

UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE PLANE

par

DUMITRU RIPIANU

à Cluj

Dans ce travail on considère le problème de géométrie plane suivant :

On considère deux courbes planes (C_1) et (C_2) et on demande une courbe (C) située dans leur plan telle que si M_1 et M_2 sont les points d'intersection les plus proches de M de la normale au point M à (C) avec (C_1) et (C_2) , ce point soit le milieu du segment $\overline{M_1M_2}$ (fig. 1)

On établit l'équation différentielle de la courbe (C) et on construit cette courbe dans les deux cas particuliers suivants : les courbes (C_1) et (C_2) sont des droites, ou bien la courbe (C_1) est une droite et la courbe (C_2) une demi-ellipse, qui s'appuie avec son grand axe sur la droite (C_1) . Ce problème, ainsi que ses deux cas particuliers ci-dessus cités m'ont été proposés par l'Ingénieur Ladislav Némethi. Le problème est posé par certaines questions de la résistance des matériaux.

1. On considère un système d'axes rectangulaires Oxy par rapport auquel les courbes (C) , (C_1) , (C_2) ont les équations respectives $y = f(x)$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$. Les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ seront supposées uniformes dans les intervalles respectifs d'existence.

L'on déduit de la fig. 1 :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{1}{2} (f_1(x_1) + f_2(x_2)), -\frac{1}{y'} = \frac{f_2(x_2) - f_1(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

On porte x_2 tiré de la première relation dans les deux autres, donc

$$(1) \quad f_1(x_1) + f_2(2x - x_1) = 2y.$$

$$(2) \quad f_1(x_1) - f_2(2x - x_1) = \frac{2}{y'} (x - x_1).$$

L'élimination de x_1 entre les relations (1) et (2) donne l'équation différentielle de la courbe cherchée.

On peut éviter cette élimination de la manière suivante : On supposera l'intégrale générale de cette équation écrite sous forme paramétrique : $x = x(s)$, $y = y(s)$ et l'on identifiera le paramètre avec x_1 . On dérive dans ces conditions les termes de la relation (1) par rapport à s , donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 \frac{dx}{ds}} [f'_1(s) + (2x'(s) - 1) f'_2(2x - s)].$$

On remplace dans (2) $\frac{dy}{dx}$ par cette expression et il vient

$$f_1(s) - f_2(2x - s) = 4x'(s) \frac{x - s}{f'_1(s) + [2x'(s) - 1] f'_2(2x - s)}.$$

On posera

$$(3) \quad \sigma = \sigma(s) = 2x(s) - s.$$

La relation ci-dessus devient

$$(4) \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\sigma - s + f'_1(s)[f_2(\sigma) - f_1(s)]}{s - \sigma + f'_2(\sigma)[f_1(s) - f_2(\sigma)]}.$$

Si l'on obtient l'intégrale générale de l'équation (4) sous la forme $\sigma = \sigma(s)$, alors (3) et (1) donnent

$$(5) \quad x = x(s) = \frac{1}{2} [s + \sigma(s)], \quad y = y(s) = \frac{1}{2} [f_1(s) + f_2(\sigma(s))],$$

comme équations paramétriques de la courbe cherchée.

L'on peut bien entendu considérer (4) comme une équation en la fonction s de la variable σ :

$$(6) \quad \frac{ds}{d\sigma} = \frac{s - \sigma + f'_2(\sigma)[f_1(s) - f_2(\sigma)]}{\sigma - s + f'_1(s)[f_2(\sigma) - f_1(s)]}.$$

Si l'on obtient l'intégrale générale de l'équation (6) sous la forme $s = s(\sigma)$, alors (3) et (4) donnent à nouveau

$$(7) \quad x = x(\sigma) = \frac{1}{2} [\sigma + s(\sigma)], \quad y = y(\sigma) = \frac{1}{2} [f_2(\sigma) + f_1(s(\sigma))],$$

comme équations paramétriques de la courbe cherchée.

2. On considère le cas particulier où l'une des courbes — qui sera identifiée avec (C_1) — est une droite qu'on prendra pour axe Ox .

On déduit alors par addition des relations (1) et (2) où l'on fait $f_1(x) \equiv 0$: $x_1 = x + yy'$, auquel cas (1) s'écrit

$$(8) \quad 2y = f_2(x - yy')$$

et donne l'équation différentielle de la courbe cherchée.

3. On considérera en particulier le cas où la deuxième courbe (C_2) est également une ligne droite. On prendra le point de rencontre des deux droites comme origine, de sorte que $f_2(x) = ax$ (a constante $\neq 0$) auquel cas (8) s'écrit.

$$(9) \quad 2y = a(x - yy').$$

L'intégrale générale de l'équation (9) est donnée par la relation.

$$(10) \quad \left[y - \frac{1}{a} (-1 + \sqrt{1 + a^2}) x \right]^{-1 + \sqrt{1 + a^2}} \times \\ \left[y + \frac{1}{a} (1 + \sqrt{1 + a^2}) x \right]^{1 + \sqrt{1 + a^2}} = C.$$

En particulier, pour $C = 0$ on obtient comme courbes (C) les bissectrices des angles des deux droites, résultat évident géométriquement. On peut d'ailleurs obtenir l'équation (10) à l'aide de (6) qui s'écrit en ce cas

$$(11) \quad \frac{ds}{d\sigma} = \frac{s - (1 + a^2)\sigma}{\sigma - s}.$$

L'intégrale générale de l'équation (11) est donnée par la relation

$$(s + \sigma\sqrt{1 + a^2})^{1 + \sqrt{1 + a^2}} (s - \sigma\sqrt{1 + a^2})^{-1 + \sqrt{1 + a^2}} = C.$$

Si l'on porte dans cette relation les valeurs $s = 2\left(x - \frac{y}{a}\right)$, $\sigma = \frac{2}{a}y$ tirées de (7), l'on obtient la relation (10).

Si l'on passe à un système d'axes OXY — les bissectrices des deux droites (fig. 2), donc

$$x = X \cos \frac{\alpha}{2} - Y \sin \frac{\alpha}{2}, \quad y = X \sin \frac{\alpha}{2} + Y \cos \frac{\alpha}{2} \text{ avec } a = \operatorname{tg} \alpha,$$

alors (10) s'écrit $C = YX^K$ avec $K = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

Cette observation a été faite par M. l'ingénieur Ladislav Némethi.

Pour la construction de la courbe (C) on considérera cependant une représentation paramétrique, en considérant (11) comme une équation de Lagrange :

$$s = \sigma \left(1 + \frac{a^2}{1 + \frac{ds}{d\sigma}} \right), \text{ ce qui donne}$$

$$\sigma = C(1+p)(p-l)^{\frac{1}{2}(-1+\frac{1}{l})}(p+l)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{l})}$$

$$s = C(l^2 + p)(p-l)^{\frac{1}{2}(-1+\frac{1}{l})}(p+l)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{l})},$$

où p est le paramètre $= \frac{ds}{d\sigma}$, $l = \sqrt{1+a^2}$ et C une constante arbitraire, de sorte que (7) donne

$$(12) \quad \begin{cases} x = x(p) = \frac{C}{2}(1+l^2+2p)\left[\frac{1}{p^2-l^2}\left(\frac{p-l}{p+l}\right)^{\frac{1}{l}}\right]^{\frac{1}{2}} \\ y = y(p) = \frac{C}{2}a(1+p)\left[\frac{1}{p^2-l^2}\left(\frac{p-l}{p+l}\right)^{\frac{1}{l}}\right]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

donc

$$x'(p) = -\frac{C}{2}a^2(1+p)\left[\frac{1}{(p^2-l^2)^3}\left(\frac{p-l}{p+l}\right)^{\frac{1}{l}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad y'(p) = -\frac{C}{2}a^3\left[\frac{1}{(p^2-l^2)^3}\left(\frac{p-l}{p+l}\right)^{\frac{1}{l}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{1+p}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{(1+p)^2 x'(p)}, \quad \lim_{p \rightarrow l} \frac{y}{x} = \frac{a}{1+l},$$

$$\lim_{p \rightarrow l} \left(y - \frac{a}{1+l}x\right) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow -l} \frac{y}{x} = \frac{a}{1-l}, \quad \lim_{p \rightarrow -l} \left(y - \frac{a}{1-l}x\right) = 0,$$

de sorte que la courbe a pour asymptotes les droites d'équations respectivement $y = \frac{a}{1-l}x$, $y = \frac{a}{1+l}x$, c'est-à-dire les bissectrices des droites (C_1) et (C_2) .

On supposera pour fixer les idées, $C > 0$, $a > 0$ et l'on distinguera deux cas.

Premier cas. Le nombre l est irrationnel ou bien rationnel de la forme $\frac{2B}{2A+1}$ ou $\frac{2B+1}{2A}$ (A, B entiers non-négatifs).

Les expressions (12) n'ont de valeurs réelles que pour $p^2 - l^2 \geq 0$. On a le tableau de variation 1 et la courbe (C) de la fig. 3.

Tableau 1.

p	$-\infty$	$-\frac{1+l^2}{2}$	$-l$	l	∞
$x'(p)$		+			-
$x(p)$	$-C$	$\nearrow$	0	∞	$\infty \searrow C$
$y'(p)$		-			-
$y(p)$	$-\frac{C}{2}a \searrow y\left(-\frac{1+l^2}{2}\right) \searrow -\infty$				$\infty \searrow \frac{C}{2}a$
$\frac{dy}{dx}$	0				0
$\frac{d^2y}{dx^2}$		-			+

Deuxième cas. Le nombre l est de la forme $\frac{2B+1}{2A+1}$ (A, B entiers, $B > A \geq 0$).

Les expressions (12) ont des valeurs réelles et finies pour tout p réel différent de ± 1 .

On a alors

$$(13) \quad E_1 = \left[\frac{1}{p^2 - l^2} \left(\frac{p-l}{p+l} \right)^{\frac{1}{l}} \right]^{\frac{1}{2}} = (p-l)^{\frac{1}{2}(-1+\frac{1}{l})} (p+l)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{l})} = \\ = (p-l)^{\frac{A-B}{2B+1}} (p+l)^{-\frac{A+B+1}{2B+1}},$$

de sorte que

$$(13) \quad \text{pour } p < -l, E_1 = \varepsilon (l-p)^{\frac{1}{2}(-1+\frac{1}{l})} (-l-p)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{l})}$$

où $\varepsilon = 1$ au premier cas et $\varepsilon = -1$ au deuxième cas.

Par conséquent

$$(14) \quad \begin{cases} \text{au 2-ème cas, la branche de (C) donnée par } p \in (-\infty, -l) \text{ est la} \\ \text{symétrique par rapport à O de la branche respective obtenue en} \\ \text{faisant dans (12) } l = \frac{2B+1}{2A+1} \text{ et } E_1 > 0. \end{cases}$$

Pour $p \in (-l, l)$, (13) donne $E_1 = (-1)^{A+B} (l-p)^{\frac{1}{2}(-1+\frac{1}{l})} (l+p)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{l})}$, de sorte que

$$(15) \quad \begin{cases} \text{la branche de (C) donnée par } p \in (-l, l) \text{ quand } (-1)^{A+B} = -1 \text{ est} \\ \text{la symétrique par rapport à O de la branche respective obtenue en} \\ \text{faisant dans (12) } l = \frac{2B+1}{2A+1} \text{ et } E_1 > 0. \end{cases}$$

On a de plus

$$E_2 = \left[\frac{1}{(p^2 - l^2)^3} \left(\frac{p-l}{p+l} \right)^{\frac{1}{l}} \right]^{\frac{1}{2}} = (p-l)^{\frac{1}{2}(-3+\frac{1}{l})} (p+l)^{-\frac{1}{2}(3+\frac{1}{l})} = \\ = (p-l)^{\frac{A-3B-1}{2B+1}} (p+l)^{-\frac{A+3B+2}{2B+1}}$$

de sorte que pour $p \in (-l, l)$ et $(-1)^{A+B} = 1$, on a $E_2 < 0$ d'où le tableau 2.

Tableau 2

p	$-l$	-1	l
$x'(p)$	—	0	+
$x(p)$	$\infty \searrow$	$x(-1)$	$\nearrow \infty$
$y'(p)$		+	
$y(p)$	$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow \infty$
$\frac{dy}{dx}$		∞	
$\frac{d^2y}{dx^2}$		+	—

Les remarques (14) et (15) et le tableau 2 donnent les formes de la courbe (C) des figures 4 et 5 au 2-ème cas du problème.

4. On considérera le cas où la courbe (C_1) est toujours une droite et la courbe (C_2) une demi-ellipse limitée par le grand axe, celui-ci étant situé sur la droite (C_1) (fig. 6).

En ce cas $f_2(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, de sorte que l'équation (8) s'écrit

$$(16) \quad 2y = \sqrt{(1-e^2)[a^2 - (x-yy')^2]}.$$

On désignera par $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ l'excentricité de l'ellipse et par E la base des logarithmes naturels.

L'équation (6) s'écrit

$$(17) \quad \frac{ds}{d\sigma} = \frac{s - e^2\sigma}{\sigma - s}$$

c'est-à-dire c'est l'équation (11), à l'intégrale générale donnée par la relation $\Gamma = (s - e\sigma)^{-1+e} (s + e\sigma)^{1+e}$.

Si l'on porte dans cette relation les valeurs

$$s = 2x - \sqrt{a^2 - 4 \frac{y^2}{1-e^2}}, \quad \sigma = \sqrt{a^2 - 4 \frac{y^2}{1-e^2}},$$

respectivement

$$s = 2x + \sqrt{a^2 - 4 \frac{y^2}{1-e^2}}, \quad \sigma = -\sqrt{a^2 - 4 \frac{y^2}{1-e^2}},$$

tirées de (7) l'on obtient l'intégrale générale de l'équation (16) sous la forme

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[2x - \sqrt{(1+e)\left((1+e)a^2 - \frac{4}{1-e}y^2\right)} \right]^{-1+e} \times \\ \left[2x - \sqrt{(1-e)\left((1-e)a^2 - \frac{4}{1+e}y^2\right)} \right]^{1+e} = \Gamma, \\ \text{et} \\ \left[2x + \sqrt{(1+e)\left((1+e)a^2 - \frac{4}{1-e}y^2\right)} \right]^{-1+e} \times \\ \left[2x + \sqrt{(1-e)\left((1-e)a^2 - \frac{4}{1+e}y^2\right)} \right]^{1+e} = \Gamma, \end{array} \right.$$

où Γ est une constante arbitraire.

Pour la construction de la courbe (C) il est cependant commode de prendre une représentation paramétrique de la courbe, en considérant l'équation (17) comme une équation de Lagrange :

$$s = \sigma \frac{e^2 + \frac{ds}{d\sigma}}{1 + \frac{ds}{d\sigma}}$$

ce qui donne

$$\sigma = Ca(1+p)(p-e)^{\frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{e}\right)}(p+e)^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}$$

$$s = Ca(e^2 + p)(p-e)^{\frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{e}\right)}(p+e)^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}$$

de sorte que (7) donne

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x(p) = \frac{C}{2} a(1+e^2+2p) \left[\frac{1}{p^2-e^2} \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ y = y(p) = \frac{a}{2} \left[(1-e^2) \left(1 - C^2 \frac{(1+p)^2}{p^2-e^2} \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ x'(p) = \frac{C}{2} a(1-e^2)(1+p) \left[\frac{1}{(p^2-e^2)^3} \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ y'(p) = -\frac{C^2}{2} a(1-e^2)^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{1+p}{(p^2-e^2)^2} \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}}}{\left[1 - C^2 \frac{(1+p)^2}{p^2-e^2} \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{dy}{dx} = -C(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\left[\frac{1}{p^2-e^2} \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[1 - C^2 \frac{(1+p)^2}{p^2-e^2} \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right.$$

$$(20) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\frac{1-p}{1+p} + C^2 \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}}}{\left[1 - C^2 \frac{(1+p)^2}{p^2-e^2} \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

5. Ainsi qu'en 3, on supposera $C > 0$ et on distinguera deux cas :

Premier cas. Le nombre e est irrationnel ou bien rationnel de la forme $\frac{2B}{2A+1}$ ou $\frac{2B+1}{2A}$ (A, B entiers non-négatifs). L'expression (19) de x n'a de valeurs réelles que si $p^2 - e^2 \geq 0$. et l'expression (19) de y exige de plus dans le même but que

$$(21) \quad f_3(p) = 1 - C^2 \frac{(1+p)^2}{p^2-e^2} \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}} \geq 0.$$

Or,

$$f'_3(p) = -2C^2(1 - e^2) \frac{(1+p)}{(p^2 - e^2)^2} \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}}.$$

On déduit donc du tableau 3 que si $C \leq 1$, $f_3(p) \geq 0$ pour $p \in (-\infty, p_2]$ et $p \in [e, \infty]$ et si $C > 1$, $f_3(p) \geq 0$ pour $p \in [p_1, p_2]$ et $p \in [e, p_3]$.

Afin d'étudier la concavité de la courbe, on déduira de (20)

$$(22) \quad \text{sg} \frac{d^2y}{dx^2} = \text{sg} f_4(p), \text{ où } f_4(p) = \frac{p-1}{p+1} \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}} - C^2,$$

de sorte que

$$f'_4(p) = 2 \frac{1-e^2}{(1+p)^2(p^2-e^2)} \left(\frac{p+e}{p-e} \right)^{\frac{1}{e}} \geq 0.$$

On déduit donc du tableau 4 que si $C < 1$, $f_4(p) = 0$ pour $p = p_5 > e$; si $C > 1$, $f_4(p) = 0$ pour $p = p_4 < -1$ et si $C = 1$, $f_4(p) \neq 0$ pour tout p fini. Or, $f_4(p_1) = -\frac{1-e^2}{(1+p_1)^2} \left(\frac{p_1-e}{p_1+e} \right)^{\frac{1}{e}} < 0$, de sorte que le tableau 4 donne $p_1 < p_4 < -1 < p_2$, par conséquent si $C \neq 1$, la courbe (C) a un seul point d'inflexion et si $C = 1$, elle n'en a aucun.

Tableau 3

p	$-\infty$	p_1	-1	p_2	$-e$		e	p_3	∞
$f_3(p)$		+	0	-				-	
$f_3(p)$	$1-C^2$	$\nearrow$		$1 \searrow 0 \searrow -\infty$			$1 \nearrow$	$1-C^2$	

Tableau 4

p	$-\infty$	p_4	-1	$-e$		e	p_5	∞
$f'_4(p)$			+				+	
$f_4(p)$	$1 - C^2$	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	$(-)$		$-\infty$	$1 - C^2$

On examinera si les racines de $x(p)$ de (19) donnent un $y(p)$ réel. Il est évident que $p = e$ donne un $y(p)$ réel. Afin de décider au sujet de la racine $p = -\frac{1+e^2}{2}$, on déduira de (21)

$$f_3\left(-\frac{1+e^2}{2}\right) = \left(1 + C\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{e}}\right)\left(1 - C\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{e}}\right),$$

de sorte que le tableau 3 donne

$$(23) \quad \begin{cases} \text{sg}\left(p_2 + \frac{1+e^2}{2}\right) = \text{sg}\left(\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}} - C\right), \text{ avec } p_2 = -\frac{1+e^2}{2} \\ \text{si } C = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}}. \end{cases}$$

On examinera la position de la courbe (C) par rapport à la demiellipse. Cette position est donnée par une simple inspection des formules (19) qui donnent

$$(24) \quad f_5(p) = \frac{4}{C^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = (e^2 + p) \frac{2+e^2+3p}{p^2-e^2} \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}} - \frac{3}{C^2},$$

$$\text{de sorte que } f'_5(p) = 2(1-e^2) \frac{(1+p)(e^2+2p)}{(p^2-e^2)^2} \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}}$$

Tableau 5

p	$-\infty$	-1	p_2	$-\frac{2+e^2}{3}$	$-e$	$-e^2 - \frac{e^2}{2}$	e	∞
$f'_5(p)$	$+$	0	$-$				$+$	
$f_5(p)$	$3\left(1-\frac{1}{C^2}\right) \nearrow (1-e^2)\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{e}} - \frac{3}{C^2} \searrow f_5(p_2) \searrow -\frac{3}{C^2} \searrow -\infty$						$-\frac{3}{C^2} \nearrow 3\left(1-\frac{1}{C^2}\right)$	

Ainsi donc

$$(25) \quad \text{sg } f_5(-1) = \text{sg } f_6(e), \text{ ou } f_6(e) = C - \sqrt{3} \left[\frac{1}{1-e^2} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

de sorte que $f'_6(e) = -\frac{\sqrt{3}}{e^2} \left(\frac{1}{1-e^2} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}} \right)^{\frac{1}{2}} f_7(e)$, avec $f_7(e) = -e + \frac{1}{2} \log \frac{1+e}{-e}$, donc $f'_7(e) = \frac{e^2}{1-e^2} > 0$, $f_7(e) > f_7(0) = 0$, $f'_6(e) < 0$.

On en déduit le tableau 6.

