

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Никольский С. М., О равномерных дифференциальных свойствах аналитической функции в полосе. *Mathematica*, 2 (25), 1, 149—157 (1960).
- [2] Walsh I. L., *Interpretation and approximation by rational functions in the complex domain*. Amer. Soc. Colloq. Publ., XX (1956).
- [3] Ахизер Н. И., *Лекции по теории аппроксимации*, М. Л., 1947.
- [4] Никольский С. М., *Неравенства для целых функций ...*, Труды мат. ин-та В. А. Стеклова, т. 38.
- [5] Зигмунд А., *Тригонометрические ряды*, М. Л., 1939.

Поступило 20. VI. 1961.

CARACTÉRISATION DE L'ENSEMBLE DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES HOMOGÈNES À COEFFICIENTS CONSTANTS D'ORDRE DONNÉ

par

F. RADÓ

à Cluj

1. Soit $\mathcal{L}_n$ la classe des fonctions réelles $y = f(x)$, définies sur l'axe réel, qui satisfont à une équation différentielle de la forme

$$(1.1) \quad y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \dots + A_n y = 0,$$

où $A_1, \dots, A_n$ sont des constantes réelles arbitraires. On sait que les fonctions de $\mathcal{L}_n$ sont des fonctions entières. Le but de ce travail est la caractérisation de la classe $\mathcal{L}_n$ par des propriétés en termes finis.

On montre aisément que pour tout $f(x) \in \mathcal{L}_n$ il y a une formule d'addition

$$(1.2) \quad f(x+y) = \varphi_1(x) \psi_1(y) + \varphi_2(x) \psi_2(y) + \dots + \varphi_n(x) \psi_n(y),$$

$\varphi_i, \psi_i, i = 1, \dots, n$, étant des fonctions entières, qui dépendent évidemment de f . Le second membre dans (1.2) est un quasi-polynôme. Les conditions pour qu'une fonction à deux variables soit un quasi-polynôme ont été données par T. POPOVICIU [8]. On montre de même aisément que $f(x) \in \mathcal{L}_n$ vérifie une relation de la forme

$$(1.3) \quad a_0(h) f(x+nh) + a_1(h) f(x+n-1h) + \dots + a_n(h) f(x) = 0,$$

les $a_i(h), i = 0, 1, \dots, n$, étant des fonctions entières (qui dépendent de f) et $a_0(h) \neq 0$. Les zéros des fonctions entières n'ont aucun point d'accumulation à distance finie, donc il existe un intervalle $(0, H)$ dans lequel $a_0(h) \neq 0$.

Nous montrerons que les propriétés (1.2) et (1.3) respectivement, supposées pour des fonctions continues, entraînent $f(x) \in \mathcal{L}_n$. Autrement dit, nous résoudrons les équations fonctionnelles (1.2) et (1.3) pour les fonctions continues, en supposant que toutes les fonctions qui y interviennent soient des fonctions inconnues; nous établirons que les fonctions f de l'ensemble des solutions forment la classe $\mathcal{L}_n$. Pour l'équation (1.3) il sera supposé que $a_0(h) \neq 0$ dans un certain intervalle $(0, H)$.

L'équation fonctionnelle (1.2) a été étudiée par C. STÉPHANOS [12], T. LEVI-CIVITA [6] et P. STÄCKEL [10], [11]. En ce qui concerne les démonstrations données par C. STÉPHANOS et T. LEVI-CIVITA nous pouvons faire l'observation qu'ils utilisaient l'affirmation inexacte que „l'annulation identique du wronskien entraîne la dépendance linéaire des fonctions considérées”. Dans le référent [11], P. STÄCKEL esquisse le raisonnement suivant pour résoudre l'équation (1.2): Les fonctions de la variable x $f(x+y)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ sont linéairement dépendantes, donc leur wronskien est identiquement nul; en substituant dans ce wronskien $x=0$, on obtient pour $f(y)$ une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants. Nous observons qu'il n'a pas démontré qu'il y a au moins un coefficient différent de zéro dans l'équation obtenue. Par la démonstration correcte de P. STÄCKEL [10] pour la classe des fonctions une fois dérivables, on aboutit à un système des équations différentielles linéaires à coefficients constants et pour cette raison là nous considérons que la méthode donnée dans notre travail est plus directe pour ce cas.

