MATHEMATICA VOL. 4 (27), 1, 1962, pp. 71 – 76

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES MATRICES COMPLÈTEMENT PONDÉRÉES ET COMPLÈTEMENT MIXTES

par

ALEXANDRU B. NÉMETH

à Cluj

Dans la théorie des jeux les matrices complètement mixtes jouent un rôle important, parce que, dans ce cas, sont valables nombre de propriétés simples et que beaucoup de jeux pratiques sont de la même nature. Les propriétés des matrices complètement mixtes ont été déduites de la théorie générale de la représentation des solutions optima extrêmes. Dans le présent travail, nous donnons des démonstrations plus simples à ces propriétés, sans utiliser la théorie générale.

Nous avons introduit aussi la notion de matrice complètement pondérée (c.p.), qui généralise les matrices complètement mixtes (c. m.). Pour ces matrices nous avons établi le Théorème 4.

Rappelons les définitions et les propriétés dont nous userons dans le travail.

Déf. 1 Une matrice de jeux **A** est dite c.m. si pour toutes les stratégies optima **x** et **y** on a $x_i > 0$ pour tous les i et $y_j > 0$ pour tous les j.

Déf. 2 Une matrice de jeux **A** est dite c. p. si pour toute ligne i et colonne j on trouve une stratégie optima $\mathbf{x}^{(i)}$ et $\mathbf{y}^{(j)}$, telle que $x_i^{(i)} > 0$ et $y_j^{(j)} > 0$.

Déf. 3 La stratégie **x** de la matrice **A** est dite complètement pondérée si $x_i > 0$ pour tous les i.

1. Toute combinaison convexe des stratégies optima est une stratégie optima.

2. La matrice de jeux **A**′ obtenue de la matrice **A**, en ajoutant a aux éléments de **A**, a les mêmes stratégies optima que **A**, et sa valeur est $v' = v + a$, où v est la valeur de **A**.

3. Si pour une stratégie optima $\mathbf{x}$ de la matrice $\mathbf{A}$ nous avons $x_{i_0} > 0$, alors

$$(\mathbf{A}\mathbf{y})_{i_0} = v$$

pour toute stratégie optima $\mathbf{y}$ (où v est la valeur du jeu).

4. Si $\mathbf{A}$ est une matrice c. p., pour n'importe quelle paire de stratégies optima $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ on a

$$\mathbf{x}\,\mathbf{A} = \mathbf{v}\,; \quad \mathbf{A}\,\mathbf{y} = \mathbf{v}$$

où $\mathbf{v}$ est le vecteur ligne, colonne respectivement, ayant tous les éléments égaux à la valeur du jeu.

La démonstration de cette proposition résulte aussitôt de la définition des matrices c. p. et de la proposition 3.

5. Toute matrice $\mathbf{A}$ c. p. a des stratégies optima complètement pondérées.

Démonstration Nous considérons la matrice c. p. $\mathbf{A}$ d'ordre $m \times n$. De la définition de la matrice c. p. il s'ensuit que pour n'importe quelle ligne i et colonne j de $\mathbf{A}$ on trouve une stratégie optima $\mathbf{x}^{(i)}$ respectivement $\mathbf{y}^{(j)}$, telle que $x_i^{(i)} > 0$, $y_j^{(j)} > 0$. Nous notons la combinaison convexe des stratégies de ce type (où $\lambda_i > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ et $\mu_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$) par $\mathbf{x}^0$ respectivement $\mathbf{y}^0$

$$\mathbf{x}^0 = \lambda_1 \mathbf{x}^{(1)} + \lambda_2 \mathbf{x}^{(2)} + \ldots + \lambda_m \mathbf{x}^{(m)}\,;$$

$$\mathbf{y}^0 = \mu_1 \mathbf{y}^{(1)} + \mu_2 \mathbf{y}^{(2)} + \ldots + \mu_n \mathbf{y}^{(n)}$$

Ces stratégies sont optima et complètement pondérées.