Tableau 6

e	0	1
$f_6(e)$	$C - \sqrt{3} E^{-1}$	$C - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Tableau 7

e	0	1
$f_8(e)$	$1 - \frac{C^2}{9} E^{\frac{8}{3}}$	$1 - C^2$

Dans l'examen de la position de la courbe (C) par rapport à la demi-ellipse interviendra aussi l'expression $f_5(p_2)$. Or, (21) et (24) donnent $C^2 f_5(p_2) = -4 \frac{1-e^2}{(1+p_2)^2} \left(\frac{3+e^2}{4} + p_2 \right)$, auquel cas le tableau 3 donne

$$(26) \quad \text{sg } f_5(p_2) = -\text{sg } f_8(e), \text{ où } f_8(e) = f_3 \left(-\frac{3+e^2}{4} \right) =$$

$$= 1 - C^2 \left(\frac{1+e}{3-e} \right)^{1+\frac{1}{e}} \left(\frac{3+e}{1-e} \right)^{-1+\frac{1}{e}},$$

de sorte que $f'_8(e) = -\frac{C^2}{e^2} \left(\frac{1+e}{3-e} \right)^{1+\frac{1}{e}} \left(\frac{3+e}{1-e} \right)^{-1+\frac{1}{e}} f_9(e)$, avec $f_9(e) = \frac{24e}{9-e^2} + \log \frac{(1-e)(3-e)}{(1+e)(3+e)}$, donc $f'_9(e) = -32e^2 \frac{3+e^2}{(1-e^2)(9-e^2)^2} < 0$, $f_9(e) < f_9(0) = 0$, $f'_8(e) > 0$, ce qui donne le tableau 7.

Les formules 23 — 26 distinguent plusieurs formes et positions (par rapport à la demi-ellipse) de la courbe (C). Dans la construction des différentes formes de la courbe on peut se servir du lemme 6 du point 6 (page 341)

Pour le motif indiqué au point 7 (pag. 350), on construira sur la même figure la courbe (C) donnée par la valeur $C > 0$ de la constante et la courbe $(-C)$ donnée par la valeur $-C$ de la constante.

L'ensemble des deux courbes s'appellera la courbe ($\tilde{C}$).

Cas 1.1. $0 < C < \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}}$.

On fera dans (25) $C = \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}}$, donc

$$f_{10}(e) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{\frac{1}{e}} \left\{ \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}} - \sqrt{3} \left[\frac{1}{1-e^2} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \left[\frac{1}{1-e^2} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

de sorte que $f'_{10}(e) = -\frac{1}{e^2} \left[\frac{1}{1-e^2} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]^{\frac{1}{2}} f_{11}(e)$, avec $f_{11}(e) = e \frac{1+e^2}{1-e^2} + \frac{1}{2} \log \frac{1-e}{1+e}$, donc $f'_{11}(e) = e^2 \frac{5-e^2}{(1-e^2)^2} > 0$, $f_{11}(e) > f_{11}(0) = 0$,

$f'_{10}(e) < 0$, $f_{10}(e) < f_{10}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} - E < 0$, de sorte que $f_6(e) < \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}} -$

$-\sqrt{3} \left[\frac{1}{1-e^2} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]^{\frac{1}{2}} < 0$, donc dans (25)

$$(27) \quad f_5(-1) < 0.$$

Tableau 8.

p	$-\infty$	-1	$-\frac{1+e^2}{2}$	p_2	e	p_5	∞
$x'(p)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(p)$	$-Ca$	$\searrow x(-1) \nearrow$	0	$\nearrow x(p_2)$	0	$\nearrow x(p_5) \nearrow$	Ca
$y'(p)$		$+$	0	$-$		$-$	
$y(p)$	$\frac{b}{2} \sqrt{1-C^2} \nearrow$	$\frac{b}{2}$	$\searrow y \left(-\frac{1+e^2}{2} \right) \searrow$	0	$\frac{b}{2} \searrow$	$y(p_5) \searrow$	$\frac{b}{2} \sqrt{1-C^2}$
$\frac{dy}{dx}$	0	$-C \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{\frac{1}{2e}}$		∞	0		0
$\frac{d^2 y}{dx^2}$		$+$	$ $	$-$		$-$	$+$

La courbe ($\tilde{C}$) a la forme et la position par rapport à la demi-ellipse de la fig. 6.

Cas 1. 2. $C = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}}$. La relation (27) se maintient évidemment.

Le reste du tableau 9 est donné par le tableau 8. La courbe a la forme et la position de la fig. 7.

Tableau 9.

p	$-\infty$	-1	$-\frac{1+e^2}{2}$		
$x'(p)$		$-$	0	$+$	
$x(p)$	$-Ca$	$\supset$	$x(-1)$	$\nearrow$	0
$y'(p)$		$+$	0	$-$	
$y(p)$	$\frac{b}{2}\sqrt{1-C^2}$	$\nearrow$	$\frac{b}{2}$	$\supset$	0
$\frac{dy}{dx}$	0		$-\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2e}}$		∞
$\frac{d^2y}{dx^2}$		$+$	$ $	$-$	

Tableau 10

e	0	1
$f_{12}(e)$	E^{-2}	$\supset 0$

Cas 1. 3. $\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}} < C \leq \sqrt{3} E^{-1}$.

Si $f_{12}(e) = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}}$, $f'_{12}(e) = \frac{2}{e^2} \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}} f_{13}(e)$, avec $f_{13}(e) = -\frac{e}{1-e^2} + \frac{1}{2} \log \frac{1+e}{1-e}$, de sorte que $f'_{13}(e) = -\frac{2e^2}{(1-e^2)^2} < 0$, $f_{13}(e) < f_{13}(0) = 0$,

$f'_{12}(e) < 0$, d'où l'on déduit le tableau 10, qui donne $\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}} < \sqrt{3} E^{-1}$, donc le cas respectif existe pour tout $e \in (0, 1)$. On déduit du tableau 6 que $f_6(0) < 0$, donc de (25) $f_5(-1) < 0$ pour tout $e \in (0, 1)$.

Le reste du tableau 11 est donné par le tableau 8. La courbe a la forme et la position de la fig. 8.

Tableau 11

p	$-\infty$	-1	t_2		e
$x'(p)$		$-$	0	$+$	
$x(p)$	$-Ca$	$\supset$	$x(-1)$	$\nearrow$	$x(p_2)$
$y'(p)$		$+$	0	$-$	
$y(p)$	$\frac{b}{2}\sqrt{1-C^2}$	$\nearrow$	$\frac{b}{2}$	$\supset$	0
$\frac{dy}{dx}$	0		$-C \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2e}}$		∞
$\frac{d^2y}{dx^2}$		$+$	$ $	$-$	

Si $\sqrt{3} E^{-1} < C \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, le tableau 10 donne $C > \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}}$ pour tout $e \in (0, 1)$, et au tableau 6 il existe un $e_0 \in (0, 1)$ tel que dans (25)

$$(28) \quad \operatorname{sg} f_6(e) = \operatorname{sg}(e_0 - e) \text{ et } f_6(e_0) = f_5(-1) = 0.$$

Cas 1. 4. $\sqrt{3} E^{-1} < C \leq 3E^{-\frac{4}{3}}$, $e < e_0$.

On a $f_6(e) > 0$, donc dans (25) $f_5(-1) > 0$. Au tableau 7, $f_8(e) > 0$, donc dans (26) $f_5(p_2) < 0$. Tableau de variation 11. La courbe a la forme et la position de la fig. 9.

Si $3E^{-\frac{4}{3}} < C < 1$, alors il existe au tableau 7 un $e_1 \in (0, 1)$ qui a la propriété :

$$(29) \quad \operatorname{sg} f_8(e) = \operatorname{sg}(e - e_1) \text{ et } f_8(e_1) = 0.$$

Il est évident que $e_1 < e_0$, parce que si $e_1 = e_0$, alors pour $e = e_0 = e_1$ l'on aurait dans (25) et (26) $f_5(e) = f_5(-1) = f_8(e) = f_5(p_2) = 0$, contrairement au tableau 5, et si $e_1 > e_0$, alors pour $e \in (e_0, e_1)$ l'on aurait $f_8(e) < 0$, donc dans (26) $f_5(p_2) > 0$ et dans (25) $f_5(e) < 0$, donc $f_5(-1) < 0$, contrairement encore au tableau 5. D'ailleurs la relation $e_1 < e_0$ peut être confirmée immédiatement, si l'on déduit de (25) et (26) $f_8(e_0) = \varphi(e_0)$, avec

$$\varphi(e) = 1 - \frac{3}{9-e^2} \left(\frac{3+e}{3-e} \right)^{\frac{1}{e}}, \text{ de sorte que } \varphi'(e) = -\frac{3}{e^2(9-e^2)} \left(\frac{3+e}{3-e} \right)^{\frac{1}{e}} \varphi_1(e),$$

$$\text{avec } \varphi_1(e) = 2e^{\frac{3+e^2}{9-e^2}} + \log \frac{3-e}{3+e}, \text{ donc } \varphi_1'(e) = 2e^{\frac{33-e^2}{(9-e^2)^2}} > 0, \varphi_1(e) > \varphi_1(0) = 0,$$

$\varphi'(e) < 0$, $\varphi(e) > \varphi(1) = \frac{1}{4}$, de sorte que $f_8(e_0) > 0$, auquel cas (28) donne $e_1 < e_0$.

Cas. 1. 5. $3E^{-\frac{4}{3}} < C < \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $e < e_1$. (29) et (26) donnent $f_5(p_2) > 0$ et (28) et (25) $f_5(-1) > 0$. Tableau 11. La courbe a la forme et la position de la fig. 10.

Cas. 1. 6. $3E^{-\frac{4}{3}} < C < \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $e = e_1$. (29) et (26) donnent $f_5(p_2) = 0$ et (28) et (25) $f_5(-1) > 0$. Tableau 11. La courbe a la forme et la position de la fig. 11.

Cas. 1. 7. $3E^{-\frac{4}{3}} < C < \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $e_1 < e < e_0$. (29) et (26) donnent $f_5(p_2) < 0$, et (28) et (25) $f_5(-1) > 0$. Tableau 11. La courbe a la forme et la position de la fig. 9.

Cas. 1. 8. $\sqrt{3}E^{-1} < C < \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $e = e_0$. Puisque $e_1 < e_0$ (29) et (26) donnent $f_5(p_2) < 0$ et (28) $f_5(-1) = 0$. Tableau 11. La courbe a la forme et la position de la fig. 12.

Cas. 1. 9. $\sqrt{3}E^{-1} < C < \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $e > e_0$. (29) et (26) donnent $f_5(p_2) < 0$ et (28) et (25) $f_5(-1) < 0$. Tableau 11. La courbe a la forme et la position de la fig. 8.

Cas. 1. 10. $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq C < 1$ et $e < e_1$. Le tableau 6 et (25) donnent $f_5(-1) > 0$, et (29) et (26) $f_5(p_2) > 0$. Tableau 11. La courbe a la forme et la position de la fig. 10.

Cas. 1. 11. $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq C < 1$ et $e = e_1$. Le tableau 6 et (25) donnent $f_5(-1) > 0$ et (29) et (26) $f_5(p_2) = 0$. Tableau 11. La courbe a la forme et la position de la fig. 11.

Cas. 1. 12. $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq C < 1$ et $e > e_1$. Le tableau 6 et (25) donnent $f_5(-1) > 0$, et (29) et (26) $f_5(p_2) < 0$. Tableau 11. La courbe a la forme et la position de la fig. 9.

Cas. 1. 13. $C = 1$. Le tableau 5 donne $f_5(-1) > 0$, et le tableau 7 et (26) $f_5(p_2) > 0$.

Le tableau 12 rend d'ailleurs inutiles les inégalités précédentes. La courbe a la forme et la position de la fig. 13.

Tableau 12.

p	$-\infty$	-1	p_2	e	∞	
$x'(p)$	$-$	0	$+$		$+$	
$x(p)$	$-a$	$\searrow$	$x(-1)$	$\nearrow$	$x(p_2)$	$0 \nearrow a$
$y'(p)$	$+$	0	$-$		$-$	
$y(p)$	0	$\nearrow$	$\frac{b}{2}$	$\searrow$	0	$\frac{b}{2} \searrow 0$
$\frac{dy}{dx}$	-1	$-\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2e}}$	∞		0	-1
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$+$	$-$			$-$	

Cas. 1. 14. $C > 1$. Le tableau 5 donne $f_5(-1) > 0$ et le tableau 7 et (26) $f_5(p_2) > 0$.

Le tableau 13 rend d'ailleurs inutiles ces inégalités. La courbe a la forme et la position de la fig. 14.

Tableau 13.

p	$-\infty$	p_1	p_4	-1	p_2	e	p_3	∞
$x'(p)$			$-$	0	$+$		$+$	
$x(p)$		$x(p_1) \supset x(p_4) \supset x(-1) \nearrow x(p_2)$					$0 \nearrow x(p_3)$	
$y'(p)$			$+$	0	$-$		$-$	
$y(p)$		0	$\nearrow y(p_4)$	$\nearrow \frac{b}{2}$	$\supset 0$		$\frac{b}{2} \supset 0$	
$\frac{dy}{dx}$		∞	$-C\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2e}}$			∞	0	∞
$\frac{d^2y}{dx^2}$			$-$	0	$+$	$-$	$-$	

6. Si e est de la forme $\frac{2B+1}{2A+1}$, avec A et B entiers, $0 \leq B < A$, l'expression (19) de x a une valeur réelle et finie pour tout p réel et différent de $-e$ et l'expression (19) de y a une valeur réelle et finie pour tout p réel qui satisfait à la condition (21). La variation de la fonction $f(p)$ de (21) est donnée à présent par le tableau 14.

Tableau 14.

p	$-\infty$	p_1	-1	p_2	$-e$	p_6	e	p_3	∞
$f'_3(p)$		+	0	-	$\mp \infty$	+	$0 \left(e < \frac{1}{2} \right)$ $\pm \infty \left(e > \frac{1}{2} \right)$	-	
$(f_3 p)$	$1 - C^2$	$\nearrow$		$1 \searrow 0 \searrow = \infty$	$\nearrow$		$1 \searrow 1 - C^2$		

et la variation de la fonction $f_4(p)$ de (22) par le tableau 15.

Tableau 15.

p	$-\infty$	p_4	-1	$-e$	p_7	e	p_5	∞
$f_4(p)$	$1 - C^2$	$\nearrow$		$\pm \infty$	$\nearrow - C^2$	0	$\nearrow \pm \infty$	$\nearrow 1 - C^2$

On déduit donc du tableau 14 que si $C \leq 1$, $f_3(p) \geq 0$ pour $p \in (-\infty, p_2]$ et $p \in [p_1, \infty)$ et si $C > 1$, $f_3(p) \geq 0$ pour $p \in [p_1, p_2]$ et $p \in [p_6, p_3]$ et du tableau 15 que si $C < 1$, $f_4(p) = 0$ pour $p = p_7$ et $p = p_5$; si $C = 1$, $f_4(p) = 0$ pour $p = p_7$ et si $C > 1$, $f_4(p) = 0$ pour $p = p_4$ et $p = p_7$.

Or $f_4(p_6) = -\frac{1-e^2}{(1+p_6)^2} \left(\frac{p_6-e}{p_6+e} \right)^{\frac{1}{e}} > 0$, auquel cas le tableau 15 donne $-e < p_7 < p_6 < e$, de sorte que les conclusions du 1-er cas relatives à la concavité de la courbe se maintiennent.

L'expression (19) de x est — abstraction faite d'un facteur constant et du remplacement de $l > 1$ par $e < 1$ — l'expression (12) de $x(p)$, pendant que l'expression (19) de y prend évidemment — quand elle a des valeurs réelles — des valeurs positives tant au 1-er cas qu'aux cas 2 et 3.

Ainsi donc, pour l'expression $E_1 = \left[\frac{1}{p^3 - e^3} \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]^{\frac{1}{2}}$ a lieu la relation (13), ce qui conduit aux conclusions suivantes à la place des conclusions (14) et (15):

(30) Si $e = \frac{2B+1}{2A+1}$, la branche de (C) donnée par $p \in (-\infty, p_2]$, respectivement $p \in \left[-\infty, -\frac{1+e^2}{2} \right]$, $p \in [p_1, p_2]$ est la symétrique par rapport à Oy de la branche respective obtenue en faisant dans (19) $e = \frac{2B+1}{2A+1}$ et $E_1 > 0$.

(31) La branche de (C) donnée par $p \in [-e, e]$ quand $(-1)^{A-B} = -1$ est la symétrique par rapport à Oy de la branche respective obtenue en faisant dans (19) $e = \frac{2B+1}{2A+1}$ et $E_1 > 0$.

L'on distinguera par conséquent deux autres cas.

Deuxième cas. Le nombre e a la forme $e = \frac{2B+1}{2A+1}$ avec A, B entiers,

$0 \leq B < A$ et $(-1)^{A-B} = 1$. On a $E_2 = \left[\frac{1}{(p^2 - e^2)^3} \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]^{\frac{1}{2}} < 0$ pour $p \in (-e, e)$, d'où résultent le tableau 16 qui complète dans notre cas les tableaux 8 et 9 et le tableau 17 qui complète les tableaux 11, 12 et 13. Dans le cas du tableau 9 on prend dans le tableau 16 $p_2 = -\frac{1+e^2}{2}$.

Tableau 16.

p	$-1 - \frac{1+e^2}{2} p_2$	$-e$	p_6	e
$x'(p)$	-	-	-	-
$x(p)$	$0 \searrow x(p_2)$	$\searrow \mp \infty \searrow$	$x(p_6) \searrow 0$	
$y'(p)$			+	
$y(p)$	0		$0 \nearrow \frac{b}{2}$	
$\frac{dy}{dx}$			∞	0
$\frac{d^2y}{dx^2}$			-	

Tableau 17.

p	-1	p_2	$-\frac{1+e^2}{2} - e$	p_6	e
$x'(p)$	-	-	-	-	-
$x(p)$	$\searrow x(p_2)$	$\searrow 0 \searrow \mp \infty \searrow$	$x(p_6) \searrow 0$		
$y'(p)$				+	
$y(p)$				$0 \nearrow \frac{b}{2}$	
$\frac{dy}{dx}$				∞	0
$\frac{d^2y}{dx^2}$				-	

Pour la construction des différentes formes de la courbe (C) dans ce cas on peut se servir des lemmes 1—5 ci-dessous.

On désignera par 2. x. ($x = 1, 2, \dots, 14$) le cas donné par les conditions du cas 1. x. relativement à C et e, mais avec la valeur $\frac{2B+1}{2A+1}$ de notre cas de e.

Lemme 1. 1°. Aux cas 2, 3, 2. 4, 2. 7, 2. 8, 2. 9, 2. 12 on a $\text{sg}(x(p_2) - x(p_6)) = \text{sg}(C - \bar{C})$ avec $x(p_2) = x(p_6)$ quand $C = \bar{C}$.

Ici, $\bar{C} = \bar{C}(e) = \frac{1}{1+p_0} \left[(p_0^2 - e^2) \left(\frac{-e - p_0}{e - p_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right] > 0$, où $p_0 = p_0(e)$ est la (seule) racine comprise dans l'intervalle $\left(-\frac{2+e+e^2}{3+e}, -\frac{2-e+e^2}{3-e} \right)$ de la fonction

$$f_{14}(p) = \left(\frac{p-e}{2+e+e^2+(3+e)p} \right)^{1-e} \left(\frac{2-e+e^2+(3-e)p}{p+e} \right)^{1+e} - \frac{(1+e)^{1+e}}{(1-e)^{1-e}}.$$

On a $p_0 > -1$ et $\bar{C}(e) \in \left(\left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{2}}, 1 \right)$ pour tout $e \in (0, 1)$.

2° Quand e croît de 0 à $\sqrt{\alpha}$, $\bar{C}(e)$ décroît de $\bar{C}(0) = 2E^{-\frac{3}{2}}$ à $\bar{C}(\sqrt{\alpha})$. Ici, α est la (seule) racine comprise dans l'intervalle (0, 1) de la fonction

$$f_{21}(x) = -\frac{6}{-1+2x+\sqrt{1-x+x^2}} + \log \frac{(1+\sqrt{1-x+x^2})^2}{x(1-x)}.$$

3°. Aux cas 2. 5, 2. 6, 2. 10, 2. 11, 2. 13, 2. 14, on a $x(p_6) < x(p_2)$.

Démonstration. 1°. Si $x(p_2) < x(p_6)$, alors en construisant à l'aide du tableau 11 et de (30) la branche de (C) donnée par $p \in (-1, p_2]$ aux cas respectifs et à l'aide du tableau 17 la branche de (C) donnée par $p \in [p_6, e]$, on obtient la figure 15 sur laquelle on constate :

(32) $\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe au cas où } x(p_2) < x(p_6) \text{ deux valeurs } p' \text{ et } p'' \text{ de } p, \\ \text{avec } -1 < p' < p_2 < -\frac{1+e^2}{2} < -e < p_6 < p'' < e, \text{ telles que} \\ x(p') = x(p'') \text{ et } y(p') = y(p''). \text{ Inversement, si les relations (32) ont} \\ \text{lieu, alors } x(p_2) < x(p_6). \end{array} \right.$

Si les relations (32) ne peuvent pas être satisfaites alors $x(p_2) > x(p_6)$; inversement, si $x(p_2) > x(p_6)$, les relations (32) ne peuvent pas être satisfaites.