I. FENYŐ a considéré l'équation (1.2) pour les distributions [1], mais la solution donnée se réfère pour le cas des distributions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ „linéairement indépendants” dans le sens de l'auteur. Il n'a pas démontré, et il semble assez difficile de montrer, qu'un système de n fonctions continues linéairement indépendant dans le sens ordinaire est aussi linéairement indépendant dans le sens de l'auteur. Ainsi le résultat de I. FENYŐ n'achève pas la résolution de l'équation fonctionnelle (1.2) pour les fonctions continues.

Le problème de caractériser la classe $\mathcal{L}_n$ par l'équation fonctionnelle (1.3), appliquée aux fonctions continues, a été posé par T. POPOVICIU.

La méthode utilisée dans ce travail pour l'équation (1.2) et même pour (1.3) dans le cas particulier des fonctions $a_i(h)$, $i=0, \dots, n$, une fois dérivables, est fondée sur l'idée de KAC, qui a résolu dans [5] l'équation fonctionnelle de Cauchy pour les fonctions intégrables, en montrant par une intégration que les solutions sont nécessairement des fonctions dérivables. La résolution de l'équation (1.3) sans aucune restriction de dérivabilité est basée sur le lemme du no. 4.

Une autre propriété des fonctions de la classe $\mathcal{L}_n$ est

$$(1.4) \quad \begin{vmatrix} f(x) & f(x+h) & \dots & f(x+nh) \\ f(x+h) & f(x+2h) & \dots & f(x+(n+1)h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x+nh) & f(x+(n+1)h) & \dots & f(x+2nh) \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation fonctionnelle a été résolue pour les fonctions n fois dérivables par D. V. IONESCU [3] et par I. STAMATE [9]. Pour les fonctions continues elle a été résolue dans le cas $n=2$ par D. V. IONESCU [4] et récemment N. GHIRCOIAȘIU et H. ROȘCĂU ont démontré [2] que si la fonction continue f vérifie l'équation (1.4), alors elle vérifie une équation de la forme (1.3). Ainsi la résolution de l'équation (1.4) est ramenée à celle de (1.3).

2. Nous démontrons d'abord le

THÉORÈME 1. *L'ensemble des fonctions réelles continues $f(x)$, qui vérifient l'équation (1.2) ensemble avec des fonctions continues φ_i et ψ_i , $i=1, 2, \dots, n$, pour x et y nombres réels quelconques, coïncide avec la classe $\mathcal{L}_n$.*

Soit $f(x) \in \mathcal{L}_n$; $f(x)$ est une intégrale d'une équation différentielle (1.1). On voit tout de suite que $f(x+a)$, où a est une constante, vérifie la même équation. En notant par $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ un système fondamental de solutions de l'équation linéaire homogène (1.1), on a

$$f(x+a) = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \dots + C_n \varphi_n(x),$$

donc

$$(2.1) \quad f(x+y) = \psi_1(y) \varphi_1(x) + \varphi_2(y) \varphi_2(x) + \dots + \psi_n(y) \varphi_n(x).$$

Les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ étant linéairement indépendantes, il existe les points $x_1, \dots, x_n$ [8], tels que

$$|\varphi_j(x_i)| \neq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

En remplaçant dans (2.1) x successivement par $x_1, \dots, x_n$ on obtient un système de n équations linéaires avec les inconnues $\psi_1(y), \dots, \psi_n(y)$ ayant le déterminant différent de zéro. Les formules de Cramer expriment chaque fonction $\psi_j(y)$ comme une combinaison linéaire des fonctions entières $f(x_1+y), \dots, f(x_n+y)$; donc $\psi_1, \dots, \psi_n$ sont des fonctions entières. Ainsi chaque $f(x) \in \mathcal{L}_n$ vérifie l'équation (1.2) ensemble avec des fonctions continues φ_i et ψ_i .

Supposons maintenant que les fonctions continues f, φ_i, ψ_i , $i=1, \dots, n$, vérifient l'équation (1.2) pour x et y nombres réels quelconques. Nous démontrons que alors $f(x) \in \mathcal{L}_n$.