THÉOREME 1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la matrice* c. p. $\mathbf{A}$ *soit* c. m. *est que les stratégies optima* c. p. *soient uniques.*

Nous démontrons que la condition est nécessaire, c'est-à-dire que si $\mathbf{A}$ est c. m. alors il a des stratégies optima uniques.

Supposons le contraire : les stratégies optima de $\mathbf{A}$ ne sont pas uniques. Soient $\mathbf{x}^1$ et $\mathbf{x}^1$ deux stratégies optima différentes de $\mathbf{A}$. Nous construisons le vecteur $\mathbf{x}^0$ de la façon suivante :

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^1 + \varepsilon\,(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2)$$

Nous montrerons que l'on peut choisir ε tel que

$$x_i^0 \geqq 0 \text{ et } x_{i_0}^0 = 0$$

au moins pour un i_0.

Soit $I = \{i \,|\, x_i^1 - x_i^2 < 0\}$ (I est évidemment non vide parce que $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$); nous choisissons i_0 tel que $\frac{x_{i_0}^2}{x_{i_0}^1} = \max\limits_{i \in I} \frac{x_i^2}{x_i^1}$ soit maintenant $\varepsilon = -\frac{x_{i_0}^1}{x_{i_0}^1 - x_{i_0}^2}$ $x_{i_0}^0 = x_{i_0}^1 + \varepsilon(x_{i_0}^1 - x_{i_0}^2) = 0$ Il nous reste à montrer que

$$x_i^0 = x_i^1 + \varepsilon(x_i^1 - x_i^2) \geqq 0$$

pour tous les i. Etant $\varepsilon > 0$ pour $i \overline{\in} I$ nous avons l'inégalité. Il faut la vérifier seulement pour $i \in I$. En vertu du choix de i_0 nous avons pour tout $i \in I$

$$0 \leqq \left(\frac{x_{i_0}^2}{x_{i_0}^1} - \frac{x_i^2}{x_i^1}\right) x_i^1 = \left(\frac{x_{i_0}^2}{x_{i_0}^1} - \frac{x_{i_0}^1}{x_{i_0}^1}\right) x_i^1 + x_i^1 - x_i^2 = \frac{1}{\varepsilon}\, x_i^1 + x_i^1 - x_i^2$$

de là

$$x_i^1 + \varepsilon(x_i^1 - x_i^2) \geqq 0$$

On remarque que $\mathbf{x}^0$ est une stratégie. En effet $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^0 = 1$ plus

$$\mathbf{x}^0\mathbf{A} = \mathbf{x}^1\mathbf{A} + \varepsilon(\mathbf{x}^1\mathbf{A} - \mathbf{x}^2\mathbf{A}) = V$$

d'où il s'ensuit que $\mathbf{x}^0$. est une stratégie optima.

Nous avons donc trouvé une stratégie optima $\mathbf{x}^0$ pour $\mathbf{A}$ telle que $x_{i_0}^0 = 0$. Nous sommes entrés en contradiction avec la supposition que $\mathbf{A}$ est une matrice c. m., et la nécessité est démontrée.

Pour démontrer la suffisance de la condition, il faut montrer que, du fait que les stratégies optima c. p. sont uniques, il s'ensuit que $\mathbf{A}$ est c.m.

Supposons le contraire : $\mathbf{A}$ n'est pas c.m. Alors il a au moins une stratégie $\mathbf{x}^{(i)}$ telle que $x_i^{(i)} = 0$. Si $\mathbf{x}^0$ est une stratégie c. p., alors il est évident que $\mathbf{x}^1 = \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^0 + \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^{(i)}$ est également une stratégie c. p. et qu'elle diffère de $\mathbf{x}^0$. Donc, supposant que $\mathbf{A}$ n'est pas c. m., nous sommes entrés en contradiction avec le fait que les stratégies c. p. sont uniques. Le théorème est entièrement démontré.