Ces relations s'écrivent à l'aide de (19)

$$(33) \quad (1+e^2+2p') \left[\frac{1}{p'^2-e^2} \left(\frac{p'-e}{p'+e} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = (1+e^2+2p'') \left[\frac{1}{p''^2-e^2} \left(\frac{p''-e}{p''+e} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(34) \quad \frac{(1+p')^2}{p'^2-e^2} \left(\frac{p'-e}{p'+e} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(1+p'')^2}{p''^2-e^2} \left(\frac{p''-e}{p''+e} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A l'aide de (34), (33) donne

$$(35) \quad p'' = -\frac{2(1+e^2)+(3+e^2)p'}{3+e^2+4p'}$$

valeur qui, portée dans (34) donne

$$(36) \quad f_{14}(p') = 0$$

où

$$(36) \quad f_{14}(p) = \left(\frac{p-e}{2+e+e^2+(3+e)p} \right)^{1-e} \left(\frac{2-e+e^2+(3-e)p}{p+e} \right)^{1+e} - \frac{(1+e)^{1+e}}{(1-e)^{1-e}}.$$

de sorte que

$$(37) \quad f'_{14}(p) = 8e \frac{(1-e^2)(1+p)^2}{(p+e)^2(2+e+e^2+(3+e)p)^2} \left(\frac{p-e}{2+e+e^2+(3+e)p} \right)^{-e} \left(\frac{2-e+e^2+(3-e)p}{p+e} \right)^e.$$

Tableau 18.

p	-1	$-\frac{3+e^2}{4}$	$-\frac{2+e+e^2}{3+e}$	p'	$-\frac{2-e+e^2}{3-e}$	$-\frac{1+e^2}{2}$
$f'_{14}(p)$		+	$\pm\infty$	-	0	+
$f_{14}(p)$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	0 $\searrow$ $-\frac{(1+e)^{1+e}}{(1-e)^{1-e}}$	$\nearrow$ 0

On déduit du tableau 18 que l'équation (36) a une racine (et une seule) dans l'intervalle $\left(-\frac{2+e+e^2}{3+e}, -\frac{2-e+e^2}{3-e} \right) \subset \left(-1, -\frac{1+e^2}{2} \right)$ et que $p' > -\frac{3+e^2}{4}$, auquel cas (35) donne $p'' \in (-e, e)$ en conformité avec

(32). Avant de continuer la démonstration on examinera si l'intervalle $\left(-\frac{2+e+e^2}{3+e}, p_2\right)$ dans lequel est comprise la racine p' existe, parcequ'au cas contraire l'hypothèse $x(p_2) < x(p_6)$ peut être exclue dès le début. Or, (21) donne

$$(37_1) \quad \varphi_2(e) = f_3\left(-\frac{2+e+e^2}{3+e}\right) = 1 - \frac{C^2}{4} (1-e)^{1-\frac{1}{e}} (1+e)^{\frac{2}{e}},$$

de sorte que $\varphi_2'(e) = -\frac{C^2}{4e^2} (1-e)^{1-\frac{1}{e}} (1+e)^{\frac{2}{e}} \varphi_3(e)$, avec $\varphi_3(e) = e \frac{3+e}{1+e} + \log \frac{1-e}{(1+e)^2}$, donc $\varphi_3'(e) = -e \frac{3+e^2}{(1-e)(1+e)^2} < 0$, $\varphi_3(e) < \varphi_3(0) = 0$, $\varphi_2'(e) < 0$, de sorte que

$$(37_2) \quad \begin{cases} \text{quand } e \text{ croît de } 0 \text{ à } 1, \varphi_2(e) \text{ croît de} \\ \varphi_2(0) = 1 - \frac{C^2}{4} E^3 \text{ à } \varphi_2(1) = 1 - C^2. \end{cases}$$

Il existe donc des valeurs de C et de e pour lesquelles $\varphi_2(e) > 0$ (par exemple, pour $C \cong E^{-2}$ et tout $e \in (0, 1)$) auquel cas le tableau 14 donne $-\frac{2+e+e^2}{3+e} < p_2$, de sorte que l'intervalle $\left(-\frac{2+e+e^2}{3+e}, p_2\right)$ existe.

On déduit du tableau 14 et de (32) que si $p' \leq p_2$, alors $y(p')$ et $y(p'')$ ont des valeurs imaginaires, c'est-à-dire $p'' < p_6$. Par conséquent

$$(38) \quad \begin{cases} \text{la relation } x(p_2) < x(p_6) \text{ est équivalente à la relation } p' < p_2 \text{ et la} \\ \text{relation } x(p_2) > x(p_6) \text{ à la relation } p' > p_2. \end{cases}$$

Si $p' = p_2$, alors le tableau 14 et (32) donnent $y(p') = y(p_2) = 0$, donc $p'' = p_6$, par conséquent

$$(39) \quad \text{si } p' = p_2, \text{ alors } x(p_2) = x(p_6)$$

Or, vu la forme de e de notre cas, la relation $f_3(p) = 0$ donnée par (21) est équivalente à la relation

$$(40) \quad f_{15}(p) = (1+p)^{2e} (p-e)^{1-e} (p+e)^{-(1+e)} = C^{-2e},$$

de sorte que $f_{15}'(p) = 2e(1-e^2)(1+p)^{2e-1}(p-e)^{-e}(p+e)^{-(2+e)} > 0$ pour $p \in \left(-1, -\frac{1+e^2}{2}\right)$. On constate donc sur la figure 16 que

$$(41) \quad \begin{cases} \text{si } C \text{ croît de } \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}} \text{ à } C_1 > 1, \text{ la racine } p_2 = p_2(C, e) \text{ du tableau 14} \\ \text{décroît de } p_2 \left[\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}}, e\right] = -\frac{1+e^2}{2} \text{ à } p_2(C_1, e). \end{cases}$$

Or, on déduit de (40) que $p_2(1, e)$ est la racine de l'équation $f_{15}(p) - 1 = 0$ et-tenant compte de la forme de e -que $f_{16}(e) = f_{15}\left(-\frac{2+e+e^2}{3+e}\right) - 1 = \frac{(1+e)^2}{2^{2e}(1-e)^{1-e}} - 1$, de sorte que $f_{16}'(e) = \frac{(1+e)^2}{2^{2e}(1-e)^{1-e}} f_{17}(e)$, avec $f_{17}(e) = 1 - 2 \log 2 + \frac{2}{1+e} + \log(1-e)$, donc $f_{17}'(e) = -\left(\frac{1}{1-e} + \frac{2}{(1+e)^2}\right) < 0$. On déduit donc du tableau 20 que $f_{16}\left(-\frac{2+e+e^2}{3+e}\right) - 1 > 0$, auquel cas (41) et les tableaux 19 et 18 donnent $p' > -\frac{2+e+e^2}{3+e} > p_2(1, e) > p_2(C_1, e)$,

ce qui donne avec (41) la proposition : quand C croît de $\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}}$ à C_1 , la différence $p' - p_2(C, e)$ croît de $\frac{1+e^2}{2} + p' < 0$ à $p' - p_2(C_1, e) > 0$.

On en déduit à l'aide de (38) et de (39) $\text{sg}(x(p_2) - x(p_6)) = \text{sg}(C - \bar{C})$, avec $x(p_2) = x(p_6)$ quand $C = \bar{C}$, où $\bar{C}$ est la valeur de C comprise dans l'intervalle $\left[\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}}, \infty\right)$ pour laquelle $p' = p_2(C, e)$. Cette valeur est donc unique et $\bar{C} \in \left[\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}}, 1\right)$.

Puisque p' et p'' sont-ainsi qu'il ressort de (33) et (34)-des fonctions de e , on désignera p' par $p_0(e)$. Avec ces définitions de C et de p_0 , on déduit de (40)

$$\bar{C}^{-2}(e) = (1+p_0)^2 (p_0-e)^{-1+\frac{1}{e}} (p_0+e)^{-(1+\frac{1}{e})}.$$

Vu la forme spéciale de e de notre cas, l'expression ci-dessus peut s'écrire.

$$(42) \quad \bar{C}^{-2}(e) = (1+p_0)^2 (e-p_0)^{-1+\frac{1}{e}} (-e-p_0)^{-(1+\frac{1}{e})},$$

d'où l'on obtient la valeur donnée pour $\bar{C}(e)$ dans l'énoncé du lemme, ce qui en démontre le premier point.

Tableau 19

p	-1	$p_2(1, e)$			$-\frac{1+e^2}{2}$
$f_{15}(p) - 1$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 - 1$

Tableau 20

e	0	e_2			1
$f_{17}(e)$	$3 - 2 \log 2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f_{16}(e)$	0	$\nearrow$	$f_{16}(e_2)$	$\searrow$	0

2°. En tenant à nouveau compte de cette forme spéciale de e , on déduit de (36) que p_0 est la racine comprise dans l'intervalle $\left(-\frac{2+e+e^2}{3+e}, -\frac{2-e+e^2}{3-e}\right) \subset (-\infty, -e)$ de la fonction de p .

$$(43) \quad f_{15}(p, e) = \left(\frac{(1-e)(e-p)}{2+e+e^2+(3+e)p} \right)^{1-e} \left(\frac{2-e+e^2+(3-e)p}{(1+e)(e+p)} \right)^{1+e} - 1.$$

Les expressions (42) et (43) sont définies pour tout $e \in (0, 1)$ et $p \in \left(-\frac{2+e+e^2}{3+e}, -\frac{2-e+e^2}{3-e}\right)$.

On peut donc considérer $\bar{C}(e)$ et $p_0(e)$ donnés respectivement par (42) et (43) comme des fonctions de e , définies dans l'intervalle $(0, 1)$ entier, en tenant compte bien entendu que dans notre cas elles ne prennent que des valeurs données par des valeurs de la forme $\frac{2B+1}{2A+1}$ de e . Dans ces conditions, on déduit de (42) $\bar{C}^{-3}(e)\bar{C}'(e) = -\frac{1}{e}(1+p_0)(e-p_0)^{-2+\frac{1}{e}}(-e-p_0)^{-(2+\frac{1}{e})}[(1+p_0)(e^2-p_0)+e(1-e^2)p'_0(e)]$, où l'on a désigné par $p'_0(e)$, $\bar{C}'(e)$ les dérivées de $p_0(e)$, $\bar{C}(e)$, de sorte que

$$(44) \quad \text{sg} \bar{C}'(e) = -\text{sg}[(1+p_0)(e^2-p_0)+e(1-e^2)p'_0(e)].$$

Or, (43) donne

$$p'_0(e) = - \frac{\frac{\partial f_{15}(p, e)}{\partial e}}{\frac{\partial f_{15}(p, e)}{\partial p}} \bigg|_{p=p_0}.$$

En remplaçant dans cette expression $\frac{\partial f_{15}(p, e)}{\partial e}$ et $\frac{\partial f_{15}(p, e)}{\partial p}$ tirées respectivement de (43) et (37), il vient $(1+p_0)(e^2-p_0)+e(1-e^2)p'_0(e) = \frac{1}{2(1+p_0)}(3+e^2+4p_0)(p_0^2-e^2) - \frac{1}{8(1+p_0)^2}[2-e+e^2+(3-e)p_0][2+e+e^2+(3+e)p_0](p_0^2-e^2) \log \frac{[2-e+e^2+(3-e)p_0][2+e+e^2+(3+e)p_0]}{-(1-e^2)(p_0^2-e^2)}$.

En tenant compte que $(p_0^2-e^2)[2-e+e^2+(3-e)p_0][2+e+e^2+(3+e)p_0] < 0$, on en déduit donc à l'aide de (44)

$$(45) \quad \text{sg} \bar{C}'(e) = \text{sg} f_{19}(p_0),$$

où

$$f_{19}(p) = \frac{4(1+p)(3+e^2+4p)}{[2-e+e^2+(3-e)p][2+e+e^2+(3+e)p]} + \log \frac{-(1-e^2)(p^2-e^2)}{[2-e+e^2+(3+e)p][2+e+e^2+(3+e)p]},$$

de sorte que

$$f'_{19}(p) = 16(1+p)^2 \frac{e^2(5+3e^2)+2(1+6e^2+e^4)p+(3+5e^2)p^2}{(p^2-e^2)[2-e+e^2+(3-e)p]^2[2+e+e^2+(3+e)p]^2}.$$

L'on constate de suite que pour $e \in (0, 1)$ la racine $p = \frac{1}{3+5e^2} \times [-(1+6e^2+e^4)+(1-e^2)\sqrt{1-e^2+e^4}]$ de $f'_{19}(e)$ est plus grande que $-\frac{2-e+e^2}{3-e}$, et que la racine $p = -\frac{1}{3+5e^2}[1+6e^2+e^4+(1-e^2)\sqrt{1-e^2+e^4}] \in \left(-\frac{2+e+e^2}{3+e}, -\frac{2-e+e^2}{3-e}\right)$,

Tableau 21

p	$-\frac{2+e+e^2}{3+e}$	$-\frac{1+6e^2+e^4+(1-e^2)\sqrt{1-e^2+e^4}}{3+5e^2}$	$-\frac{2-e+e^2}{3-e}$
$f'_{19}(p)$		+	-
$f_{19}(p)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_{20}(e) \searrow -\infty$

Dans le tableau 21, $f_{20}(e) = -\frac{6}{-1 + 2e^2 + \sqrt{1 - e^2 + e^4}} + \log \frac{(1 + \sqrt{1 - e^2 + e^4})^2}{e^2(1 - e^2)}$; si l'on pose $x = e^2$, il vient donc $f_{20}(e) = f_{21}(x) = -\frac{6}{-1 + 2x + \sqrt{1 - x + x^2}} + \log \frac{(1 + \sqrt{1 - x + x^2})^2}{x(1 - x)}$ de sorte que $f'_{21}(x) = -2 \frac{(1 - 2x)(1 - x + x^2) - (1 + 2x - 2x^2)\sqrt{1 - x + x^2}}{x(1 - x)\sqrt{1 - x + x^2}(-1 + 2x + \sqrt{1 - x + x^2})^2} > 0$, pour $x \in (0, 1)$, ainsi qu'on le constate immédiatement en faisant $f'_{21}(x) = 0$.

On déduit donc du tableau 22 que si $x \in (0, \alpha)$, donc $e \in (0, \sqrt{\alpha})$, alors $f_{21}(x) = f_{20}(e) < 0$, par conséquent au tableau 21 $f_{19}(p) < 0$, en particulier

Tableau 22

x	0	α	1
$f_{21}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	∞

$f_{19}(p_0) < 0$, auquel cas (45) donne $\bar{C}'(e) < 0$. Or, pour $e \in (0, \frac{1}{3})$, l'on a $-\frac{2}{3} \in \left(-\frac{2+e+e^2}{3+e}, -\frac{2-e+e^2}{3-e}\right)$, de sorte que $p_0(0) = \lim_{e \rightarrow 0} p_0(e) = -\frac{2}{3}$, auquel cas (42) donne $\bar{C}(0) = \lim_{e \rightarrow 0} \bar{C}(e) = -\frac{p_0(0)}{1 + p_0(0)} E^{\frac{1}{p_0(0)}} = 2E^{-\frac{3}{2}}$, ce qui démontre le deuxième point de lemme.

3°. Aux cas intéressés par ce point on a $x(p_2) \geq a$, alors que $x(p_6) < a$ (lemme 5, 3 - ème point).

Lemme 2. Si $C \geq \bar{C}(0) = 2E^{-\frac{3}{2}}$, alors pour $e \in (0, e_3)$ on a $x(p_2) < x(p_0)$. Ici $e_3 = e_3(C) \in (0, 1)$ est la [seule] racine de la fonction $f_{22}(e) = \left(\frac{C}{2}\right)^{\frac{2e}{1-e^2}} \frac{(1+e)^{1+e}}{(1-e)^2} - 1$, comprise dans l'intervalle $[0, 1]$

Démonstration. On déduit de (40)

$$f_{22}(e) = C^{2e} \left(f_{15} \left(-\frac{2-e+e^2}{3-e} \right) - C^{-2e} \right) = \left(\frac{C}{2} \right)^{\frac{2e}{1-e^2}} \frac{(1+e)^2}{(1-e)^2} - 1,$$

de sorte que $f'_{22}(e) = \left(\frac{C}{2}\right)^{\frac{2e}{1-e^2}} \frac{(1+e)^{1+e}}{(1-e)^2} f_{23}(e)$, avec $f_{23}(e) = 1 + 2 \log C - 2 \log 2 + \frac{2}{1-e} + \log(1+e)$ donc $f'_{23}(e) = \frac{1}{1+e} + \frac{2}{(1-e)^2} > 0$. Si donc $f_{23}(0) = 3 + 2 \log \frac{C}{2} < 0$, par conséquent $C < 2E^{-\frac{3}{2}}$, on obtient le tableau 23 qui donne $f_{15} \left(-\frac{2-e+e^2}{3-e} \right) - C^{-2e} < 0$ pour $e \in (0, e_3)$.

Tableau 23

e	0	e_4	e_2	1			
$f_{23}(e)$	$f_{23}(0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞		
$f_{22}(e)$	0	$\searrow$	$f_{22}(e_4)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

On en conclut à l'aide du tableau 19 construit pour la fonction $f_{15}(p) - C^{-2e}$ que $p' < -\frac{2-e+e^2}{3-e} < p_2(C, e)$, auquel cas (38) donne $x(p_2) < x(p_0)$

Lemme 3. Au cas 2.1. on a $x(p_6) > -x(p_2) > 0$.

Démonstration. Si $x(p_6) < -x(p_2)$, alors en construisant à l'aide de (30) et de la fig 6 la branche de (C) donnée par $p \in \left[-\frac{1+e^2}{2}, p_2\right]$ au cas 2.1. et à l'aide du tableau 16 la symétrique par rapport à Oy de la branche de (C) donnée par $p \in [p_6, e]$, on obtient la figure 17, sur laquelle on constate :

$$(46) \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe deux valeurs } p' \text{ et } p'' \text{ de } p \text{ avec } -\frac{1+e^2}{2} < p' < p_2 < \\ < -e < p_6 < p'' < e \text{ qui vérifient les relations } x(p') = x(p'') \text{ et} \\ y(p') = y(p''). \end{array} \right.$$

c'est-à-dire la relation

$$(46_1) \quad (1 + e^2 + 2p') \left[\frac{1}{p'^2 - e^2} \left(\frac{p' - e}{p' + e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]^{\frac{1}{2}} = \\ = -(1 + e^2 + 2p'') \left[\frac{1}{p''^2 - e^2} \left(\frac{p'' - e}{p'' + e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

et la relation (34). On en déduit $p' = p''$, contre la relation $p' < p''$ de (46). Si $x(p_2) = -x(p_6)$, alors on a les relations (46) et (34) avec p_2 à la place de p' et p_6 à la place de p'' , par conséquent on en déduit $p_2 = p_6$, contrairement au tableau 14, ce qui démontre le lemme.

Lemme 4. La branche de (C) donnée par $p \in [p_6, e)$ est située „sous” la branche donnée par $p \in [e, \infty)$ aux cas 2.1—2.13, respectivement $p \in [e, p_3]$ au cas 2.14, au sens que de deux points de même abscisse, chacun sur une branche, celui situé sur la branche donnée par $p \in [p_6, e)$ a l'ordonnée plus petite que celui situé sur la branche donnée par $p \in [e, \infty)$, respectivement $p \in [e, p_3]$.

Démonstration. On considérera à nouveau deux valeurs de p , $p' \in [p_6, e)$ et $p'' \in [e, \infty)$, respectivement $p'' \in [e, p_3]$, qui donnent des points de la même abscisse, c'est-à-dire conformément à (19)

$$(47) \quad \left(\frac{1+e^2+2p'}{1+p'} \right)^2 \frac{(1+p')^2}{p'^2-e^2} \left(\frac{p'-e}{p'+e} \right)^{\frac{1}{e}} = \left(\frac{1+e^2+2p''}{1+p''} \right)^2 \frac{(1+p'')^2}{p''^2-e^2} \left(\frac{p''-e}{p''+e} \right)^{\frac{1}{e}}.$$

Or, $-1 < p' < p''$, de sorte que

$$(48) \quad \frac{1+e^2+2p'}{1+p'} - \frac{1+e^2+2p''}{1+p''} < 0$$

et le tableau 14 donne $p' > p_6 > -e > -\frac{1+e^2}{2}$, de sorte que $1+e^2+2p'' > e^2+1+2p' > 0$, donc $\frac{1+e^2+2p'}{1+p'} + \frac{1+e^2+2p''}{1+p''} > 0$.

On en déduit à l'aide de (48) $\left(\frac{1+e^2+2p'}{1+p'} \right)^2 < \left(\frac{1+e^2+2p''}{1+p''} \right)^2$, donc à l'aide de (47) $\frac{(1+p')^2}{p'^2-e^2} \left(\frac{p'-e}{p'+e} \right)^{\frac{1}{e}} > \frac{(1+p'')^2}{p''^2-e^2} \left(\frac{p''-e}{p''+e} \right)^{\frac{1}{e}}$. Cette relation s'écrit à l'aide de (19) $y(p') < y(p'')$ et démontre le lemme.

Lemme 5. 1°. Aux cas 2.1, 2.2 et au cas 2.3 avec $\left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}} < C \leq \frac{1}{2}$, on a $x(p_6) > Ca$; au cas 2.3 avec $\frac{1}{2} < C \leq \sqrt{3} E^{-1}$ et aux cas 2.4—2.12 on a $\text{sg}(x(p_6) - Ca) = \text{sg}(C_2 - C)$, avec $x(p_6) = Ca$ quand $C = C_2$; aux cas 2.13

et 2.14 on a $x(p_6) < Ca$. Ici $C_2 = C_2(e) \in \left(\frac{1+e^2}{2}, \frac{1+e}{2} \right)$ est la [seule] racine comprise dans cet intervalle de la fonction

$$f_{24}(C) = 1 - C^2(1-e)^{1-\frac{1}{e}}(1+e)^{1+\frac{1}{e}}[2C-(1+e)]^{-1+\frac{1}{e}}[2C-(1-e)]^{-(1+\frac{1}{e})}$$

2°. Au cas 2.3 avec $C > \frac{1}{2}$ et aux cas 2.4—2.12 on a $\text{sg}(x(p_6) - Ca) = \text{sg}(e - e_5)$, avec $x(p_6) = Ca$ quand $e = e_5$. Ici $e_5 = e_5(C) \in (2C-1, 1)$ est la (seule) racine comprise dans cet intervalle de la fonction :

$$f_{26}(e) = 1 - C^2(1-e)^{1-\frac{1}{e}}(1+e)^{1+\frac{1}{e}}(1-2C+e)^{-1+\frac{1}{e}}(2C-1+e)^{-(1+\frac{1}{e})}.$$

3° Dans tous les cas 2.1—2.14 on a $x(p_6) < a$.