On peut admettre que les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont linéairement indépendantes. En effet, supposons qu'on ait démontré déjà $f(x) \in \mathcal{L}_n$ dans ce cas. L'autre cas, dans lequel $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont linéairement dépendantes, revient à ceci avec moins de termes dans le second membre de l'équation (1.2); donc $f(x) \in \mathcal{L}_{n'}$ où $n' < n$. Mais alors $f(x) \in \mathcal{L}_n$. Nous pouvons admettre de même que les fonctions $\psi_1, \dots, \psi_n$ sont linéairement indépendantes.

donc

$$\begin{vmatrix} f(x) & \varphi_1(0) & \dots & \varphi_n(0) \\ f(x+h) & \varphi_1(h) & \dots & \varphi_n(h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(x+nh) & \varphi_1(nh) & \dots & \varphi_n(nh) \end{vmatrix} = 0$$

et en développant ce déterminant suivant la première colonne, on obtient

$$a_0(h)f(x+nh) + a_1(h)f(x+\overline{n-1}h) + \dots + a_n(h)f(x) = 0.$$

La fonction $a_0(h)$ est

$$a_0(h) = \begin{vmatrix} \varphi_1(0) & \dots & \varphi_n(0) \\ \varphi_1(h) & \dots & \varphi_n(h) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(\overline{n-1}h) & \dots & \varphi_n(\overline{n-1}h) \end{vmatrix} =$$

$$= h^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} \varphi_1(0) & \dots & \varphi_n(0) \\ \frac{1}{h}\Delta\varphi_1(0) & \dots & \frac{1}{h}\Delta\varphi_n(0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{h^{n-1}}\Delta^{n-1}\varphi_1(0) & \dots & \frac{1}{h^{n-1}}\Delta^{n-1}\varphi_n(0) \end{vmatrix},$$

donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_0(h)}{h^{\frac{n(n-1)}{2}}} = W(\varphi_1, \dots, \varphi_n|0) \neq 0.$$

Il s'ensuit qu'il y a un intervalle $(0, H)$ dans lequel $a_0(h) \neq 0$. Ainsi nous avons démontré que toute fonction $f(x) \in \mathcal{L}_n$ vérifie une équation de la forme (1.3) ensemble avec des fonctions continues (même entières) $a_i(h)$, $i = 0, 1, \dots, n$ et $a_0(h) \neq 0$ dans un certain intervalle $(0, H)$.

Supposons maintenant que l'équation (1.3) ait lieu pour $x \in (-\infty, \infty)$ et $h \in (0, H)$, la fonction $f(x)$ soit continue sur l'axe réel, les fonctions $a_0(h), \dots, a_n(h)$ admettent des dérivées continues de premier ordre dans $(0, H)$ et $a_0(h) \neq 0$ pour $0 < h < H$. Nous démontrerons que $f(x) \in \mathcal{L}_n$.

On peut admettre que $a_n(h) \neq 0$ dans $(0, H)$, car au cas contraire on a une équation de la même forme avec moins de termes, qui satisfait à cette condition. Alors il existe $h_0 \in (0, H)$ ainsi que

$$A = - \int_0^{h_0} a_n(h) dh \neq 0.$$

Nous intégrons l'égalité (1.3) entre les limites 0 et h_0

$$(3.1) \quad Af(x) = \sum_{n=1}^n \int_0^{h_0} a_{n-i}(h) f(x+ih) dh.$$

On a

$$F_i(x) = \int_0^{h_0} a_{n-i}(h) f(x+ih) dh = \frac{1}{i} \int_x^{x+ih_0} a_{n-i} \left(\frac{u-x}{i} \right) f(u) du, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Si la fonction f admet la dérivée d'ordre r continue, $F_i(x)$ a la dérivée

$$F_i'(x) = -\frac{1}{i^2} \int_x^{x+ih_0} a_{n-i}' \left(\frac{u-x}{i} \right) f(u) du + \frac{1}{i} a_{n-i}(h_0) f(x+ih_0) - \frac{1}{i} a_{n-i}(0) f(x) =$$

$$= -\frac{1}{i} \int_0^{h_0} a_{n-i}'(h) f(x+ih) dh + \frac{1}{i} a_{n-i}(h_0) f(x+ih_0) - \frac{1}{i} a_{n-i}(0) f(x),$$

qui à son tour admet la dérivée d'ordre r continue. Ainsi les fonctions $F_i(x)$ ont des dérivées d'ordre $r+1$ continues. On déduit de (3.1) que $f(x)$ admet la dérivée d'ordre $r+1$ continue. Il résulte par induction que la fonction $f(x)$ est indéfiniment dérivable.