THÉORÈME 2. *Toute matrice* c. m. $\mathbf{A}$ *à valeur différente de zéro est non singulière.*

D é m o n s t r a t i o n : Soit la valeur du jeu c. m. $\mathbf{A}, v \neq 0$, alors nous montrerons que les systèmes

(1) $$\mathbf{x}\mathbf{A} = \mathbf{v}$$

(2) $$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{v}$$

admettent une solution unique. On sait que les stratégies optima $\mathbf{x}^0$ et $\mathbf{y}^0$ sont des solutions de ces systèmes. Nous montrerons qu'elles sont les solutions uniques. Supposons le contraire : $\mathbf{u}$ est différent de $\mathbf{x}^0$ et satisfait au système (1)

$$\mathbf{u}A = \mathbf{v}$$

$$v \sum_{i=1}^{m} u_i = \mathbf{u}(A\mathbf{y}^0) = (\mathbf{u}A)\mathbf{y}^0 = v$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = 1$$

Construisons le vecteur $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \varepsilon(\mathbf{x}^0 - \mathbf{u})$ étant $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{u}$ pour tout $\varepsilon \neq 0$ $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$. On choisit ε si petit (et différent de zéro) que $x_i^1 \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, $\sum_{i=1}^{m} x_i^1 = 1$, donc $\mathbf{x}^1$ est une stratégie

$$\mathbf{x}^1 A = \mathbf{x}^0 A + \varepsilon(\mathbf{x}^0 A - \mathbf{u}A) = \mathbf{x}^0 A = \mathbf{v}$$

donc $\mathbf{x}^1$ est une stratégie optima. En même temps $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$. Nous avons deux stratégies optima différentes, ce qui contredit la supposition que A est c.m. Donc le système (1) a une solution unique. On peut montrer de manière analogue que (2) a également une solution unique. Il en résulte que A est non singulier.

THÉORÈME 3. *Toute matrice* c. m. *est quadratique.*

D é m o n s t r a t i o n : Nous considérons la matrice c. m. A. Si la valeur du jeu avec la matrice est différente de zéro ($v \neq 0$), le théorème est démontre ; si la valeur du jeu est zéro ($v = 0$), on construit la matrice A' en additionnant à chaque élément de la matrice A un nombre a différent de zéro. Une telle matrice a les mêmes stratégies optima que A (donc les stratégies optima uniques $\mathbf{x}^0$ et $\mathbf{y}^0$) et elle a la valeur $v' = a$ différente de zéro. La matrice A' est donc une matrice de jeux c. m. avec la valeur différente de zéro. Il résulte du théorème 2 qu' elle est non singulière, et ainsi elle est aussi quadratique. De la construction de A' il ressort que A est également quadratique. Pendant la démonstration du théorème nous avons démontré aussi le fait qu'une matrice de jeux c. m. ayant la valeur zéro, lorsqu'on ajoute à chacun de ses éléments un nombre différent de zéro, elle devient une matrice non singulière.

THÉORÈME 4. *La condition nécessaire et suffisante pour que la matrice* A *soit* c. p. *est que l'un des systèmes d'équations linéaires*

(3)
$$\begin{cases} \mathbf{x}A = \mathbf{o} \\ A\mathbf{y} = \mathbf{o} \end{cases}$$

ou

(4)
$$\begin{cases} \mathbf{x}A = \mathbf{1} \\ A\mathbf{y} = \mathbf{1} \end{cases}$$

ait une solution strictement différente de zéro, avec toutes les composantes du même signe (où $\mathbf{1}$ est le vecteur de ligne, respectivement de colonne, avec toutes les composantes égales à 1).

D é m o n s t r a t i o n Si A est c. p., on a pour toute paire de stratégies optima $\mathbf{x}^0$ et $\mathbf{y}^0$

$$\mathbf{x}^0 A = \mathbf{v}$$

$$A\mathbf{y}^0 = \mathbf{v}$$

Étant une matrice c. p., A a des stratégies optima c. p. même si celles-ci sont $\mathbf{x}^0$ et $\mathbf{y}^0$. Si $v = 0$, le système (3) a une solution strictement positive. Si $v \neq 0$, alors $\frac{1}{v}\mathbf{x}^0$ et $\frac{1}{v}\mathbf{y}^0$ sont des solutions strictement différentes de zéro, avec les composantes du même signe du système (4).