Démonstration. 1° On déduit de (19) et des tableaux 16 et 17 $x(p_6) = \frac{a}{2} \frac{1+e^2+2p_6}{1+p_6}$, de sorte que

$$(49) \quad x(p_6) - Ca = \frac{a}{2(1+p_6)} [2(1-C)p_6 + 1 + e^2 + 2C].$$

Si $C < e \leq \frac{1}{3}$, alors $C < e \leq \frac{1-e}{2}$, donc $\frac{2C-(1+e^2)}{2(1-C)} < e < p_6$. Or, pour $C < 1$ (49) donne

$$(50) \quad \text{sg}(x(p_6) - Ca) = \text{sg}\left(p_6 - \frac{2C-(1+e^2)}{2(1-C)}\right),$$

de sorte que $x(p_6) > Ca$.

Si $C < e$ et $e > \frac{1}{3}$, alors si $C \leq \frac{1-e}{2}$, on a le cas précédent. Si $C < e < \frac{1+e}{2}$ et $e > \frac{1}{3}$ mais $C > \frac{1-e}{2}$, on a $\frac{2C-(1+e^2)}{2(1-C)} \in (-e, e)$.

Or, pour $p \in (-e, \infty)$, le tableau 14 donne

$$\text{sg}(p_6 - p) = -\text{sg} f_3(p),$$

de sorte que (50) donne

$$\text{sg}(x(p_6) - Ca) = -\text{sg} f_{24}(C),$$

où

$$(51) \quad f_{24}(C) = f_3 \left(\frac{2C - (1 + e^2)}{2(1 - C)} \right) = \\ = 1 - (1 - e)^{1 - \frac{1}{e}} (1 + e)^{1 + \frac{1}{e}} C^2 [2C - (1 + e)]^{-1 + \frac{1}{e}} [2C - (1 - e)]^{-\left(1 + \frac{1}{e}\right)}$$

de sorte que

$$f'_{24}(C) = -2(1 - e)^{2 - \frac{1}{e}} (1 + e)^{2 + \frac{1}{e}} C [2C - (1 + e)]^{-2 + \frac{1}{e}} [2C - (1 - e)]^{-\left(2 + \frac{1}{e}\right)}$$

Tableau 24

C	0	C ₁	$\frac{1-e}{2}$	$\frac{1+e^2}{2}$	C ₂	$\frac{1+e}{2}$	1
f ₂₄ (C)	-		∞	+		0 ou ∞	-
f ₂₄ '(C)	1	> 0	> ∞	∇	0	∇ 1	> 0

La position de $\frac{1+e^2}{2}$ dans le tableau 24 est donnée par la relation $f_{24}\left(\frac{1+e^2}{2}\right) = -\left(\frac{1-e^2}{2e}\right)^2 < 0$, tirée de (51) avec la valeur $\frac{2B+1}{2A+1}$ de e . Le tableau 24 donne donc $C_1 < \frac{1-e}{2} < C < e < \frac{1+e^2}{2}$, de sorte que $f_{24}(C) < 0$, auquel cas (51) donne $x(p_6) > Ca$.

Si $e \leq C \leq \frac{1+e^2}{2}$, on déduira de (21) $f_3(0) = 1 - \frac{C^2}{e^2} \leq 0$, auquel cas le tableau 14 donne $p_6 \geq 0$ (égalité au seul cas $C = e$), et $\frac{2C - (1 + e^2)}{2(1 - C)} \leq 0$, de sorte que (50) donne $x(p_6) > Ca$. Si $\frac{1+e^2}{2} < C < C_2$, puisque $\frac{1-e}{2} < C < \frac{1+e}{2}$, on a $\frac{2C - (1 + e^2)}{2(1 - C)} \in (-e, e)$, par conséquent la relation (51) qui donne $x(p_6) > Ca$. Ainsi donc

$$(53) \quad \text{Si } 0 < C < C_2, \text{ alors } x(p_6) > Ca.$$

$$(53) \quad \text{Si } C = C_2, (51) \text{ donne } p_6 = \frac{2C - (1 + e^2)}{2(1 - C)}^* \text{ et (49) } x(p_6) = Ca.$$

*) attendu que p_6 et $\frac{2C - (1 + e^2)}{2(1 - C)}$ appartiennent à l'intervalle $(-e, e)$ (tableaux 14 et 24).

Si $C_2 < C < 1$, alors $f_{24}(C) > 0$ et $\frac{2C - (1 + e^2)}{2(1 - C)} \in (-e, \infty)$, de sorte que (51) donne $x(p_6) < Ca$. Par conséquent

$$(54) \quad \text{Si } C_2 < C < 1, \text{ alors } x(p_6) < Ca.$$

$$(55) \quad \text{Si } C \geq 1, (49) \text{ donne à nouveau } x(p_6) < Ca.$$

Par conséquent (52)-(55) donnent

$$(56) \quad \text{sg } x(p_6) - Ca = \text{sg}(C_2 - C), \text{ avec } x(p_6) = Ca \text{ quand } C = C_2,$$

où C_2 est la racine comprise dans l'intervalle $\left(\frac{1+e^2}{2}, \frac{1+e}{2}\right)$ de la fonction $f_{24}(C)$ de (51), ce qui démontre le premier point du lemme.

2°. On supposera $\frac{1}{2} < C < 1$ et on considérera l'expression $f_{24}(C)$ en question comme une fonction de e . Attendu la forme spéciale de e dans notre cas, on a

$$(57) \quad f_{24}(C) = \begin{cases} f_{25}(e) = \\ = 1 - C^2(1 - e)^{1 - \frac{1}{e}} (1 + e)^{1 + \frac{1}{e}} (2C - 1 - e)^{-1 + \frac{1}{e}} (2C - 1 + e)^{-\left(1 + \frac{1}{e}\right)} \\ \quad \text{si } 0 < e \leq 2C - 1 \\ f_{26}(e) = \\ = 1 - C^2(1 - e)^{1 - \frac{1}{e}} (1 + e)^{1 + \frac{1}{e}} (-2C + 1 + e)^{-1 + \frac{1}{e}} (2C - 1 + e)^{-\left(1 + \frac{1}{e}\right)} \\ \quad \text{si } 2C - 1 \leq e < 1, \end{cases}$$

de sorte que

$$f'_{25}(e) = -\frac{C^2}{e^2} (1 - e)^{1 - \frac{1}{e}} (1 + e)^{1 + \frac{1}{e}} (2C - 1 - e)^{-1 + \frac{1}{e}} (2C - 1 + e)^{-\left(1 + \frac{1}{e}\right)} f_{27}(e)$$

avec

$$f_{27}(e) = 4e \frac{(1 - C)(1 - 2C)}{(2C - 1 - e)(2C - 1 + e)} + \log \frac{(1 - e)(2C - 1 + e)}{(1 + e)(2C - 1 - e)},$$

donc

$$f'_{27}(e) = 8e^2(1-C)^2 \frac{1-4C^2-e^2}{(1-e^2)(2C-1-e)^2(2C-1+e)^2} < 0$$

$$f_{27}(e) < f_{27}(0) = 0, f'_{25}(e) > 0, f_{25}(e) > f_{25}(0) = \left(1 + \frac{C}{2C-1} E^{2\frac{C-1}{2C-1}}\right) f_{28}(C),$$

avec

$$f_{28}(C) = 1 - \frac{C}{2C-1} E^{2\frac{C-1}{2C-1}}$$

de sorte que

$$f'_{28}(C) = \frac{E^{2\frac{C-1}{2C-1}}}{(1-2C)^3} < 0,$$

donc pour

$$C \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], f_{28}(C) > f_{28}(1) = 0,$$

par conséquent

(58)

$$f_{25}(e) > 0.$$

Tableau 25

e	$2C-1$	e_5	e_6	1
$f_{29}(e)$	∞	$\succ$	$0 \succ -\infty$	
$f_{26}(e)$	$1 \succ$	$0 \succ f_{26}(e_6) \nearrow 0$		

On a dans (57)

$$f'_{26}(e) = -\frac{C^2}{e^2} (1-e)^{1-\frac{1}{e}} (1+e)^{1+\frac{1}{e}} (1-2C+e)^{-1+\frac{1}{e}} (2C-1+e)^{-(1+\frac{1}{e})} f_{29}(e),$$

avec

$$f_{29}(e) = 4e \frac{(1-C)(-1+2C)}{(1-2C+e)(2C-1+e)} + \log \frac{(1-e)(2C-1+e)}{(1+e)(1-2C+e)},$$

de sorte que $f'_{29}(e) = f'_{27}(e) < 0$. On déduit donc de (57), (58) et du tableau 25 que si $C \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, alors

$$\text{sg } f_{24}(C) = \text{sg } (e_5 - e), \text{ avec } f_{24}(C) = 0$$

quand $e = e_5$. On en déduit à l'aide du tableau 24 et de (56) que : si $0 < C \leq \frac{1}{2}$, alors $x(p_6) < Ca$; si $\frac{1}{2} < C < 1$, alors $\text{sg } (x(p_6) - Ca) = \text{sg } (e - e_5)$, avec $x(p_6) = Ca$ quand $e = e_5$; si $C \geq 1$, alors $x(p_6) < Ca$, ce qui, avec la tableau 10, démontre le deuxième point du lemme.

3°. On déduit à l'aide de l'expression de $x(p_6)$ donnée devant la formule (49) : $\frac{1}{a} [x(p_6) - a] = -\frac{1-e^2}{2(1+p_6)} < 0$.

Lemme 6. 1°. Au cas 11, si $C < C_5$, on a $\text{sg } [x(p_2) - Ca] = \text{sg } (C_3 - C)$ avec $x(p_2) = Ca$ quand $C = C_3$. Ici, $C_3 = C_3(e) \in \left(0, \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}}\right)$ est la (seule) racine comprise dans cet intervalle de la fonction :

$$f_{32}(C) = 1 - C^2(1-e)^{1-\frac{1}{e}} (1+e)^{1+\frac{1}{e}} (1+e-2C)^{-1+\frac{1}{e}} (1-e-2C)^{-(1+\frac{1}{e})}$$

et $C_5 \in (0, E^{-2})$ est la racine comprise dans cet intervalle de la fonction

$$f_{38}(C) = 1 - \frac{C}{1-2C} E^{2\frac{1-C}{1-2C}}. \text{ Si } C \geq C_5; \text{ alors } x(p_2) < Ca.$$

2°. Si $C \in (0, C_5)$, alors au cas 1.1 on a $\text{sg } [x(p_2) - Ca] = \text{sg } (e_7 - e)$, avec $x(p_2) = Ca$ quand $e = e_7$. Ici $e_7 = e_7(C) \in (0, 1-2C)$ est la (seule) racine comprise dans cet intervalle de la fonction $f_{33}(e) = f_{32}(C)$.

3°. Au cas 1.3, si $C < C_6$, alors $\text{sg } [x(p_2) + Ca] = \text{sg } (C_4 - C)$, avec $x(p_2) = -Ca$ quand $C = C_4$. Ici $C_4 = C_4(e) \in \left[\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}}, 1\right]$ est la (seule) racine comprise dans cet intervalle de la fonction

$$f_{39}(C) = 1 - C^2(1-e)^{1-\frac{1}{e}} (1+e)^{1+\frac{1}{e}} (1+e+2C)^{-1+\frac{1}{e}} (1-e+2C)^{-(1+\frac{1}{e})}$$

et $C_6 \in \left(E^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\right)$ est la racine comprise dans cet intervalle de la fonction

$$f_{43}(C) = 1 - \frac{C}{1+2C} E^{2\frac{1+C}{1+2C}}. \text{ Si } C \geq C_6 \text{ alors } x(p_2) < -Ca. \text{ Donc aux cas}$$

1.4—1.14, $x(p_2) < -Ca$.

4°. Au cas 1.3, si $C < C_6$, alors $\text{sg } (x(p_2) + Ca) = \text{sg } (e_9 - e)$, avec $x(p_2) = -Ca$ quand $e = e_9$. Ici $e_9 = e_9(C) \in (0, 1)$ est la (seule) racine comprise dans cet intervalle de la fonction de e $f_{40}(e) = f_{39}(C)$.

5°. Au cas 1.14 on a $x(p_3) < a$.

6°. Au cas 1.14 les branches données par $p \in [p_1, -1]$ et $p \in [-1, p_2]$ ont le seul point commun donné par $p = -1$, donc $x(p_2) < x(p_1)$.

Démonstration. 1°. Au cas 1.1, $1 + e^2 + 2p_2 > 0$, $1 + p_2 > 0$, $x(p_2) > 0$, (tableau 8). Aux cas 1.3 — 1.14, $1 + e^2 + 2p_2 < 0$, $1 + p_2 > 0$, $x(p_2) < 0$, (tableaux 11, 12, 13). Par conséquent (19) donne dans tous les cas

$$x(p_2) = \frac{a}{2} \frac{1 + e^2 + 2p_2}{1 + p_2}$$

donc

$$(59) \quad x(p_2) - Ca = \frac{a}{2(1 + p_2)} [2(1 - C)p_2 + 1 + e^2 - 2C],$$

de sorte que pour $C < 1$, $\text{sg } [x(p_2) - Ca] = \text{sg } \left[p_2 - \frac{2C - (1 + e^2)}{2(1 - C)} \right]$. Or, au tableau 14, pour $C < 1$ et $p < -e$, on a $\text{sg } (p_2 - p) = \text{sg } f_3(p)$. Mais

$$(60) \quad \left(\frac{1 - e}{1 + e} \right)^{\frac{1}{e}} < \frac{1 - e}{2},$$

parceque la relation en question s'écrit $f_{30}(e) = (1 - e)^{-1 + \frac{1}{e}} (1 + e)^{-\frac{1}{e}} - \frac{1}{2} < 0$,

Or, $f_{30}(e) = \frac{1}{e^2} (1 - e)^{-1 + \frac{1}{e}} (1 + e)^{-\frac{1}{e}} f_{31}(e)$ avec $f_{31}(e) = -e \frac{2 + e}{1 + e} + \log \frac{1 + e}{1 - e}$,

de sorte que $f_{31}'(e) = e \frac{2 + e + e^2}{(1 - e)(1 + e)^2} > 0$, $f_{31}(e) > f_{31}(0) = 0$, $f_{30}'(e) > 0$,

$f_{30}(e) < f_{30}(1) = 0$. Par conséquent au cas 1.1, $C < \left(\frac{1 - e}{1 + e} \right)^{\frac{1}{e}} < \frac{1 - e}{2}$, donc $-1 < \frac{2C - (1 + e^2)}{2(1 - C)} < -e$, on en déduit à l'aide de (59).

$\text{sg } [x(p_2) - Ca] = \text{sg } f_{32}(C)$, où

$$(61) \quad f_{32}(C) = f_3 \left(\frac{2C - (1 + e^2)}{2(1 - C)} \right) = \\ = 1 - (1 - e)^{1 - \frac{1}{e}} (1 + e)^{1 + \frac{1}{e}} C^2 (1 + e - 2C)^{-1 + \frac{1}{e}} (1 - e - 2C)^{-(1 + \frac{1}{e})}$$

de sorte que

$$f_{32}'(C) = -2(1 - e)^{2 - \frac{1}{e}} (1 + e)^{2 + \frac{1}{e}} C(1 + e - 2C)^{-2 + \frac{1}{e}} (1 - e - 2C)^{-(2 + \frac{1}{e})} < 0$$

pour

$$C \in \left[0, \left(\frac{1 - e}{1 + e} \right)^{\frac{1}{e}} \right],$$

conformément à (60). Or,

$$f_{32} \left[\left(\frac{1 - e}{1 + e} \right)^{\frac{1}{e}} \right] = 1 - \frac{\left[1 - \frac{2}{1 + e} \left(\frac{1 - e}{1 + e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]^{-1 + \frac{1}{e}}}{\left[1 - \frac{2}{1 - e} \left(\frac{1 - e}{1 + e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]^{1 + \frac{1}{e}}} < 0,$$

parceque la fraction qui se déduit de 1 est évidemment plus grande que 1. On en déduit le tableau 26, qui donne avec (61) $\text{sg } [x(p_2) - Ca] = \text{sg } (C_3 - C)$. Si $C = C_3$, $f_{32}(C) = 0$, de sorte qu'attendu que p_2 et $\frac{2C - (1 + e^2)}{2(1 - C)}$ appartiennent à l'intervalle $(-1, -e)$ la tableau 14 donne $p_2 = \frac{2C - (1 + e^2)}{2(1 - C)}$, et (59) $x(p_2) = Ca$, ce qui démontre la premier point du lemme

Tableau 26.

C	0	C_3	$\left(\frac{1 - e}{1 + e} \right)^{\frac{1}{e}}$
$f_{32}(C)$	1	0	$f_{32} \left[\left(\frac{1 - e}{1 + e} \right)^{\frac{1}{e}} \right]$

2°. Si l'on désigne dans (61) $f_{32}(C)$ par $f_{33}(e)$, on a

$$f_{33}'(e) = -\frac{C^2}{e^2} (1 - e)^{1 - \frac{1}{e}} (1 + e)^{1 + \frac{1}{e}} (1 + e - 2C)^{-1 + \frac{1}{e}} (1 - e - 2C)^{-(1 + \frac{1}{e})} f_{34}(e),$$

avec

$$f_{34}(e) = 4e \frac{(1 - C)(1 - 2C)}{(1 + e - 2C)(1 - e - 2C)} + \log \frac{(1 - e)(1 - e - 2C)}{(1 + e)(1 + e - 2C)} = f_{27}(e),$$

de sorte que

$$f'_{34}(e) = 8e^2 \frac{(1-C)^2 (1-4C^2-e^2)}{(1-e^2)(1+e-2C)^2(1-e-2C)^2} > 0$$

pour $e \in (0, 1-2C)$ et $C \in (0, \frac{1}{2})$. On déduit du tableau 10 :

$$(62) \quad \begin{cases} \text{si l'on fixe un } C \in (0, E^{-2}), \text{ alors } \operatorname{sg} \left[C - \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}} \right] = \operatorname{sg}(e - e_8), \\ \text{où } e_8 = e_8(C) \in (0, 1) \text{ est la racine de l'équation en } e: C = \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}}. \end{cases}$$

Or la relation $C > \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}}_{e=1-2C}$ s'écrit $f_{35}(C) = \frac{1}{C} \left(\frac{C}{1-C} \right)^{\frac{1}{1-2C}} - 1 < 0$,

de sorte que

$$f'_{35}(C) = \frac{1}{C^2} \left(\frac{C}{1-C} \right)^{\frac{1}{1-2C}} \frac{f_{35}(C)}{(1-2C)^2},$$

avec

$$f_{36}(C) = \frac{(1-2C)(3-2C)}{1-C} + 2 \log \frac{C}{1-C}, \text{ donc } f'_{36}(C) = \frac{(1-2C)(2-3C+2C^2)}{C(1-C)^2} < 0,$$

de sorte que pour

$$C \in \left(0, \frac{1}{2} \right) \text{ on a } f_{36}(C) < f_{36}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, f'_{35}(C) < 0, f_{35}(C) < f_{35}(0) = 0,$$

auquel cas (62) donne $e_8 < 1-2C$. Si l'on désigne l'expression $f_{32}(C) = f_{33}(e)$ par $f_{37}(C, e)$, on a $f_{37} \left[\left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}}, e \right] = f_{32} \left[\left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}} \right] < 0$, conformément au tableau 26.

Tableau 27.

e	0	e_8
$f_{33}(e)$	$f_{33}(0)$	$f_{33}(e_8)$

En particulier

$$f_{37} \left[\left(\frac{1+e_8}{1-e_8} \right)^{\frac{1}{e_8}}, e_8 \right] = f_{37}(C, e_8) = f_{33}(e_8) < 0,$$

d'où l'on déduit le tableau 27, construit en tenant compte que

$$f_{34}(e) > f_{34}(0) = 0, f'_{33}(e) < 0. \text{ Or } f_{33}(0) = \left(1 + \frac{C}{1-2C} E^2 \frac{1-C}{1-2C} \right) f_{38}(C),$$

avec

$$f_{38}(C) = 1 - \frac{C}{1-2C} E^2 \frac{1-C}{1-2C}, \text{ de sorte que } f'_{38}(C) = -\frac{E^2 \frac{1-C}{1-2C}}{(1-2C)^3} < 0,$$

Puisque

$$f_{38}(0) = 1, f_{38}(E^{-2}) = \frac{1}{E^2 - 2} \left(E^2 - 2 - E^2 \frac{E^2 - 1}{E^2 - 2} \right) < 0,$$

on déduit qu'il existe un $C_5 \in (0, E^{-2})$ avec $f_{38}(C_5) = 0$ et $\operatorname{sg} f_{38}(C) = \operatorname{sg}(C_5 - C)$ pour $C \in (0, E^{-2})$. Si donc $C \in (0, C_5)$, le tableau 27 atteste l'existence d'un $e_7 \in (0, e_8) \subset (0, 1-2C)$ avec $\operatorname{sg}(x(p_2) - Ca) = \operatorname{sg} f_{33}(e) = \operatorname{sg}(e_7 - e)$ et $f_{33}(e_7) = 0$.

Si $C_5 \leq C < \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}}$, alors le tableau 27 donne $f_{33}(e) < 0$, donc $x(p_2) < Ca$, ce qui démontre le deuxième point du lemme.