On déduit de (1.3)

$$(3.2) \quad a_0(h) f(x_i+nh) + a_1(h) f(x_i+\overline{n-1}h) + \dots + a_n(h) f(x_i) = 0,$$

$$i = 1, \dots, n+1,$$

$x_0, x_1, \dots, x_n$ étant des nombres réels quelconques. Le système d'équations homogènes (3.2) admet pour $h \in (0, H)$ une solution non nulle $a_0(h), \dots, a_n(h)$, donc on a

$$\begin{vmatrix} f(x_1+nh) & \dots & f(x_1+h) & f(x_1) \\ f(x_2+nh) & \dots & f(x_2+h) & f(x_2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f(x_{n+1}+nh) & \dots & f(x_{n+1}+h) & f(x_{n+1}) \end{vmatrix} = 0$$

pour $h \in (0, H)$ et $x_i \in (-\infty, \infty)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, ou

$$\begin{vmatrix} \frac{\Delta^n f(x_1)}{h^n} & \dots & \frac{\Delta f(x_1)}{h} & f(x_1) \\ \frac{\Delta^n f(x_2)}{h^n} & \dots & \frac{\Delta f(x_2)}{h} & f(x_2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta^n f(x_{n+1})}{h^n} & \dots & \frac{\Delta f(x_{n+1})}{h} & f(x_{n+1}) \end{vmatrix} = 0.$$

En faisant $h \rightarrow 0$, on obtient

$$(3.3) \quad \begin{vmatrix} f^{(n)}(x_1) & \dots & f'(x_1) & f(x_1) \\ f^{(n)}(x_2) & \dots & f'(x_2) & f(x_2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x_{n+1}) & \dots & f'(x_{n+1}) & f(x_{n+1}) \end{vmatrix} = 0$$

pour les nombres réels $x_1, \dots, x_{n+1}$ quelconques. Il s'ensuit que les fonctions $f^{(n)}, \dots, f', f$ sont linéairement dépendantes [8], donc $f(x) \in \mathcal{L}_n$.

4. Pour la démonstration du théorème 2, sans la restriction de la dérivabilité pour les coefficients $a_i(h)$, nous avons besoin du lemme suivant :

L e m m e. Soient $r_1, r_2, \dots, r_s$ des nombres complexes distincts et différents de zéro, $P_k(x)$, $k=1, 2, \dots, s$, des polynômes sur le corps des nombres complexes, de degrés $p_k - 1$ et $n = \sum_{k=1}^s p_k$. Les relations

$$(4.1) \quad \sum_{k=1}^s r_k^m P_k(m) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1$$

entraînent

$$(4.2) \quad P_k(x) \equiv 0, \quad k=1, 2, \dots, s.$$

En effet, on écrit le polynôme $P_k(x)$ sous la forme $P_k(x) = a_{k0} + \frac{a_{k1}}{r_k} x + \frac{a_{k2}}{r_k^2} x(x-1) + \dots + \frac{a_{k, p_k-1}}{r_k^{p_k-1}} x(x-1) \dots (x-p_k+2)$; les relations (4.1) deviennent

$$\sum_{k=1}^s r_k^m a_{k0} + m r_k^{m-1} a_{k1} + m(m-1) r_k^{m-2} a_{k2} + \dots +$$

$$+ m(m-1) \dots (m-p_k+2) r_k^{m-p_k+1} a_{k, p_k-1} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

On a abouti à un système de n équations linéaires et homogènes à n inconnues a_{kj} . Puisque le déterminant de ce système est différent de zéro, il résulte le lemme.

5. Nous démontrerons le théorème 2 dans le cas général.

Soit $f(x)$ une fonction réelle continue pour $-\infty < x < \infty$, non identiquement nulle, $a_0(h) \neq 0$, $a_1(h), \dots, a_n(h)$ des fonctions réelles continues dans $0 < h < H$, qui vérifient l'équation fonctionnelle (1.3). Nous montrons que $f(x) \in \mathcal{L}_n$.

