsilon\,\Delta^{(n)}$ où $\Delta^{(n)}$ est le déterminant obtenu par la suppression de la première ligne et de la première colonne du déterminant $\Delta^{(n+1)}$. Donc $\Delta^{(n)}$ vérifie les conditions (2). sign $\Delta^{(n)} = (-1)^{n-1}$, $\Delta^{(n+1)} = 0$, donc sign $\Delta'^{(n+1)} = (-1)^{n-1}$, ce qui est en contradiction avec la démonstration ci-dessus.

Nous aurons donc $(-1)^n\,\Delta^{(n+1)} > 0$. En conséquence, en revenant au système (1), nous avons $x_i = \dfrac{\Delta_i^{(n)}}{\Delta^{(n)}} > 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, ce qui démontre complètement le théorème.

Observations. 1° Le théorème démontré a également lieu si on remplace la condition (2) b par (2) b':

(2) b' $$a_{ii} > a_{i+1i} > \ldots > a_{ni} > a_{1i} > \ldots > a_{i-1i}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

La démonstration de cette observation se réduit au théorème précédent par des changements de lignes et de colonnes.

2° Supposons que nous avons un système de m équations avec n inconnues $(m < n)$:

(4) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j = 1,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

On peut montrer que s'il existe un déterminant dans la matrice des coefficients du système (4) d'ordre m, tel que soient vérifiées pour ce déterminant les conditions (2), alors il existe une solution positive du système (2).

Pour démontrer cette affirmation, nous résolvons le système en rapport avec les inconnues des colonnes qui entrent dans le déterminant choisi. Alors $x_i = \dfrac{\Delta_i^{(m)}}{\Delta^{(m)}}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Mais $\Delta_i^{(m)}$ sont des fonctions linéaires, donc continues de $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$, par conséquent x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ sont des fonctions linéaires, donc continues de $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$, $x_i = f_i(x_{m+1}, \ldots, x_n)$; $i = 1, 2, \ldots, m$. Dans le point $x_i = 0$; $i = m+1$, $m+2, \ldots, n$ on sait que $x_i > 0$; $i = 1, 2, \ldots, m$ du théorème démontré.

Alors il existe un système de voisinages des variables $x_{m+1}, \ldots, x_n$, $V_i^{(j)}$ tel que $x_1 > 0$ dans $V_1 = \bigcap_{j=1}^{n} V_1^{(j)}$, $x_2 > 0$ dans $V_2 = \bigcap_{j=1}^{n} V_2^{(j)}, \ldots$ $x_m > 0$ dans $V_m = \bigcap_{j=1}^{n} V_m^{(j)}$. Il en résulte que $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ dans $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ quel que soit $x_{m+1}, \ldots, x_n$ dans les voisinages choisis plus haut. Nous pourrons donc choisir une système de x_j, $j = m+1, \ldots, n$, nombres positifs, tel que $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ pour ces nombres. De la sorte, l'observation 2 est complètement démontrée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Черников С. Н., *Положительные и отрицательные решения систем линейных неравенств*. Докл. АН. СССР, **99**, № 6, 913—916 (1954).

[2] — *Положительные и отрицательные решения систем линейных неравенств*. Матем. сборник, **38**, № 4, 479—508 (1956).

[3] — *О строго ненулевых решениях систем линейных уравнений*. Успехи матем. наук, **11**, № 2, 223—228 (1956).

Reçu le 30. X. 1961.