3° (19) donne $\operatorname{sg}(x(p_2) + Ca) = \operatorname{sg} \left[p_2 + \frac{1+e^2+2C}{2(1+C)} \right]$, auquel cas le tableau 14 donne — attendu que $-\frac{1+e^2+2C}{2(1+C)} \in (-1, -e)$;

$$(63) \quad \begin{cases} \operatorname{sg}(x(p_2) + Ca) = \operatorname{sg} f_{39}(C), \text{ où } f_{39}(C) = f_3 \left(-\frac{1+e^2+2C}{2(1+C)} \right) = \\ = 1 - (1-e)^{1-\frac{1}{e}} (1+e)^{1+\frac{1}{e}} C^2 (1+e+2C)^{-1+\frac{1}{e}} (1-e+2C)^{-(1+\frac{1}{e})} \end{cases}$$

de sorte que

$$f'_{39}(C) = -2C(1-e)^{2-\frac{1}{e}} (1+e)^{2+\frac{1}{e}} (1+e+2C)^{-2+\frac{1}{e}} (1-e+2C)^{-(2+\frac{1}{e})} < 0.$$

On a

$$f_{39}\left(\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}}\right) = 1 - \frac{\left(1 + \frac{2}{1+e} \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}}\right)^{-1+\frac{1}{e}}}{\left(1 + \frac{2}{1-e} \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}}\right)^{1+\frac{1}{e}}} > 0,$$

parceque la fonction qui se déduit de 1 est évidemment plus petite que l'unité, et $f_{39}(1) = f_8(e) < 0$, ainsi qu'on le déduit du tableau 7 et de (26). Il en résulte le tableau 28, qui donne avec (63) $\text{sg}[x(p_2) + Ca] = \text{sg}(C_4 - C)$

Tableau 28.

C	$\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}}$	C_4	1	∞
$f_{39}(C)$	$f_{39}\left(\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}}\right)$	> 0	$> f_{39}(1)$	$> f_{39}(\infty)$

Si $C = C_4$, alors $x(p_2) = -Ca$ (premier point, attendu que p_2 et $-\frac{1+e^2+2C}{2(1+C)}$ appartiennent à l'intervalle $(-1, -e)$), ce qui démontre le 3-ème point du lemme.

4°. Si l'on désigne dans (63), $f_{39}(C) = f_{40}(e)$, on a

$$f'_{40}(e) = -\frac{C^2}{e^2} (1-e)^{1-\frac{1}{e}} (1+e)^{1+\frac{1}{e}} (1+e+2C)^{-1+\frac{1}{e}} (1-e+2C)^{-(1+\frac{1}{e})} f_{41}(e),$$

avec

$$f_{41}(e) = 4e \frac{(1+C)(1+2C)}{(1+e+2C)(1-e+2C)} + \log \frac{(1-e)(1-e+2C)}{(1+e)(1+e+2C)},$$

de sorte que

$$f'_{41}(e) = 8e^2(1+C)^2 \frac{1-4C^2-e^2}{(1-e^2)(1+e+2C)^2(1-e+2C)^2}$$

Si donc l'on désigne dans (63) l'expression $f_{39}(C) = f_{40}(e)$ par $f_{42}(C, e)$ on a

$$f_{42}\left(\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}}, e\right) = f_{39}\left(\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{e}}\right) > 0,$$

conformément au tableau 27. En particulier

$$f_{42}\left(\left(\frac{1-e_8}{1+e_8}\right)^{\frac{1}{e_8}}, e_8\right) = f_{42}(C, e_8) = f_{40}(e_8) > 0.$$

On en déduit au cas $C \in (0, E^{-2})$ le tableau 29, qui donne avec (63)

$$\text{sg}(x(p_2) + Ca) = \text{sg}(e_9 - e).$$

Si $e = e_9$, alors $f_{39}(C) = 0$, par conséquent $x(p_2) = -Ca$. Si $E^{-2} \leq C < \frac{1}{2}$, on a le tableau 30, dans lequel

$$f_{40}(0) = \left(1 + \frac{C}{1+2C} E^{2\frac{1+C}{1+2C}}\right) f_{43}(C),$$

avec

$$f_{43}(C) = 1 - \frac{C}{1+2C} E^{2\frac{1+C}{1+2C}},$$

de sorte que

$$f'_{43}(C) = -\frac{E^{2\frac{1+C}{1+2C}}}{(1+2C)^3} < 0.$$

Or,

$$f_{43}(E^{-2}) = 1 - \frac{E^{2\frac{1+E^2}{2+E^2}}}{2+E^2} > 1 - \frac{E^2}{2+E^2} > 0, \quad f_{43}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{E^2}{4} < 0,$$

par conséquent il existe un $C_6 \in \left(E^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\right)$ avec $\text{sg } f_{43}(C) = \text{sg}(C_6 - C)$, $f_{43}(C_6) = 0$.

Si donc $C_6 > C$, $f_{40}(0) > 0$ donc le tableau 30 et (63) donnent

$$\operatorname{sg}(x(p_2) + Ca) = \operatorname{sg} f_{40}(e) = \operatorname{sg}(e_9 - e).$$

Si $e = e_2$, $f_{39}(C) = 0$, donc $x(p_2) = -Ca$.

Tableau 29.

e	e_8	$\sqrt{1-4C^2}$	e_9	e_{10}	1
$f'_{41}(e)$	+	0		—	
$f_{41}(e)$	$f_{41}(e_8)$	$\nearrow f_{41}(\sqrt{1-4C^2})$	$\searrow$	0	$\searrow -\infty$
$f'_{40}(e)$		—		0	+
$f_{40}(e)$	$f_{40}(e_8)$	$\searrow$		0 $\searrow f_{40}(e_{10})$	$\nearrow$ 0

Tableau 30.

e	0	$\sqrt{1-4C^2}$	e_{10}	1
$f'_{41}(e)$	+	0		—
$f_{41}(e)$	0	$\nearrow f_{41}(\sqrt{1-4C^2})$	$\searrow$	0 $\searrow -\infty$
$f'_{40}(e)$		—		0 +
$f_{40}(e)$	$f_{40}(0)$	$\searrow$	$f_{40}(e_{10})$	$\nearrow$ 0

Si $C \geq C_6$, le même tableau donne $f_{40}(e) < 0$, donc $x(p_2) < -Ca$.

Si $C \geq \frac{1}{2}$, $f'_{41}(e) < 0$, $f_{41}(e) < f_{41}(0) = 0$, $f'_{40}(e) > 0$, $f_{40}(e) < f_{40}(1) = 0$, de sorte que l'on a à nouveau $x(p_2) < -Ca$, ce qui démontre le quatrième point du lemme.

5°. On déduit de (19) attendu que $p_3 > 0$, $x(p_3) > 0$;

$$\frac{1}{a}(x(p_3) - a) = -\frac{1 - e^2}{2(1 + p_3)} < 0.$$

6°. Si les branches données par $p \in [p_1, -1]$ et $p \in [-1, p_2]$ avaient un point commun différent de celui donné par $p = -1$, alors on déduit du tableau 13 qu'il existe deux valeurs de p , p' et p'' avec

$$p_1 < p' < -1 < p'' < p_2 < -\frac{1 + e^2}{2} < -e$$

telles que

$$x(p') = x(p''), \quad y(p') = y(p''),$$

ce qui donne avec (19) les relations (33) et (34) (avec la différence que dans (33) on a dans notre cas

$$\left(\frac{1}{p'^2 - e^2} \left(\frac{p' - e}{p' + e} \right)^{\frac{1}{e}} \right)^{\frac{1}{2}} > 0, \quad \left(\frac{1}{p''^2 - e^2} \left(\frac{p'' - e}{p'' + e} \right)^{\frac{1}{e}} \right)^{\frac{1}{2}} > 0,$$

$$1 + e^2 + 2p' < 1 + e^2 + 2p'' < 0$$

d'où l'on déduit les relations (35) et (36) (en tenant compte que $e - p' > -e - p' > 0$, $-(2 - e + e^2 + (3 - e)p') > 0$, $-(2 + e + e^2 + (3 + e)p') > 0$). Or, la racine p' de l'équation (36) est plus grande que -1 (tableau 18) alors que notre hypothèse exige $p' < -1$. Par conséquent, l'hypothèse respective est inexacte, ce qui démontre le dernier point du lemme.

En utilisant donc : 1°. les figures 6—14, qui donnent dans notre cas la forme de la branche de la courbe (C) donnée par $p \in [e, \infty)$, aux cas 2.1—2.13, respectivement $p \in [e, p_3]$ au cas 2.14 ; 2°. la conclusion (30) qui donne la forme de la branche de (C) donnée par $p \in (-\infty, p_2]$ aux cas 2.1—2.13 respectivement $p \in [p_1, p_2]$ au cas 2.14 ; 3°. les tableaux 16 et 17 qui donnent la forme de la branche de (C) donnée par $p \in [p_6, e]$; 4°. les lemmes 1-5, on a construit les figures 18-26 qui donnent la forme et les positions de la courbe $\tilde{C}$ définie au point 5 (page 321) dans notre cas. Dans les figures 20, 21 et 24 on retiendra une seule des branches symétriques par rapport à Oy et tracées en pointillé, selon que l'expression $x(p_2) - x(p_6)$ est négative, nulle ou positive. (lemme 1). D'ailleurs il résulte des points 1° et 2° du lemme que les valeurs éventuelles de e pour lesquelles on a aux cas intéressés $x(p_2) \leq x(p_6)$ sont situées dans l'intervalle $(\sqrt{\alpha}, 1)$.

3-ème cas. $e = \frac{2B+1}{2A+1}$ avec A et B entiers, $0 \leq B < A$ et $(-1)^{A+B} = -1$

La remarque (31) atteste que la courbe $(\tilde{C})$ a aux cas 3.1-3.14 la même forme et position qu'aux cas respectifs 2.1-2.14.

7. Au premier cas, c'est-à-dire quand

$$E_1 = \left(\frac{1}{p^2 - e^2} \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}} \right)^{\frac{1}{2}} \geq 0,$$

les expressions (19) vérifient la première relation (18) si $p \geq -1$, et la seconde relation (18) si $p \leq -1$ quand $C > 0$, respectivement la seconde relation (18) si $p \geq -1$ et la première relation (18) si $p \leq -1$ quand $C < 0$ avec

$$(64) \quad \Gamma = \Gamma(C) = (C^2)^e a^{2e} \frac{(1+e)^{1+e}}{(1-e)^{1-e}}.$$

On peut distinguer également aux cas 2-3 quelles branches de la courbe $(\tilde{C})$ vérifient la première relation (18) et quelles branches la seconde relation (18). La relation (64) subsiste évidemment dans ces cas. D'ailleurs la même relation donne $\Gamma(C) = \Gamma(-C)$, de sorte qu'aux valeurs $C = \pm C_1$ de (19) correspond la même valeur dans (18). Pour cette raison, les deux courbes (C) données par deux valeurs de somme nulle de C dans (19) seront considérées comme formant une seule courbe intégrale de l'équation (16) qui sera désignée par le terme „la courbe $(\tilde{C})$ “ et qui consiste-ainsi qu'il ressort évidemment de (19) de la courbe (C) et de sa symétrique par sa rapport à Oy .

8. 1°. On peut facilement vérifier que les relations (18) donnent l'intégrale générale de l'équation (16), attendu que par dérivation par rapport à x de leurs termes on obtient

$$\begin{aligned} x - yy' &= \pm \sqrt{a^2 - 4 \frac{y^2}{1-e^2}}, \text{ c'est-à-dire} \\ \left(x - yy' - \sqrt{a^2 - 4 \frac{y^2}{1-e^2}} \right) \left(x - yy' + \sqrt{a^2 - 4 \frac{y^2}{1-e^2}} \right) &= \\ &= (x - yy')^2 - a^2 + \frac{4y^2}{1-e^2} = 0, \end{aligned}$$

Vu que sur la courbe (C) on a $y \geq 0$, on en déduit l'équation (16).

2°. En vue de l'intégration directe de l'équation (16) on peut y poser $y^2 = \varphi(x)$, auquel cas la relation s'écrit

$$(65) \quad \left(x - \frac{\varphi'}{2} \right)^2 = a^2 - 4 \frac{\varphi}{1-e^2}$$

Si l'on dérive par rapport à x les termes de la relation obtenue et l'on pose $p = \varphi'(x)$, on obtient l'équation

$$(66) \quad \frac{dp}{dx} = 2 \frac{2x + \frac{3+e^2}{1-e^2} p}{2x - p},$$

dont l'intégrale générale est donnée par la relation

$$C \left(p + \frac{2}{\alpha} x \right) = (p + 2\alpha x)^{\alpha},$$

où C est une constante arbitraire et $\alpha = \frac{1+e}{1-e}$. Si l'on peut en déduire l'expression de $p = \varphi'(x)$, on a $y^2 = \varphi(x)$ par une quadrature.

On peut encore déduire de (66)

$$(67) \quad p = 2 \frac{q-2}{q+2A} x,$$

avec $q = \frac{dp}{dx}$ et $A = \frac{3+e^2}{1-e^2}$. Par dérivation par rapport à x des termes de la relation obtenue il vient

$$\frac{dx}{x} = 4 \frac{A+1}{q+2A} \frac{dq}{q^2 + 2(A-1)q + 4}, \text{ d'où}$$

$$(68) \quad x = C \left(q + 2 \frac{3+e^2}{1-e^2} \right) \left(q + 2 \frac{1+e}{1-e} \right)^{-\frac{1+e}{2e}} \left(q + 2 \frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1-e}{2e}},$$

auquel cas (66) et (67) donnent

$$(69) \quad y = \left[\frac{1-e^2}{4} a^2 - \frac{16C^2}{1-e^2} \left(q + 2 \frac{1+e}{1-e} \right)^{-\frac{1+e}{e}} \left(q + 2 \frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1-e}{e}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

On a ainsi en (68) et (69) une autre représentation paramétrique de l'intégrale générale de l'équation (16)

9. On peut facilement établir la forme de la courbe (C) au cas où la demi-ellipse de la figure 6 est un demi-cercle de rayon a .

A cet effet on déduit de (19) en y faisant $e \rightarrow 0$ les relations

$$x = x(p) = \begin{cases} -\frac{C}{2}a\left(2 + \frac{1}{p}\right)E^{-\frac{1}{p}} & \text{si } p < 0 \\ \frac{C}{2}a\left(2 + \frac{1}{p}\right)E^{-\frac{1}{p}} & \text{si } p > 0 \end{cases}$$

$$y = y(p) = \frac{a}{2} \left[1 - C^2 \left(1 + \frac{1}{p} \right)^2 E^{-\frac{2}{p}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on y fait $s = \frac{1}{p}$, on a donc

$$(70) \quad \begin{cases} x = x(s) = \begin{cases} -\frac{C}{2}a(2+s)E^{-s} & \text{si } s < 0 \\ \frac{C}{2}a(2+s)E^{-s} & \text{si } s > 0 \end{cases} & y = y(s) = \frac{a}{2} [1 - C^2(1+s)^2 E^{-2s}]^{\frac{1}{2}} \\ x'(s) = \varepsilon \frac{C}{2}a(1+s)E^{-s}, \quad y'(s) = C^2 \frac{e}{2} \frac{s(1+s)E^{-2s}}{[1 - C^2(1+s)^2 E^{-2s}]^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{dy}{dx} = \varepsilon C \frac{sE^{-s}}{[1 - C^2(1+s)^2 E^{-2s}]^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{a} \frac{1-s-C^2(1+s)E^{-2s}}{(1+s)[1 - C^2(1+s)^2 E^{-2s}]^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

où $\varepsilon = \text{sg}(-s)$

L'on supposera pour fixer les idées $C > 0$. $y(s)$ de (70) prend des valeurs réelles si

$$(71) \quad f_{44}(s) = 1 - C^2(1+s)^2 E^{-2s} \geq 0,$$

Or, $f'_{44}(s) = 2C^2s(1+s)E^{-2s}$. On déduit donc du tableau 31 que si $C \leq 1$, alors $f_{44}(C) \geq 0$ pour $s \in [s_1, \infty)$ avec $s_1 \in (-\infty, -1)$. Si $C > 1$, $f_{44}(s) \geq 0$ pour $s \in [s_1, s_2]$ et $s \in [s_3, \infty)$, avec $s_2 \in (-1, 0)$ et $s_3 \in (0, \infty)$. On déduit encore de (70) que

$$(72) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ quand } f_{45}(s) = 1 - C^2 \frac{1+s}{1-s} E^{-s} = 0, \text{ de sorte que}$$

$$f'_{45}(s) = -2C^2 s^2 \frac{E^{-2s}}{(1-s)^2} \leq 0.$$

Tableau 31.

s	$-\infty$	s_1	-1	s_2	0	s_3	∞		
$f'_{44}(s)$		+	0	-	0	+			
$f_{44}(s)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$1 - C^2$	$\nearrow$	1

Tableau 32.

s	$-\infty$	s_4	1	∞
$f_{45}(s)$	$\infty \searrow$	$() \searrow$	$\mp \infty \searrow$	1

On déduit donc du tableau 32 que $f_{45}(s)$ a une racine et une seule, $s = s_4$. (71) et (72) donnent $f_{44}(s_4) = s_4^2$, de sorte que si $C \neq 1$, (C) a toujours un point d'inflexion et un seul, de coordonnées $x(s_4) = \varepsilon \frac{a}{2} (2 + s_4) \sqrt{\frac{1-s_4}{1+s_4}}$,

$y(s_4) = \varepsilon \frac{a}{2} s_4$, avec $\varepsilon = \text{sg } s_4 = \text{sg}(1 - C)$ et $|s_4| < 1$. Attendu que (71) donne $\text{sg } f_{44}(-2) = \text{sg}(E^2 - C)$, on déduit du tableau 31 que $\text{sg}(s_4 + 2) = \text{sg}(C - E^{-2})$, avec $s_4 = -2$ quand $C = E^{-2}$.

On distingue par conséquent plusieurs cas.

Tableau 33.

$C < E^{-2}$

s	s_1	-2	-1	0	s_4	∞
$x'(s)$		-	0 +	$\frac{C}{2}a \mid -\frac{C}{2}a$	-	
$x(s)$	$x(s_1) \searrow$	0	$\searrow -\frac{C}{2}Ea \nearrow -Ca/Ca \searrow$	$x(s_4) \searrow$	0	
$y'(s)$		+	0	- 0	+	
$y(s)$	0 $\nearrow$	$\frac{a}{2} \sqrt{1 - C^2 E^4} \nearrow$	$\frac{a}{2} \searrow$	$\frac{a}{2} \sqrt{1 - C^2} \nearrow$	$y(s_4) \nearrow$	$\frac{a}{2}$
$\frac{dy}{dx}$	∞		$-CE$	0		0
$\frac{d^2y}{dx^2}$		-		+	0	-

Tableau 34.

$C = E^{-2}$

s	-2	-1
$x'(s)$	$-$	0
$x(s)$	0	$\succ -\frac{a}{2} E^{-1}$
$y'(s)$	$+$	0
$y(s)$	0	$\nearrow \frac{a}{2}$
$\frac{dy}{dx}$	∞	$-E^{-1}$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$-$	

Tableau 35.

$E^{-2} < C < 1$

s	s_1	-1
$x'(s)$	$-$	0
$x(s)$	$x(s_1)$	$\succ -\frac{C}{2} Ea$
$y'(s)$	$+$	0
$y(s)$	0	$\nearrow \frac{a}{2}$
$\frac{dy}{dx}$	∞	$-CE$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$-$	

Le reste des tableaux 34 et 35 est donné par le tableau 33.

Tableau 36

$C = 1$

s	s_1	-1	0	∞
$x'(s)$	$-$	$\nearrow 0$	$+$	$\frac{a}{2} / -\frac{a}{2} -$
$x(s)$	$x(s_1)$	$\succ -\frac{E}{2} a$	$\nearrow -a/a$	$\succ 0$
$y'(s)$	$+$	0	$-$	0
$y(s)$	0	$\nearrow \frac{a}{2}$	$\succ 0$	$\nearrow \frac{a}{2}$
$\frac{dy}{dx}$	∞	$-E$	-1	0
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$-$	$ $	$+$	$ $

Tableau 37

$C > 1$

s	s_1	-1	s_4	s_2	s_3	∞
$x'(s)$	$-$	0	$+$		$-$	
$x(s)$	$x(s_1)$	$\succ -\frac{C}{2} Ea$	$\nearrow x(s_4)$	$\nearrow x(s_2)$		$x(s_3) \succ 0$
$y'(s)$	$+$	0	$-$		$+$	
$y(s)$	0	$\nearrow \frac{a}{2}$	$\succ y(s_4)$	$\succ 0$		$0 \nearrow \frac{a}{2}$
$\frac{dy}{dx}$	∞	$-CE$		∞		∞
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$-$	$ $	$+$	0	$-$	

Afin d'établir la position de la courbe par rapport au demi-cercle, on déduira de (74) $f_{46}(s) = \frac{4}{C^2 a^2} (x^2 + y^2 - a^2) = (3 + 2s)E^{-2s} - \frac{3}{C^2}$, donc $f'_{46}(s) = -4(1 + s)E^{-2s}$.