Supposons que h soit un nombre fixe de l'intervalle $(0, H)$. Posons dans (1.3) $x = mh$ et notons $f_m = f(mh)$, $m = \dots, -1, 0, 1, \dots$; nous obtenons la relation récurrente

$$a_0(h) f_{m+n} + a_1(h) f_{m+n-1} + \dots + a_n(h) f_m = 0, \quad m = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Si $r_1, r_2, \dots, r_s$ sont les racines distinctes et différentes de zéro de l'équation caractéristique

$$a_0(h) r^n + a_1(h) r^{n-1} + \dots + a_n(h) = 0,$$

on a

$$(5.1) \quad f_m = f(mh) = \sum_{k=1}^s r_k^m P_k(m), \quad m = \dots, -1, 0, 1, \dots,$$

$P_1, \dots, P_s$ étant des polynômes non identiquement nuls de degrés effectifs $p_1 - 1, \dots, p_s - 1$ et $\sum_{k=1}^s p_k \leq n$ (si on avait pour certains indices k $P_k \equiv 0$, on supprimerait les termes respectifs dans (5.1), s devenant plus petit).

Si on pose une autre valeur fixe pour h , encore faisant partie de l'intervalle $(0, H)$, on aura une égalité de la même forme (5.1) avec d'autres valeurs pour $r_1, \dots, r_s$, leur nombre s se changeant aussi et avec d'autres polynômes P_k . Ainsi $s = s(h)$ et soit

$$s_0 = \max_{0 < h < H} s(h) = s(h_0);$$

ce maximum est atteint, car s est un entier $\leq n$. On a $s_0 \geq 1$; car, si on aurait $s_0 = 0$, on déduirait tout de suite de (5.1) que $f(x) \equiv 0$, contrairement à l'hypothèse.

Ecrivons la formule (5.1) pour $h = h_0$ et $h = \frac{h_0}{q}$, q étant un nombre naturel

$$(5.2) \quad f(mh_0) = \sum_{k=1}^{s_0} r_k^m P_k(m), \quad m = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

$$(5.3) \quad f\left(m \frac{h_0}{q}\right) = \sum_{k=1}^{s_1} \rho_k^m Q_k(m), \quad m = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Posons dans (5.3) qm pour m et rapprochons de (5.2)

$$\sum_{k=1}^{s_0} r_k^m P_k(m) - \sum_{k=1}^{s_1} (\rho_k^q)^m Q_k(qm) = 0, \quad m = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Chaque r_k doit figurer parmi les $\rho_1^q, \dots, \rho_{s_1}^q$, car au cas contraire on déduirait de lemme qu'un polynôme $P_k(x) \equiv 0$, contrairement au fait précisé plus haut. Tous les nombres r_k étant différents et $s_1 \leq s_0$, on a $s_1 = s_0$ et chaque r_k est égal exactement à l'un des nombres $\rho_1^q, \dots, \rho_{s_1}^q$. Si nous supposons que ces nombres soient arrangés dans un ordre convenable, nous avons d'après le lemme

$$r_k = \rho_k^q, \quad P_k(x) \equiv Q_k(qx), \quad k=1, 2, \dots, s_0.$$

En notant $r_k = e^{\mu_k}$, on a

$$\rho_k = e^{\frac{\mu_k + 2\pi v_k i}{q}} \quad \text{et} \quad Q_k(x) \equiv P_k\left(\frac{x}{q}\right),$$

où on peut supposer pour l'entier $v_k = v_k(q)$

$$(5.4) \quad -\frac{q}{2} < v_k(q) \leq \frac{q}{2}.$$

La formule (5.3) devient (en écrivant p à la place de m)

$$(5.5) \quad f\left(\frac{p}{q} h_0\right) = \sum_{k=1}^{s_0} e^{\mu_k \frac{p}{q}} P_k\left(\frac{p}{q}\right) e^{2\pi v_k \frac{p}{q} i}, \quad p, q, \text{ entiers, } q > 0.$$

Soit

$$P_k\left(\frac{p}{q} + x\right) = \sum_{j=0}^{p_k-1} a_{kj} x^j$$

et $N = \sum_{k=1}^{s_0} p_k$; les coefficients a_{kj} dépendent de $\frac{p}{q}$, sauf a_{k, p_k-1} , qui est une constante non nulle, le polynôme P_k ayant le degré effectif $p_k - 1$. Posons pour p dans (5.5) $p, p+q, \dots, p+(N-1)q$ successivement

$$(5.6) \quad f\left[\left(\frac{p}{q} + m\right)h_0\right] = \sum_{k=1}^{s_0} \sum_{j=0}^{p_k-1} e^{\mu_k m} m^j \left(a_{kj} e^{\mu_k \frac{p}{q}} e^{2\pi v_k \frac{p}{q} i}\right), \quad m=0, 1, \dots, N-1.$$