Supposons que le système (3) ou (4) a une solution strictement différente de zéro avec les composantes du même signe. Soit cette solution $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$. Nous mettons

$$\mathbf{x}^0 = \frac{\mathbf{x}^*}{\sum_{i=1}^{m} x_i^*}\,; \quad \mathbf{y}^0 = \frac{\mathbf{y}^*}{\sum_{j=1}^{n} y_j^*}$$

Nous montrons que $\mathbf{x}^0$ et $\mathbf{y}^0$ sont des stratégies optima pour A. On remarque tout d'abord que $\sum_{i=1}^{m} x_i^0 = \sum_{j=1}^{n} y_j^0 = 1$, $x_i^0 > 0$, $y_j^0 > 0$ $(i = 1, \ldots, m\,; j = 1, \ldots n)$

Nous avons
$$\begin{matrix} \mathbf{x}^0 A = \mathbf{o} \\ A\mathbf{y}^0 = \mathbf{o} \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} \mathbf{x}^0 A = \dfrac{\mathbf{1}}{\sum_{i=1}^{m} x_i^*} \\ A\mathbf{y}^0 = \dfrac{\mathbf{1}}{\sum_{j=1}^{n} y_j^*} \end{matrix}$$

Dans le premier cas, pour les stratégies arbitraires $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ nous avons :

$$\mathbf{x}^0 A\mathbf{y} = 0 = \mathbf{x}A\mathbf{y}^0$$

donc $\mathbf{x}^0$ et $\mathbf{y}^0$ sont des stratégies optima pour A.

Dans le second cas nous avons $\mathbf{x}^*A = 1$, $A\mathbf{y}^* = 1$, donc $\mathbf{x}^* A\, \mathbf{y}^* = \sum_{i=1}^{m} x_i^*$, $\mathbf{x}^* A\mathbf{y}^* = \sum_{j=1}^{n} y_j^*$; par conséquent $\sum_{i=1}^{m} x_i^* = \sum_{j=1}^{n} y_j^* = \frac{1}{v}$. Pour les stratégies arbitraires $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ nous avons $\mathbf{x}^0 A\mathbf{y} = v = \mathbf{x} A\mathbf{y}^0$ donc $\mathbf{x}^0$ et $\mathbf{y}^0$ sont des stratégies optima pour A. Tenant compte que $\mathbf{x}^0$ et $\mathbf{y}^0$ sont en même temps des stratégies complètement pondérées, le Théorème 4 est démontré.

R e m a r q u e. Si aux conditions du théorème nous ajoutons pour que dans le cas du système (3) les solutions de ce genre soient toutes proportionnelles et que, dans le cas du système (4) elles soient uniques, alors le théorème est vrai pour les matrices c. m.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K a r l i n S. *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics* Pergamon Press London-Paris 1959, vol. I. cap. 1–4

[2] K a p l a n s k y *Contribution to von Neumann's Theory of Games* Ann. Math 46 474–79 (1945).

[3] K u h n H. W. and T u c k e r A. W. *Contribution to the Theory of Games* Ann. Math. Studies vol. [illegible] Princeton University Press 1956.

[4] N e u m a n n J., V o n and M o r g e n s t e r n, O. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, 1947.

Reçu le 22. X. 1961.

MATHEMATICA VOL. 4 (27), 1, 1962, pp. 77–105

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA RAPIDITÉ DE CONVERGENCE DES SÉRIES À TERMES POSITIFS

par

ANDRÉ NEY

à Cluj

Le but du présent article est de montrer, que le critérium de Kummer-Jensen est un instrument utile pour l'étude de la rapidité de convergence des séries à termes positifs. À l'aide de ce critérium on peut effectuer une certaine classification des séries d'après leur rapidité de convergence et on peut construire une méthode unitaire, par laquelle on détermine le domaine d' applicabilité des différents critériums de convergence, qui dérivent de celui de Kummer.

§ 1.

Quelques observations au sujet du critérium de Kummer

1. Soit

$$S = \sum_{1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \tag{1}$$

une série convergente à termes positifs, pour laquelle on définit la somme partielle

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \tag{2}$$

et le reste

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots \tag{3}$$