Tableau 38

s	∞	-1	0	∞
$f'_{46}(s)$	$+$	0	$-$	
$f_{46}(s)$	$-\infty$	$\nearrow E^2 - \frac{3}{C^2}$	$\succ 3\left(1 - \frac{1}{C^2}\right)$	$\succ -\frac{3}{C^2}$

On déduit encore de (70) $\frac{1}{a} (x(s_1) + a) = \frac{4 + 3s_1}{2(1 + s_1)}$, de sorte qu'attendu qu'au tableau 31 on a $s_1 < -1$

$$(73) \quad \text{sg}(x(s_1) + a) = -\text{sg}\left(\frac{4}{3} + s_1\right).$$

Or, (71) donne

$$f_{44}\left(-\frac{4}{3}\right) = \left(1 - \frac{C}{3} E^{\frac{4}{3}}\right) \left(1 + \frac{C}{3} E^{\frac{4}{3}}\right),$$

de sorte que

$$\operatorname{sg} f_{44}\left(-\frac{4}{3}\right) = \operatorname{sg}\left(3E^{-\frac{4}{3}} - C\right).$$

On en déduit à l'aide de tableau 31 et de (73) que

$$(74) \quad \operatorname{sg}(x(s_1) + a) = \operatorname{sg}\left(3E^{-\frac{4}{3}} - C\right) \text{ avec } x(s_1) = -a \text{ quand } C = 3E^{-\frac{4}{3}}.$$

On déduit également de (70) et en tenant compte que alors que $C > 1$ au tableau 31, $s_2 \in (-1, 0)$ et $s_3 > 0$, que

$$\frac{1}{a}[x(s_2) + a] = \frac{s_2}{2(1 + s_2)} < 0, \quad \frac{1}{a}[x(s_3) - a] = -\frac{s_3}{2(1 + s_3)} < 0,$$

donc au tableau 37

$$(75) \quad x(s_2) < -a, \quad 0 < x(s_3) < a.$$

Les tableaux 28—33 et les relations (74) et (75) donnent donc plusieurs formes et positions par rapport au demicercle pour la courbe (C). Pour la raison indiquée au point 10 (page 360) l'on construira sur la même figure la courbe (C) donnée par la valeur $C > 0$ de la constante et la courbe $(-C)$ donnée par la valeur $-C$ de la constante. L'ensemble des deux courbes sera désigné par le terme „courbe $(\tilde{C})$ ”.

1-er cas $C < E^{-2}$	Tableau 33 et courbe $(\tilde{C})$ de la figure 27		
2-ème cas $C = E^{-2}$	34	„	28
3-ème cas $E^{-2} < C < \sqrt{3}E^{-1}$	35	„	29
4-ème cas $C = \sqrt{3}E^{-1}$	35	„	30
5-ème cas $\sqrt{3}E^{-1} < C < 3E^{-\frac{4}{3}}$	35	„	31
6-ème cas $C = 3E^{-\frac{4}{3}}$	35	„	32
7-ème cas $3E^{-\frac{4}{3}} < C < 1$	35	„	33
8-ème cas $C = 1$	36	„	34
9-ème cas $C > 1$	37	„	35

Dans la construction des différentes formes de la courbe (C) on peut se servir du lemme suivant :

Lemme 7. 1°. Au 3-ème cas on a $\operatorname{sg}(x(s_1) + Ca) = \operatorname{sg}(C_6 - C)$, avec $x(s_1) = -Ca$ quand $C = C_6$. Ici $C_6 \in \left(E^{-2}, \frac{1}{2}\right)$ est la racine positive de la

fonction $f_{43}(C) = 1 - \frac{C}{1+2C} E^{\frac{2}{1+2C}}$. Aux cas 4—9 on a $x(s_1) < -Ca$.

2°. Au 9-ème cas on a $x(s_2) < -a$; $x(s_3) < a$; $x(s_1) < x(s_2)$.

3°. Au 1-er cas on a $\operatorname{sg}[x(s_1) - Ca] = \operatorname{sg}(C_5 - C)$ avec $x(s_1) = Ca$ quand $C = C_5$. Ici C_5 est la racine comprise dans l'intervalle $(0, E^{-2})$ de la fonction $f_{38}(C) = 1 - \frac{C}{1-2C} E^{\frac{1-C}{1-2C}}$.

Démonstration. 1°. On déduit de (70)

$$\frac{1}{a}[x(s_1) + Ca] = \frac{2(1+C) + (1+2C)s_1}{2(1+s_1)},$$

de sorte que

$$(76) \quad \operatorname{sg}[x(s_1) + Ca] = -\operatorname{sg}\left(s_1 + 2\frac{1+C}{1+2C}\right).$$

Or, (71) donne

$$f_{44}\left(-2\frac{1+C}{1+2C}\right) = \left(1 + \frac{C}{1+2C} E^{\frac{2}{1+2C}}\right) f_{43}(C),$$

avec

$$f_{43}(C) = 1 - \frac{C}{1+2C} E^{\frac{2}{1+2C}}$$

On en déduit à l'aide du tableau 31 et de (76) ainsi que du fait que $-2\frac{1+C}{1+2C} < -1$:

$$(77) \quad \operatorname{sg}[x(s_1) + Ca] = \operatorname{sg} f_{43}(C), \text{ avec } x(s_1) = -Ca \text{ quand } f_{43}(C) = 0.$$

Or, on a établi au cours de la démonstration du 4-ème point du lemme 6 que $\operatorname{sg} f_{43}(C) = \operatorname{sg}(C_6 - C)$, $f_{43}(C_6) = 0$, ce qui démontre avec (77) le premier point du lemme.

2°. Les deux premières relations en question sont données par (75): Si l'on avait $x(s_1) > x(s_2)$, l'on déduirait du tableau 37 la figure 36, sur laquelle on constaterait qu'il existe deux valeurs de s, s' et s'' , avec $-2 < s_1 < s' < -1 < s'' < s_2 < 0$, telles que $x(s') = x(s'')$ et $y(s') = y(s'')$.

Or, ces relations s'écrivent à l'aide de (70) $(2 + s') E^{-s'} = (2 + s'') E^{-s''}$ et $-(1 + s') E^{-s'} = (1 + s'') E^{-s''}$, d'où l'on déduit $s'' = -\frac{4 + 3s'}{3 + 2s'}$, auquel cas la deuxième relation ci-dessus s'écrit $f_{47}(\sigma) = \sigma E^{\frac{1-\sigma^2}{2\sigma}} - 1 = 0$, avec $\sigma = 3 + 2s' \in (-1, 1)$, de sorte que $f'_{47}(\sigma) = -\frac{(1-\sigma)^2}{2\sigma} E^{\frac{1-\sigma^2}{2\sigma}}$. Or on déduit du tableau 39 que $f_{47}(\sigma) \neq 0$ pour $\sigma \in (-1, 1)$, ce qui infirme l'hypothèse $x(s_1) > x(s_2)$.

Tableau 39.

σ	-1	- ε	ε	1
$f'_{47}(\sigma)$		+		-
$f_{47}(\sigma)$	-2	$\nearrow$	-1	$\infty \searrow$ 0

Si l'on avait $x(s_1) = x(s_2)$, alors l'on aurait les relations ci-dessus avec s_1 à la place de s' et s_2 à la place de s'' dont l'impossibilité a été démontrée.

3°. On déduit de (70) la même expression qu'au 3-ème cas (1-er point du lemme) pour $x(s_1)$: $x(s_1) = \frac{a}{2} \frac{2 + s_1}{1 + s_1}$, parcequ'à présent $x(s_1) > 0$ et $2 + s_1 < 0$. Par conséquent $\frac{1}{a} [x(s_1) - Ca] = \frac{2(1 - C) + (1 - 2C)s_1}{2(1 + s_1)}$ avec $1 - 2C > 0$, de sorte que $\text{sg} [x(s_1) - Ca] = -\text{sg} \left(s_1 + 2 \frac{1 - C}{1 - 2C} \right)$, auquel cas — vu que $-2 \frac{1 - C}{1 - 2C} < -1$ — le tableau 31 donne $\text{sg} [x(s_1) - Ca] = \text{sg} f_{44} \left(-2 \frac{1 - C}{1 - 2C} \right)$.

Or,

$$f_{44} \left(-2 \frac{1 - C}{1 - 2C} \right) = \left(1 + \frac{C}{1 - 2C} E^{2 \frac{1 - C}{1 - 2C}} \right) f_{38}(C),$$

de sorte qu'on en déduit à l'aide du tableau 31 et du fait que $-2 \frac{1 - C}{1 - 2C} < -1$: $\text{sg} [x(s_1) - Ca] = \text{sg} f_{38}(C)$, avec $x(s_1) = Ca$ quand $f_{38}(C) = 0$. Or, on a établi au cours de la démonstration du 2-ème point du lemme 6 que $\text{sg} f_{38}(C) = \text{sg} (C_5 - C)$, $f_{38}(C_5) = 0$, ce qui démontre le dernier point du lemme.

10. On peut facilement établir l'équation de la courbe (C), si l'on déduit de (70) et des tableaux 33 — 37.

$$(78) \quad \frac{1 + s}{2 + s} = \begin{cases} \frac{\sqrt{a^2 - 4x^2}}{2x} & \text{si } s \leq -1 \text{ ou } s \in (0, \infty) \\ \frac{\sqrt{a^2 - 4x^2}}{2x} & \text{si } s \in (-1, 0). \end{cases}$$

On en déduit à l'aide de l'expression (70) de x

$$(79) \quad \begin{cases} (a) \quad 2x - \sqrt{a^2 - 4y^2} + Ca E^{\frac{2x - \sqrt{a^2 - 4y^2}}{2x - \sqrt{a^2 - 4y^2}}} = 0 & \text{pour la branche} \\ & \text{donnée par } s \leq -1, \\ (b) \quad 2x + \sqrt{a^2 - 4y^2} + Ca E^{\frac{2x + \sqrt{a^2 - 4y^2}}{2x + \sqrt{a^2 - 4y^2}}} = 0 & \text{pour la branche} \\ & \text{donnée par } s \in (-1, 0) \\ (c) \quad 2x - \sqrt{a^2 - 4y^2} - Ca E^{\frac{2x - \sqrt{a^2 - 4y^2}}{2x - \sqrt{a^2 - 4y^2}}} = 0 & \text{pour la branche} \\ & \text{donnée par } s \in (0, \infty) \end{cases}$$

au cas des tableaux 33 — 37, c'est-à-dire où $C > 0$. Or, (70) donne $x(-C) = -x(C)$, $y(-C) = y(C)$ si l'on y considère x et y comme fonctions de C , de sorte que (78) donne pour $C < 0$

$$\frac{1 + s}{2 + s} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{a^2 - 4x^2}}{2x} & \text{si } s \leq -1 \text{ ou } s \in (0, \infty) \\ \frac{\sqrt{a^2 - 4x^2}}{2x} & \text{si } s \in (-1, 0) \end{cases}$$

auquel cas l'expression (70) de x donne pour les équations des trois branches de (C) de (79) les équations obtenues en y changeant le signe de $\sqrt{a^2 - 4y^2}$,¹⁾ c'est-à-dire

¹⁾ On remarquera qu'on ne peut pas remplacer directement dans (79) la constante $C > 0$ par une constante $C < 0$, parceque les relations (79) ont été établies dans l'hypothèse $C > 0$.

$$(80) \begin{cases} (a) \ 2x + \sqrt{a^2 - 4y^2} + Ca E^{\frac{x + \sqrt{a^2 - 4y^2}}{2x + \sqrt{a^2 - 4y^2}}} = 0 & \text{pour la branche donnée} \\ & \text{par } s \leq -1. \\ (b) \ 2x - \sqrt{a^2 - 4y^2} + Ca E^{\frac{x - \sqrt{a^2 - 4y^2}}{2x - \sqrt{a^2 - 4y^2}}} = 0 & \text{pour la branche donnée} \\ & \text{par } s \in (-1, 0) \\ (c) \ 2x + \sqrt{a^2 - 4y^2} - Ca E^{\frac{x + \sqrt{a^2 - 4y^2}}{2x + \sqrt{a^2 - 4y^2}}} = 0 & \text{pour la branche donnée} \\ & \text{par } s \in (0, \infty) \end{cases}$$

Au point de vue de la représentation des intégrales de l'équation (16) (avec $e=0$) par des relations de la forme $f(x, y) = \Gamma = \text{constante}$, les équations (79) (c) et (80) (c) peuvent être écartées, parcequ'elles coïncident respectivement avec les équations (80) (b) et (79) (b).

Si l'on fait donc dans (79) (a) $C = C_1 > 0$ et dans (80) (b) $C = -C_1$, puis dans (79) (b) $C = C_1$ et dans (80) (a) $C = -C_1$, il vient

$$(81) \begin{cases} (2x - \sqrt{a^2 - 4y^2})^2 = \Gamma a^2 E^{\frac{x - \sqrt{a^2 - 4y^2}}{2x - \sqrt{a^2 - 4y^2}}}, \\ \text{respectivement} \\ (2x + \sqrt{a^2 - 4y^2})^2 = \Gamma a^2 E^{\frac{x + \sqrt{a^2 - 4y^2}}{2x + \sqrt{a^2 - 4y^2}}}, \end{cases}$$

où $\Gamma = \Gamma(C_1) = C_1^2$, donc $\Gamma(C_1) = \Gamma(-C_1)$, de sorte qu'aux valeurs $C = \pm C_1$ de (70) correspond la même valeur Γ_1 dans (81), c'est pourquoi, comme au point 6, les deux courbes (C) données par deux valeurs de somme nulle de C dans (70) seront considérées comme formant une seule courbe intégrale de l'équation (16) (avec $e=0$), qui sera désignée par le terme „Courbe ($\tilde{C}$)”, et est constituée par la courbe (C) et sa symétrique par rapport à Oy.

11. Il est évident géométriquement que le demi-cercle de centre O et de rayon $\frac{a}{2}$, situé au-dessus de l'axe Ox est une courbe-solution du problème. Il n'est pas donné par les formules (70). Celles-ci donnent $\frac{4}{a^2} (x^2(s) + y^2(s) - \frac{a^2}{4}) = C^2(3 + 2s)E^{-2s}$. Or, (71) et le tableau 31 donnent

$\text{sg} \left(s_1 + \frac{3}{2} \right) = \text{sg} \left(C - 2E^{-\frac{3}{2}} \right)$, avec $s_1 = -\frac{3}{2}$ quand $C = 2E^{-\frac{3}{2}}$. En tenant compte que $E^{-2} < 2E^{-\frac{3}{2}} < \sqrt{3}E^{-1}$, on en déduit la position du demicercle sus-cité par rapport à la courbe ($\tilde{C}$) des figures 27–35, où il est tracé en pointillé. Au 3-ème cas on a dessiné la figure 29 dans l'hypothèse $E^{-2} < C < 2E^{-\frac{3}{2}}$. Si $C = 2E^{-\frac{3}{2}}$, le demi-cercle rencontre la courbe sur l'axe Ox et si $2E^{-\frac{3}{2}} < C < \sqrt{3}E^{-1}$, le demi-cercle occupe dans la fig. 29 (3-ème cas) par rapport à ($\tilde{C}$) la position des fig. 30–33.

On peut facilement constater la même chose au cas considéré aux points 4-8. Si l'on y suppose que la courbe-solution est toujours une demi-ellipse concentrique à (C_2) et au grand axe situé sur (C_1), donc d'équations $x = \bar{a} \cos \Theta$, $y = \bar{b} \sin \Theta$ et d'excentricité $\bar{e}$, alors dans la fig. 1,

$$x_2 = \bar{a}(2 - \bar{e}^2) \cos \Theta, \ y_2 = 2\bar{a}\sqrt{1 - \bar{e}^2} \sin \Theta.$$

Or, le long de (C_2)

$$x_2 = a \cos \varphi, \ y_2 = b \sin \varphi.$$

et les relations

$A \cos \Theta = A_1 \cos \varphi$, $B \sin \Theta = B_1 \sin \varphi$ avec Θ et φ variables et A, B, A_1, B_1 constantes exigent

$$\Theta = \varphi, \ A = A_1, \ B = B_1.$$

Par conséquent

$$a = \bar{a}(2 - \bar{e}^2), \ a\sqrt{1 - \bar{e}^2} = 2\bar{a}\sqrt{1 - \bar{e}^2}, \ \text{d'où } \bar{a} = \frac{a}{2}(1 + e),$$

$$\bar{e} = \sqrt{\frac{2e}{1 - e}}, \ \text{donc } \bar{b} = \frac{b}{2}.$$

L'ellipse d'équations

$$x = \bar{a} \cos \Theta, \ y = \bar{b} \sin \Theta$$

est d'ailleurs située à l'intérieur de l'ellipse d'équations

$$x = a \cos \Theta, y = b \sin \Theta, \text{ parce que } \frac{\bar{a}^2}{a^2} \cos^2 \Theta + \frac{\bar{b}^2}{b^2} \sin^2 \Theta - 1 = \\ = \frac{1}{4} (e(2+e) \cos^2 \Theta - 3) < 0.$$

La position de la demi-ellipse — solution par rapport à $(\tilde{C})$ est donnée par (19) qui donnent

$$(81_1) \quad \bar{a}^2 \left(\frac{x^2(p)}{\bar{a}^2} + \frac{y^2(p)}{\bar{b}^2} - 1 \right) = \frac{C^2}{4} \frac{a^2}{p+e} \left(\frac{p-e}{p+e} \right)^{\frac{1}{e}} (1-e) (2+e+e^2+(3+e)p)$$

Donc, la demi-ellipse — solution n'est pas donnée par (19). En tenant compte que $-\frac{2+e+e^2}{3+e} \in (-1, -e)$, les tableaux 3 ou 14 et la formule (37₁) donnent

$$(82) \quad \text{sg}(2+e+e^2+(3+e)p_2) = \text{sg}\varphi_2(e) \text{ avec } p_2 = -\frac{2+e+e^2}{3+e}$$

lorsque $\varphi_2(e) = 0$

On déduit donc de (37₂) et (82) que si $0 < C \leq 2E^{-\frac{3}{2}}$, alors $-\frac{2+e+e^2}{3+e} < p_2$

et si $C \geq 1$, alors $-\frac{2+e+e^2}{3+e} > p_2$.

Par conséquent

$$(83) \quad \begin{cases} \text{aux cas 1.1. et 1.2 et au cas 1.3 lorsque} \\ \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}} < C \leq 2E^{-\frac{3}{2}}, -\frac{2+e+e^2}{3+e} < p_2 \text{ et aux cas} \\ 1.13 \text{ et 1.14, } -\frac{2+e+e^2}{3+e} > p_2. \end{cases}$$

On déduit de (37₂) également que

$$(84) \quad \begin{cases} \text{Si } C \in (2E^{-\frac{3}{2}}, 1), \text{ il existe un } e_{11} \in (0, 1) \text{ avec} \\ \varphi_2(e_{11}) = 0, \text{ donc } \text{sg}\left(p_2 + \frac{2+e+e^2}{3+e}\right) = \text{sg}(e - e_{11}) \text{ et} \\ p_2 = -\frac{2+e+e^2}{3+e} \text{ quand } e = e_{11}. \end{cases}$$

Si l'on tient compte que $\varphi_2(e_{11}) = 0$, on déduit de (28) et (25)

$$(85) \quad \begin{cases} \text{sg}(e_0 - e_{11}) = \text{sg}\left(C^2 - 3(1 - e_{11})^{-1 + \frac{1}{e_{11}}}(1 + e_{11})^{-\left(1 + \frac{1}{e_{11}}\right)}\right) = \text{sg } f_{48}(e_{11}), \\ \text{où } f_{48}(e) = 4(1+e)^{1 - \frac{1}{e}} - 3 \text{ et } f_{48}(e_{11}) = \\ = (1 - e_{11})^{1 - \frac{1}{e_{11}}}(1 + e_{11})^{1 + \frac{1}{e_{11}}}\left(C + \sqrt{3} \left[\frac{1}{1 - e_{11}^2} \left(\frac{1 - e_{11}}{1 + e_{11}}\right)^{\frac{1}{e_{11}}}\right]^{\frac{1}{2}}\right) f_6(e_{11}), \\ \text{avec } f_6(e) \text{ donnée par (25)} \end{cases}$$

Par conséquent

$$f'_{48}(e) = \frac{1}{e^2} (1+e)^{1 - \frac{1}{e}} f_{49}(e),$$

avec

$$f_{49}(e) = -e \frac{1-e}{1+e} + \log(1+e), \text{ donc } f'_{49}(e) = e \frac{3+e}{(1+e)^2} > 0,$$

$$f_{49}(e) > f_{49}(0) = 0, f'_{48}(e) > 0$$

Tableau 40.

e	0	$\frac{1}{2}$	e_{12}	$\frac{2}{3}$	1
$f_{48}(e)$	$4E^{-1} - 3$	$\nearrow -\frac{1}{3} \nearrow 0 \nearrow \sqrt{\frac{3}{5}}(4 - \sqrt{15}) \nearrow 1$			

Le tableau 40 et (85) donnent $\text{sg}(e_0 - e_{11}) = \text{sg}(e_{11} - e_{12})$, auquel cas (37₂) et (37₁) donnent

$$(86) \quad \begin{cases} \text{dans (28), } \text{sg}(e_0 - e_{11}) = -\text{sg}\varphi_2(e_{12}) = \text{sg}(C - C_7), \\ \text{où } C_7 = 2(1 - e_{12})^{\frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{e_{12}}\right)}(1 + e_{12})^{-\frac{1}{e_{12}}} \end{cases}$$

Si $C = C_7$, (86) et (37₁) donnent $\varphi_2(e_{12}) = 0$, auquel cas on déduit successivement; de (84) $e_{12} = e_{11}$, du tableau 40 $f_{48}(e_{11}) = 0$, de (85) $f_6(e_{11}) = 0$, de (28) $e_0 = e_{11}$

Donc

$$(87) \quad \text{si } C = C_7, \text{ alors } e_0 = e_{11}.$$

Si l'on tient compte que $f_{48}(e_{12}) = 0$, (86) donne $C_7 = f_{50}(e_{12})$, avec

$$f_{50}(e) = \frac{3}{2} \frac{(1-e)^{\frac{1}{2}} \left(-1 + \frac{1}{e}\right)}{1+e}, \text{ de sorte que } f'_{50}(e) = -\frac{f_{50}(e)}{2e^2} f_{51}(e), \text{ avec } f_{51}(e) = e^{\frac{1+3e}{1+e}} + \log(1-e), \text{ donc } f'_{51}(e) = e^{\frac{3-4e-3e^2}{(1-e)(1+e)^2}}.$$

Tableau 41.

e	0	$\frac{1}{2}$	e_{13}	$\frac{2}{3}$	e_{14}	1
$f'_{51}(e)$		+	0		—	
$f_{51}(e)$	0	$\nearrow$	$f_{51}(e_{13}) \searrow \frac{6}{5} - \log 3 > 0 \searrow 0 \searrow -\infty$			
$f'_{50}(e)$			—		0	+
$f_{50}(e)$	$\frac{3}{2} E^{-\frac{1}{2}} > \frac{\sqrt{3}}{2} \searrow f_{50}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{3}}{2} \searrow f_{50}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{10\sqrt{3}} > \sqrt{3} E^{-1} \searrow f_{50}(e_{14}) \nearrow \frac{3}{4}$					

(La relation $\frac{9}{10\sqrt{3}} > \sqrt{3} E^{-1}$ du tableau 41 est donnée par $E > 10 \times \frac{2,4}{9} > 10 \frac{\sqrt{27}}{9}$).