Le système de N équations linéaires (5.6), détermine les N inconnues $a_{kj} e^{\mu_k \frac{p}{q}} e^{2\pi v_k \frac{p}{q} i}$, $j=0, 1, \dots, p_k-1$, $k=1, 2, \dots, s_0$, puisque d'après le lemme le déterminant du système n'est pas nul. Il s'ensuit que ces inconnues sont des combinaisons linéaires de $f\left(\frac{p}{q} h_0\right), f\left[\left(\frac{p}{q} + 1\right)h_0\right], \dots, f\left[\left(\frac{p}{q} + N-1\right)h_0\right]$. Compte tenu de $a_{k, p_k-1} \neq 0$, on voit que les fonctions

$$(5.7) \quad \varphi_k\left(\frac{p}{q}\right) = e^{2\pi v_k(q) \frac{p}{q} i}, \quad k=1, 2, \dots, s_0$$

sont continues sur l'ensemble $\left\{\frac{p}{q}\right\}$ des nombres rationnels et qu'elles sont uniformément continues sur l'ensemble des nombres rationnels compris entre 0 et 1. On ne peut pas affirmer la même chose pour $2\pi v_k(q) \frac{p}{q}$, qui n'est point une fonction déterminée sur l'ensemble des nombres rationnels.

Nous démontrerons maintenant que la continuité uniforme de la fonction $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = e^{2\pi v(q) \frac{p}{q} i}$, $v = v(q)$ entier, $-\frac{q}{2} < v(q) \leq \frac{q}{2}$, $0 \leq \frac{p}{q} \leq 1$, entraîne que $v(q) = \text{const.}$, lorsque q est suffisamment grand.

On a $\varphi(0) = 1$. Donc

$$\varphi\left(\frac{1}{q}\right) = e^{2\pi \frac{v(q)}{q} i} \rightarrow 1, \quad \text{lorsque } q \rightarrow \infty;$$

en tenant compte encore de l'inégalité $\left|\frac{v(q)}{q}\right| \leq \frac{1}{2}$, on déduit

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{v(q)}{q} = 0.$$

Par suite, il y a un nombre naturel q_0 tel que

$$(5.8) \quad \left|\frac{v(q)}{q}\right| < \frac{1}{6}, \quad \text{lorsque } q \geq q_0.$$

Soit $\eta > 0$ tel que

$$(5.9) \quad \left|\varphi\left(\frac{p}{q}\right) - \varphi\left(\frac{p'}{q'}\right)\right| < 1 \quad \text{lorsque } 0 \leq \frac{p}{q}, \frac{p'}{q'} \leq 1, \left|\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}\right| < \eta$$

et

$$N = \max\left(q_0, \left[\frac{1}{\eta}\right] + 1\right).$$

Supposons qu'il y ait $q_1 > N$ et $q_2 > N$ tels que $v_1 = v(q_1) \neq v_2 = v(q_2)$. Considérons le point $x_0 = \frac{1}{2|v_1 - v_2|}$ et déterminons p_1 et p_2 pour lesquels

$$\frac{p_1}{q_1} \leq x_0 \leq \frac{p_1 + 1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2} \leq x_0 \leq \frac{p_2 + 1}{q_2}.$$

Pour évaluer la différence $\varphi\left(\frac{p_1}{q_1}\right) - \varphi\left(\frac{p_2}{q_2}\right)$, calculons d'abord la différence de leurs arguments

$$2\pi v_1 \frac{p_1}{q_1} - 2\pi v_2 \frac{p_2}{q_2} = 2\pi \left[v_1 \left(\frac{p_1}{q_1} - x_0\right) - v_2 \left(\frac{p_2}{q_2} - x_0\right) + \frac{v_1 - v_2}{2|v_1 - v_2|} \right].$$