Les tableaux 40 et 41 donnent donc

$$(88) \quad \sqrt{3} E^{-1} < \frac{9}{10\sqrt{3}} < C_7 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 3E^{-\frac{4}{3}} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si l'on tient à nouveau compte que $\varphi_2(e_{11}) = 0$, on déduit de (26) et

$$(29) \quad \operatorname{sg}(e_1 - e_{11}) = \operatorname{sg} f_{52}(e_{11}), \text{ où } f_{52}(e) = 4 \left(\frac{1+e}{3+e} \right)^{1-\frac{1}{e}} (3-e)^{-\left(1+\frac{1}{e}\right)} - 1, \text{ de sorte que } f'_{52}(e) = \frac{4}{e^2} \left(\frac{1+e}{3+e} \right)^{1-\frac{1}{e}} (3-e)^{-\left(1+\frac{1}{e}\right)} f_{53}(e), \text{ avec}$$

$$f_{53}(e) = e \frac{-3 + 15e + 3e^2 + e^3}{(1+e)(9-e^2)} + \log \frac{(1+e)(3-e)}{3+e},$$

donc

$$f'_{53}(e) = e \frac{243 + 147e + 78e^2 + 46e^3 - e^4 - e^5}{(3+e)^2(9-e^2)^2} > 0, \quad f_{53}(e) > f_{53}(0) = 0,$$

$$f'_{52}(e) > 0 \quad f_{52}(e) < f_{52}(1) = 0,$$

donc

$$(89) \quad \text{dans (29) } e_1 < e_{11} \text{ pour tout } C \in \left(3E^{-\frac{4}{3}}, 1 \right).$$

En utilisant les formules (84), (86), (87), (88), (89), on déduit donc qu'au point 5 ;

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Au cas 1.3 si } C \in 2E \left(-\frac{3}{2}, \sqrt{3} E^{-1} \right), & \begin{array}{l} \text{si } 0 < e < e_{11}, \quad -\varepsilon > p_2 \\ \text{si } e = e_{11}, \quad -\varepsilon = p_2 \\ \text{si } e_{11} < e < 1, \quad -\varepsilon < p_2 \end{array} \\ \text{Au cas 1.4 si } \sqrt{3} E^{-1} < C \leq C_7, & -\varepsilon > p_2 \\ \text{si } C_7 < C \leq 3E^{-\frac{4}{3}}, & \begin{array}{l} \text{si } 0 < e < e_{11}, \quad -\varepsilon > p_2 \\ \text{si } e = e_{11}, \quad -\varepsilon = p_2 \\ \text{si } e_{11} < e < e_0, \quad -\varepsilon < p_2 \end{array} \\ \text{Aux cas 1.5 et 1.6,} & -\varepsilon > p_2 \\ \text{Au cas 1.7 si } e_1 < e < e_{11}, & -\varepsilon > p_2 \quad \varepsilon = \frac{2+e+e^2}{3+e} \\ \text{si } e = e_{11}, & -\varepsilon = p_2 \\ \text{si } e_{11} < e < e_0, & -\varepsilon < p_2 \quad e_0 \text{ défini dans (28) et (25).} \\ \text{Au cas 1.8 si } \sqrt{3} E^{-1} < C < C_7, & -\varepsilon > p_2 \quad e_1 \text{ défini dans (29) et (26).} \\ \text{si } C = C_7, & -\varepsilon = p_2 \quad e_{11} \text{ défini dans (84) et (37)} \\ \text{si } C_7 < C < \frac{\sqrt{3}}{2}, & -\varepsilon < p_2 \\ \text{Au cas 1.9 si } C \in (\sqrt{3} E^{-1}, C_7), & \begin{array}{l} \text{si } e_0 < e < e_{11}, \quad -\varepsilon > p_2 \\ \text{si } e = e_{11}, \quad -\varepsilon = p_2 \\ \text{si } e_{11} < e < 1, \quad -\varepsilon < p_2 \end{array} \\ \text{si } C_7 \leq C < \frac{\sqrt{3}}{2}, & -\varepsilon < p_2 \\ \text{Aux cas 1.10 et 1.11} & -\varepsilon > p_2 \\ \text{Au cas 1.12 si } e_1 < e < e_{11} & -\varepsilon > p_2 \\ \text{si } e = e_{11}, & -\varepsilon = p_2 \\ \text{si } e_{11} < e < 1, & -\varepsilon < p_2 \end{array} \right.$$

Les relations (81₁), (83) et (90) donnent-ainsi qu'il a été mentionné, la position de la demi-ellipse — solution par rapport à la courbe ($\tilde{C}$) aux figures 6—14 et 18—26, parcequ'elles sont évidemment valables aux cas 2 et 3 du point 6 aussi. Dans ces cas, la branche de (C) donnée par $p \in (p_0, e)$

est, ainsi qu'on le déduit de (81₁) située „à l'intérieur,, de la demi-ellipse-solution. Il est donc évident qu'aux cas où la branche en question rencontre la branche de (C) donnée par $p \in (-1, p_2)$ dans les figures 20,21 ou 24, la portion du premier quadrant de la demi-ellipse-solution rencontrera elle aussi cette branche. On en déduit donc à l'aide du lemme 1 et de (90) que si, aux cas 2.3, 2.4, 2.7, 2.8, 2.9, 2.12, $C \leq \bar{C}(e)$, alors dans (90) $-\varepsilon < p_2$.

Dans les figures 6—14 et 18, 19, 22, 23, 25, 26 on a dessiné la demi-ellipse-solution en pointillé. Dans les figures 20,21,24 la demi-ellipse n'a pas été dessinée pour simplification. Dans les figures 8,9,12 on a dessiné les trois positions de la demi-ellipse-solution données par (90) selon que $p_2 + \varepsilon \geq 0$: Si $-\varepsilon > p_2$, la demi-ellipse-solution rencontre la courbe $(\tilde{C})$ au seul point de coordonnées $(0, \frac{b}{2})$, si $-\varepsilon = p_2$ elle la rencontre aux points de coordonnées $(0, \frac{b}{2})$ et $(\pm \frac{a}{2}(1+e), 0)$ et si $-\varepsilon < p_2$, elle la rencontre au point de coordonnées $(0, \frac{b}{2})$ et en deux autres points, situés sur deux de ses branches.

Afin de ne pas écrire de coordonnées sur les figures, on a désigné par $Q_1 - Q_4$, $P_1 - P_{13}$, $R_1 - R_{11}$ les points de coordonnées données ci-dessous;

Dans les figures 3—6:

$$Q_1(C, \frac{C}{2}a); Q_2(0, y(-\frac{1+l^2}{2})); Q_3(-C, -\frac{C}{2}a); Q_4(x(-1), 0),$$

avec x, y donnés par (12).

Dans les figures 6—14 et 18—26:

$$P_1(0, b); P_2(0, \frac{b}{2}); P_3(a, 0); P_4(x(-1), \frac{b}{2}); P_5(Ca, \frac{b}{2}\sqrt{1-C^2});$$

$$P_6(\frac{a}{2}(1+e), 0); P_7(x(p_2), 0); P_8(0, y(-\frac{1+e^2}{2})); P_9(x(p_5), y(p_5));$$

$$P_{10}(x(p_3), 0); P_{11}(x(p_1), 0); P_{12}(x(p_6), 0); P_{13}(x(p_4), y(p_4)).$$

avec x, y donnés par (19); p_1, p_2, p_3, p_6 — racines de $f_3(p)$ de (21); p_4, p_5 — racines de $f_4(p)$ de (22).

Dans les figures 27—35:

$$R_1(0, a); R_2(0, \frac{a}{2}); R_3(a, 0); R_4(-\frac{C}{2}Ea, \frac{a}{2}); R_5(-Ca, \frac{a}{2}\sqrt{1-C^2});$$

$$R_6(\frac{a}{2}, 0); R_7(x(s_1), 0); R_8(0, \frac{a}{2}\sqrt{1-C^2E^4}); R_9(x(s_2), 0); R_{10}(x(s_3), 0);$$

$$R_{11}(x(s_4), y(s_4)),$$

avec x, y donnés par (70);

s_1, s_2, s_3 racines de $f_{44}(s)$ de (71) et s_4 racine de $f_{45}(s)$ de (72).

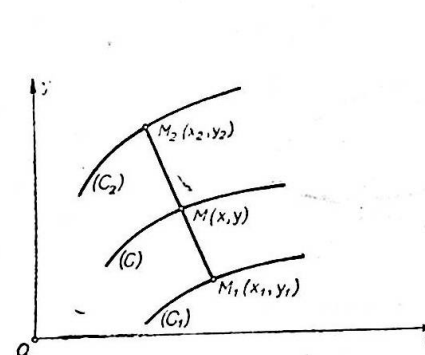


Fig. 1

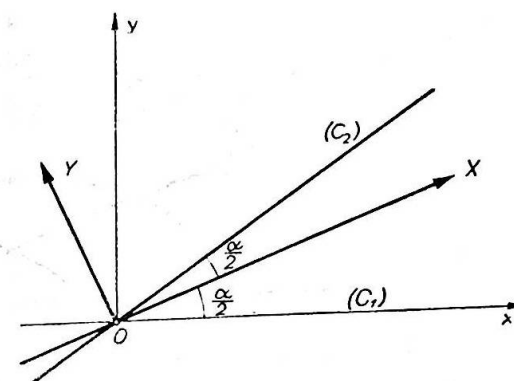


Fig. 2

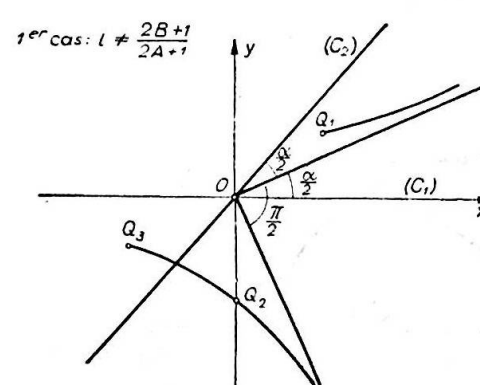


Fig. 3

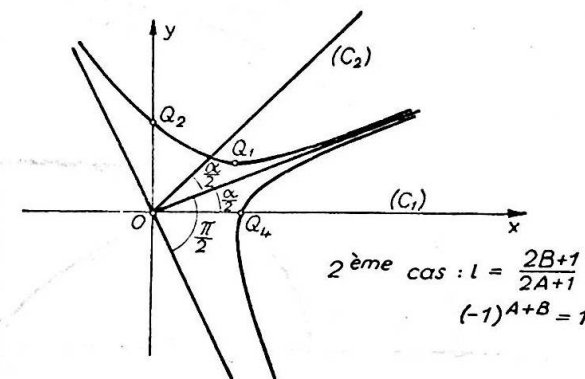


Fig. 4

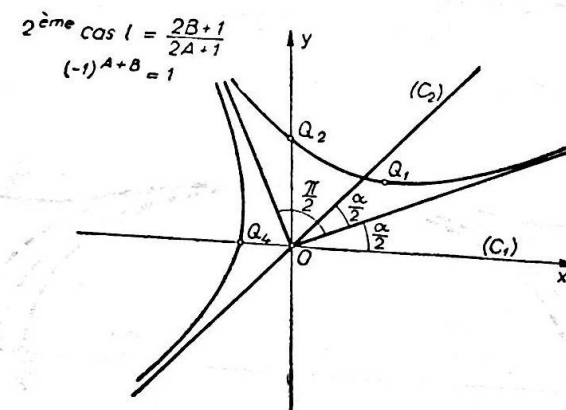


Fig. 5

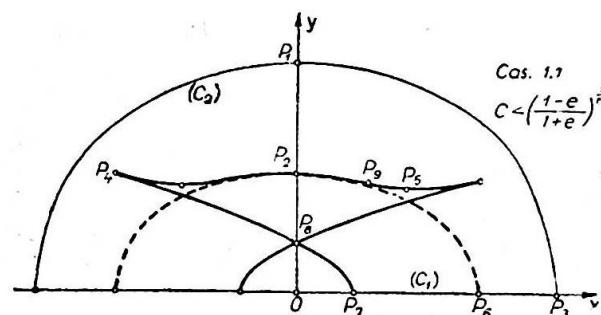


Fig. 6

Cas 1.2

$$C = \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}}$$

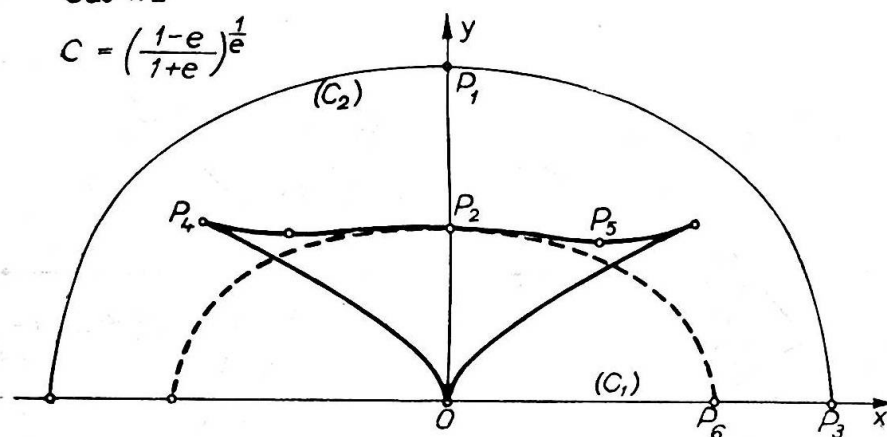


Fig. 7

$$\text{Cas 1.3: } \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{1}{e}} < C \leq \sqrt{3} E^{-1}$$

$$\text{Cas 1.9: } \sqrt{3} E^{-1} < C < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e > e_0$$

$e_0 \in (0,1)$ racine
de $f_6(e)$ de (25)

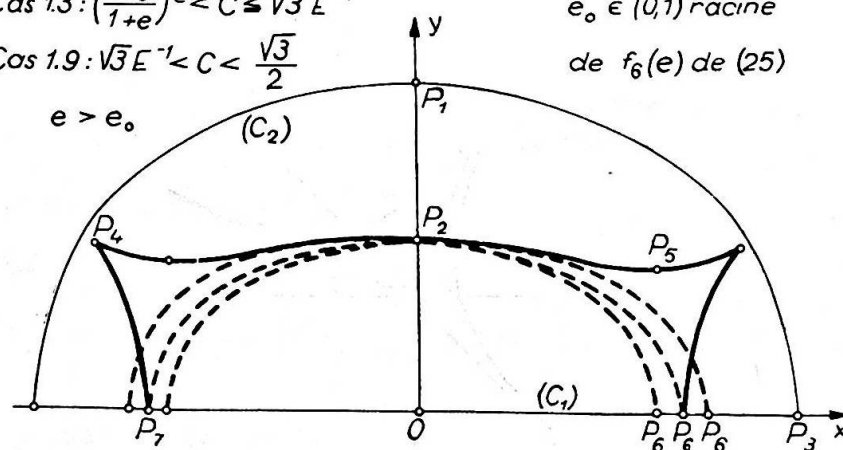
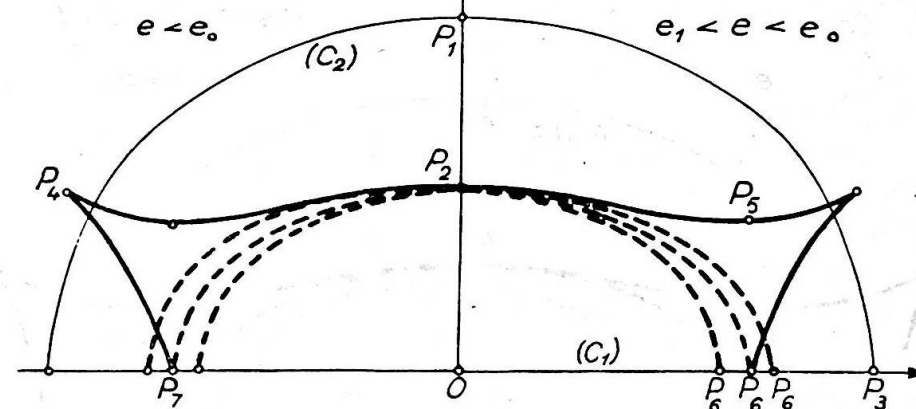


Fig. 8

$$\text{Cas 1.4: } \sqrt{3} E^{-1} < C \leq 3E^{-\frac{4}{3}} \quad \text{Cas 1.7: } 3E^{-\frac{4}{3}} < C < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e < e_0$$

$$e_1 < e < e_0$$



$$\text{Cas 1.12: } \frac{\sqrt{3}}{2} < C < 1; e > e_1;$$

$e_1 \in (0, e_0)$ racine de $f_5(e)$ de (26)

Fig. 9

$$\text{Cas 1.10: } \frac{\sqrt{3}}{2} \leq C < 1$$

$$C < C_1$$

$$\text{Cas 1.5: } 3E^{-\frac{4}{3}} < C < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e < e_1$$