Le premier terme dans la parenthèse a la valeur absolue

$$\left| v_1 \left(\frac{p_1}{q_1} - x_0 \right) \right| < v_1 \frac{1}{q_1} = \frac{v(q_1)}{q_1};$$

d'après (5.8) et $q_1 > N \geq q_0$, ce terme et de même le suivant sont plus petits en valeur absolue que $\frac{1}{6}$, tandis que le troisième terme a la valeur absolue $\frac{1}{2}$. Ainsi

$$\frac{\pi}{3} < \left| 2\pi v_1 \frac{p_1}{q_1} - 2\pi v_2 \frac{p_2}{q_2} \right| < \frac{5\pi}{3},$$

donc

$$\left| \varphi \left(\frac{p_1}{q_1} \right) - \varphi \left(\frac{p_2}{q_2} \right) \right| > 1,$$

ce qui est en contradiction avec (5.9), puisque $\left| \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} \right| \leq \max \left(\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2} \right) < \frac{1}{N} < \eta$ et $0 \leq \frac{p_1}{q_1} < 1$, $0 \leq \frac{p_2}{q_2} < 1$. Il est démontré que $v(q) = \text{const.}$ lorsque $q > N$.

Appliquant ce résultat aux fonctions (5.7), on trouve pour chaque φ_k un $N = N_k$, $k = 1, \dots, s_0$ et $v_k(q) = v_k^*$ lorsque $q > N_k$. Soit $N_0 = \max(N_1, \dots, N_{s_0})$ et $l_k = \frac{1}{h_0} (\mu_k + 2\pi v_k^* i)$, $k = 1, \dots, s_0$. La formule (5.5) appliquée pour $q > N_0$ devient

$$(5.10) \quad f\left(\frac{p}{q} h_0\right) = \sum_{k=1}^{s_0} e^{h_0 l_k \frac{p}{q}} P_k\left(\frac{p}{q}\right), \quad p, q \text{ entiers, } q > N_0.$$

Comme chaque nombre réel x est la limite d'une suite de la forme $\left\{ \frac{p_j}{q_j} \right\}$, $q_j > N_0$, on a

$$f(x h_0) = \sum_{k=1}^{s_0} e^{h_0 l_k x} P_k(x)$$

ou

$$(5.11) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{s_0} e^{l_k x} Q_k(x),$$

où $Q_k(x) = P_k\left(\frac{1}{h_0} x\right)$, $k = 1, \dots, s_0$. Il s'ensuit que $f(x) \in \mathcal{L}_n$ et le théorème 2 est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Fenyő I., *Über eine Lösungsmethode gewisser Funktionalgleichungen*. Acta Math. Acad. Sc. Hung. 7, 383–396 (1956).
- [2] Ghircioașiu N. — Roșcău H., *L'intégration d'une équation fonctionnelle*. Mathematica, 4 (27), 21–32 (1962).
- [3] Ionescu D. V., *Integrarea unei ecuații diferențiale*. Studii și cercet. de mat. Cluj, VIII, 274–288 (1956).
- [4] Ionescu D. V., *Sur une équation fonctionnelle*. Mathematica, 1 (24), 11–26 (1959).
- [5] Kac M., *Une remarque sur les équations fonctionnelles*. Comm. Math. Helvetici, 9, 170–171 (1936).
- [6] Levi-Civita T., *Sulla funzioni che ammettono una formula d'addizione del tipo $f(x+y) = \sum X_i(x) Y_i(y)$* . Rend. Accad. Lincei, 22, 2, 181–183 (1913).
- [7] Pólya G. — Szegő G., *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II*. Die Grundlehren der Math. Wiss., XX, Kap VII, Probl. 60, 113 (1925).
- [8] Popoviciu T., *Asupra unor ecuații funcționale*. Studii și cercet. științifice, VI, nr. 3–4, 37–49 (1955).
- [9] Stamate I., *Contribuțiuni la integrarea unei ecuații funcționale*. Lucrări științifice Inst. Politehnic Cluj, 47–51 (1960).
- [10] Stäckel P., *Sulla equazione funzionale $f(x+y) = \sum X_i(x) Y_i(y)$* . Rend. Accad. Lincei, 22, 2, 392–393 (1913).
- [11] Stäckel P., *Referat de l'article [6]*. Jahrbuch über die Fortschritte der Math., 44, 502–503 (1913).
- [12] Stéphanos C., *Sur une catégorie d'équations fonctionnelles*. Rend. Circ. Mat. Palermo, 18, 360–362 (1904).

Reçu le 2. XII. 1961.