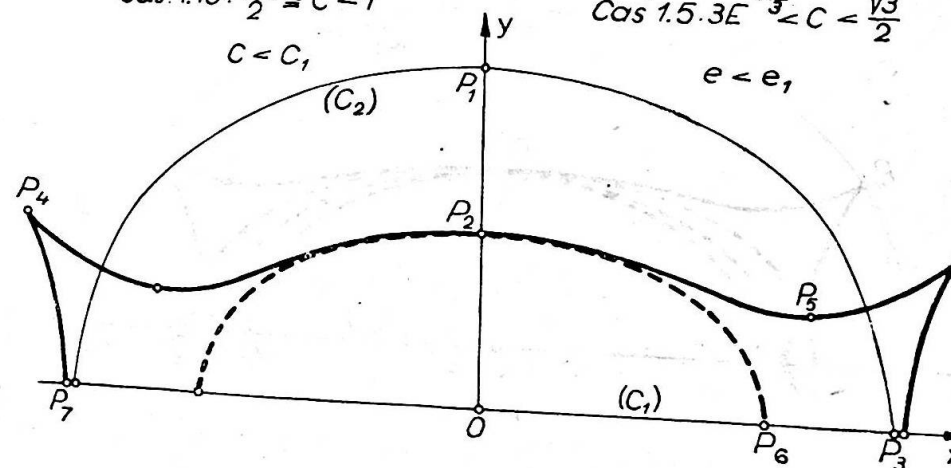


Fig. 10

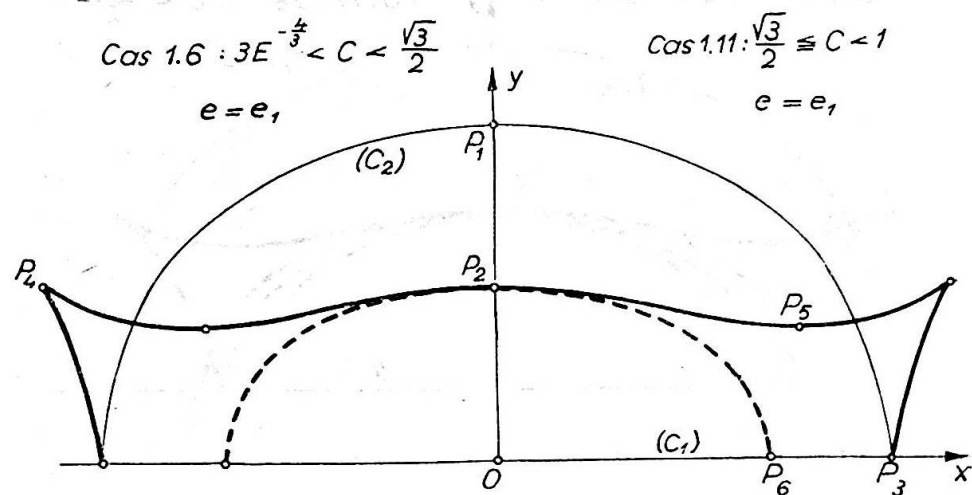


Fig. 11

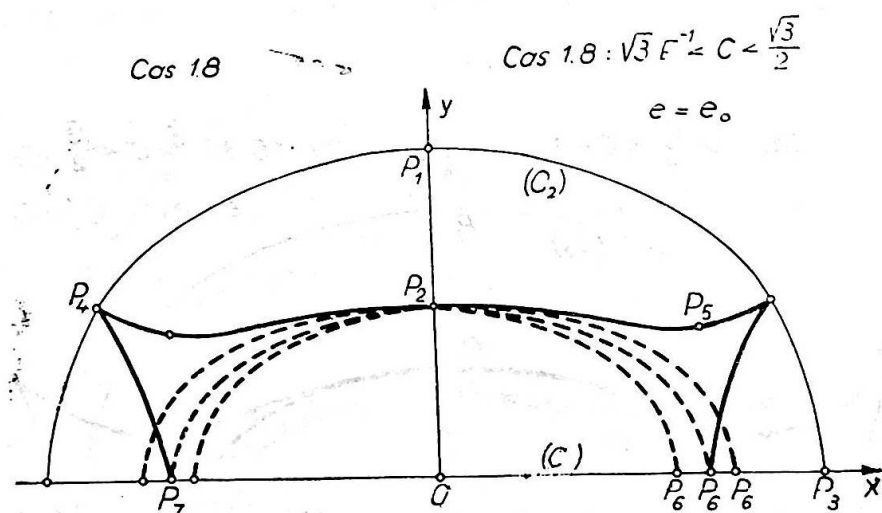


Fig. 12

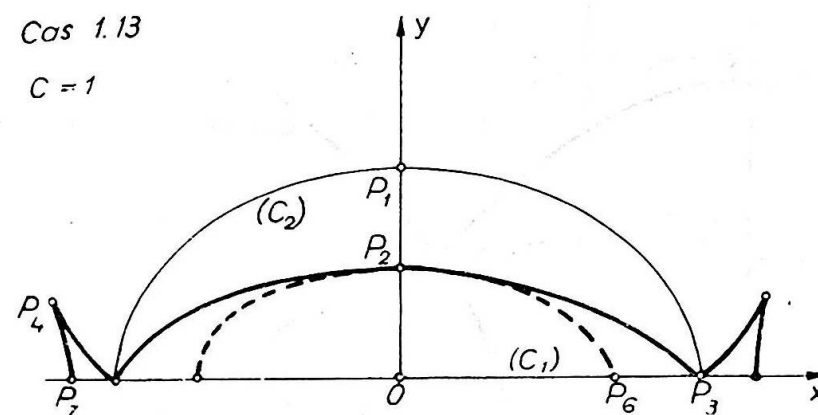


Fig. 13

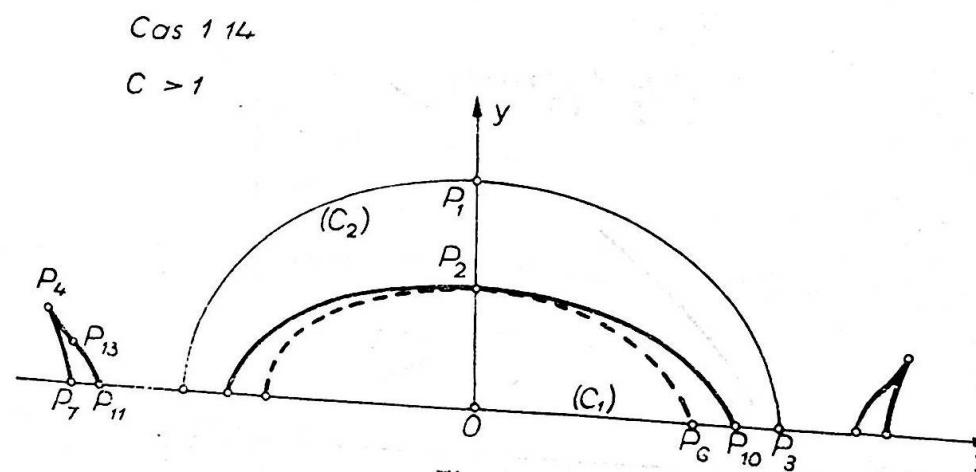


Fig. 14

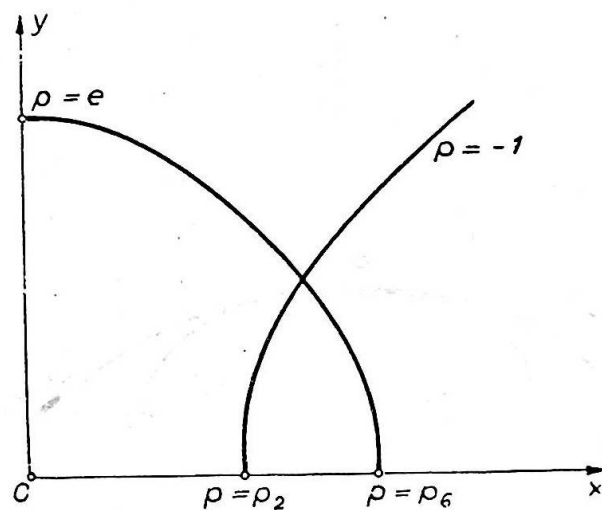


Fig. 15

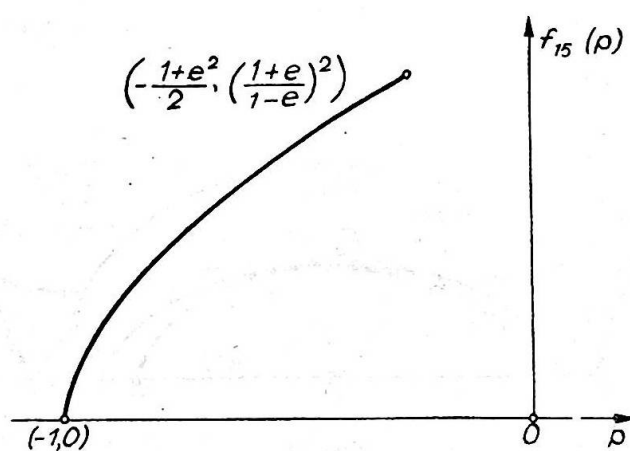


Fig. 16

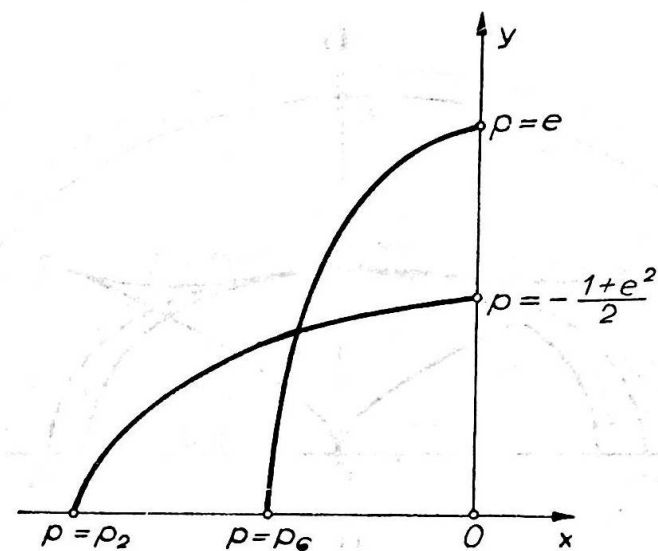


Fig. 17

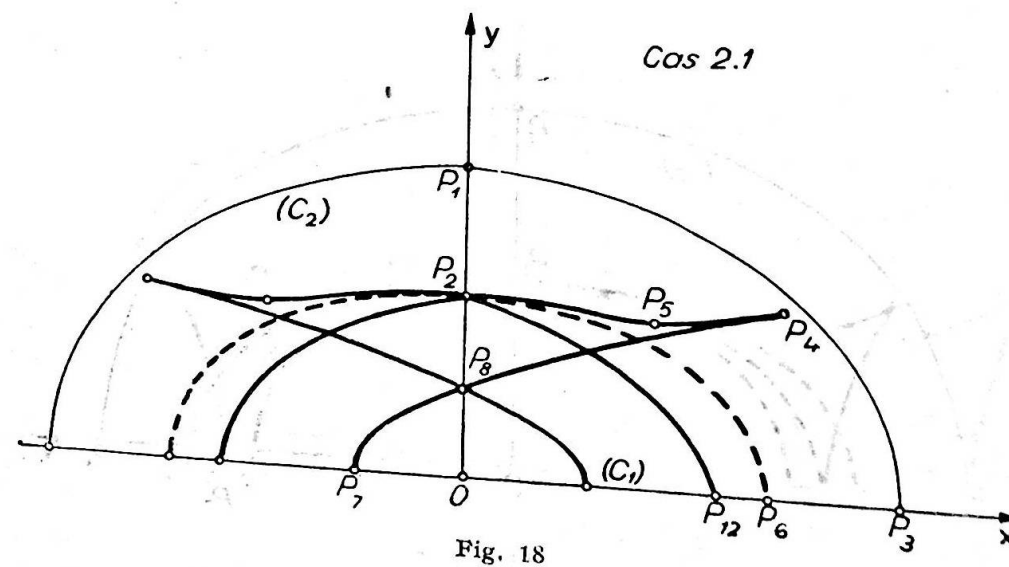


Fig. 18

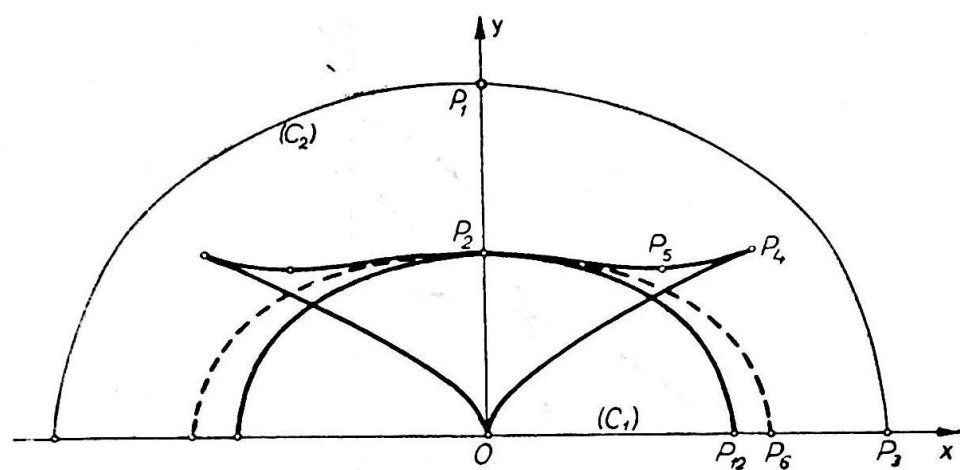


Fig. 19

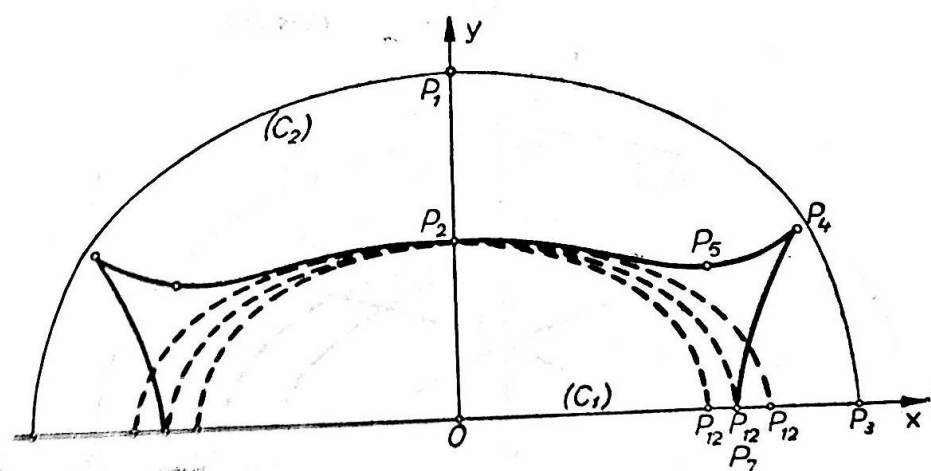


Fig. 20

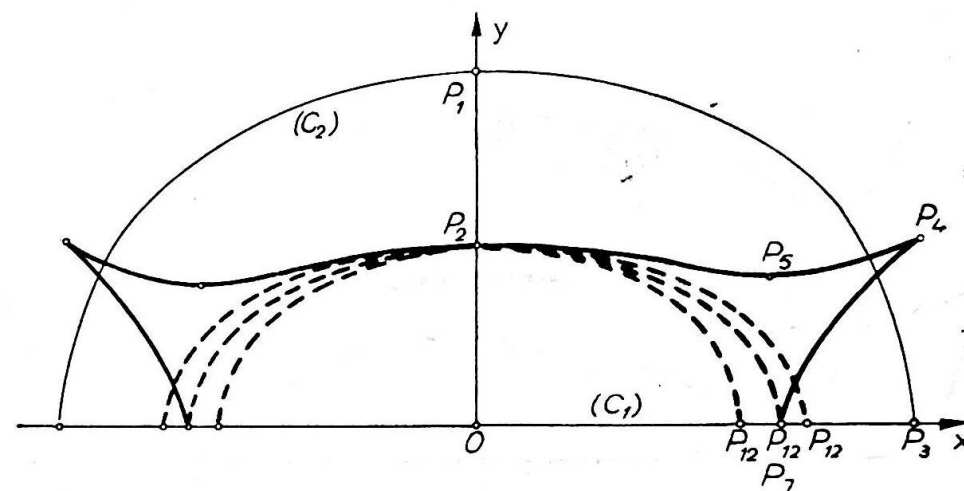


Fig. 21

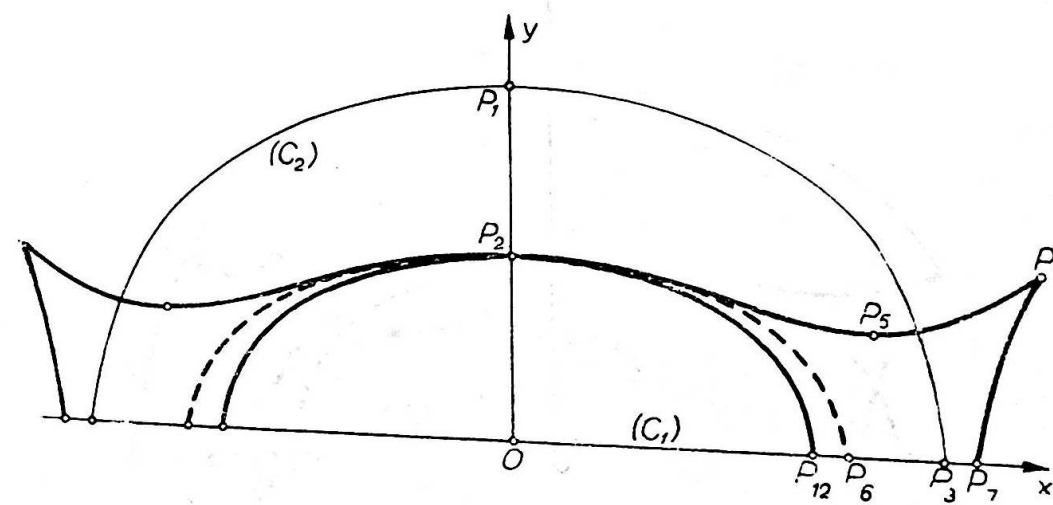


Fig. 22

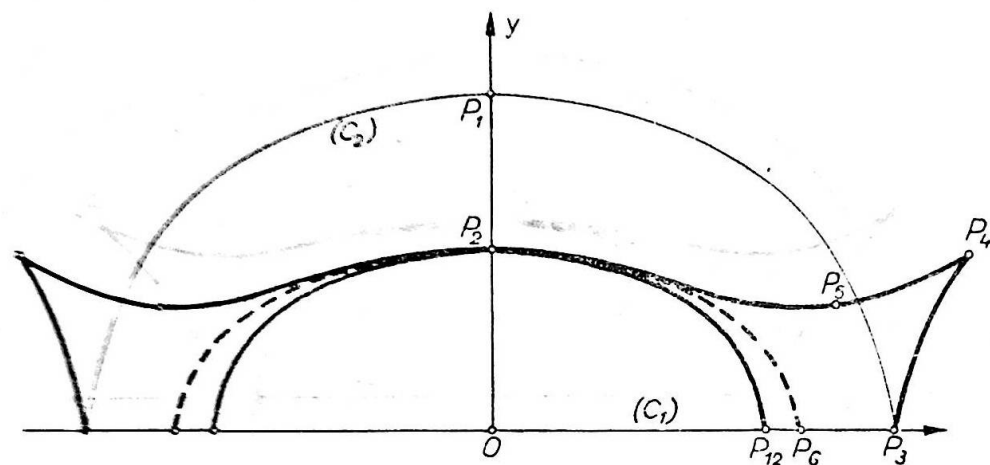


Fig. 23

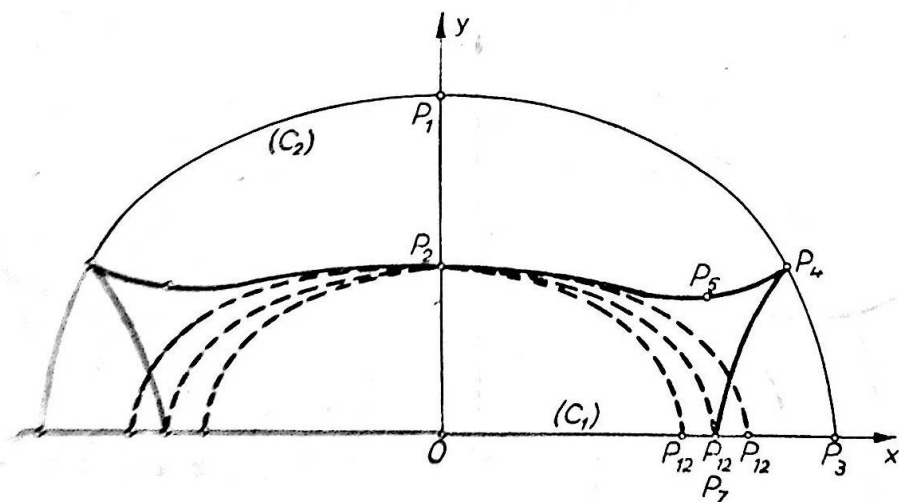


Fig. 24

Cas 2.13

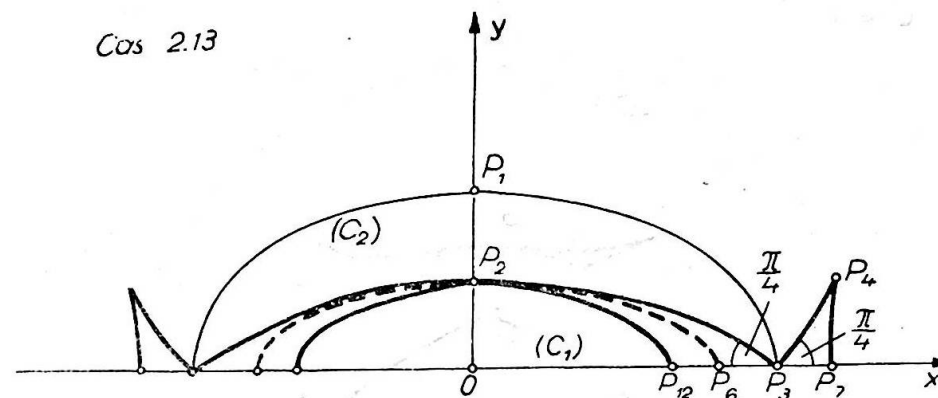


Fig. 25

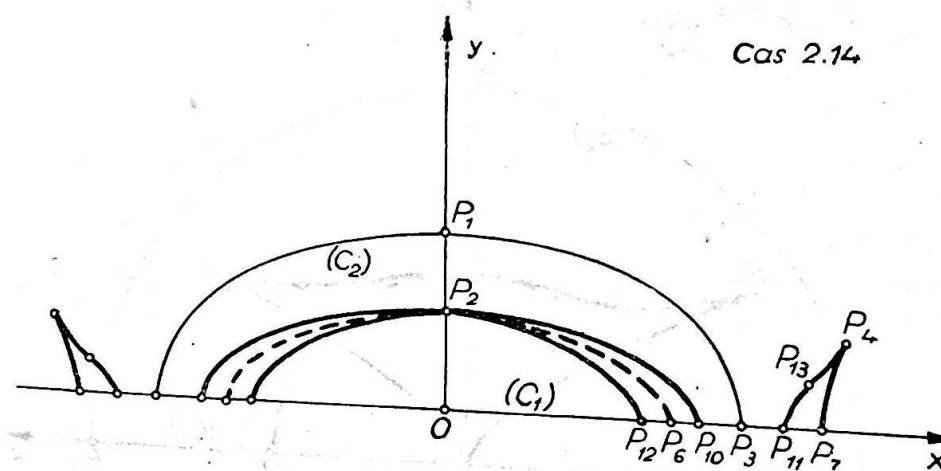


Fig. 26

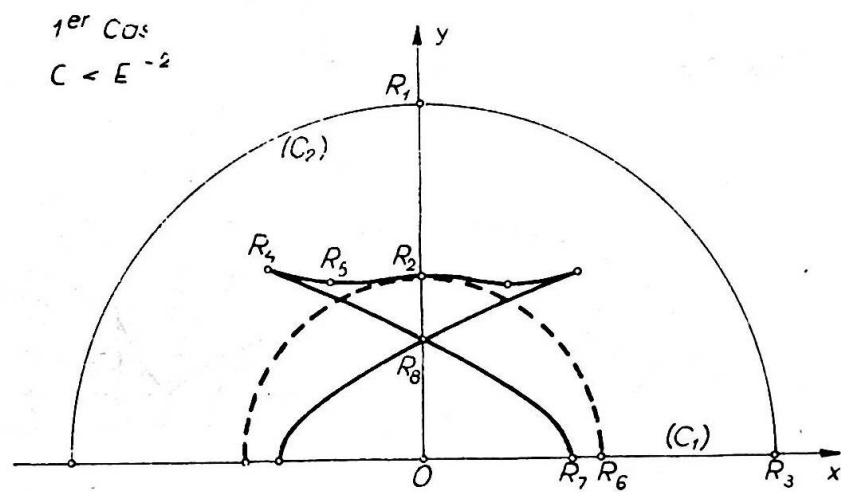


Fig. 27

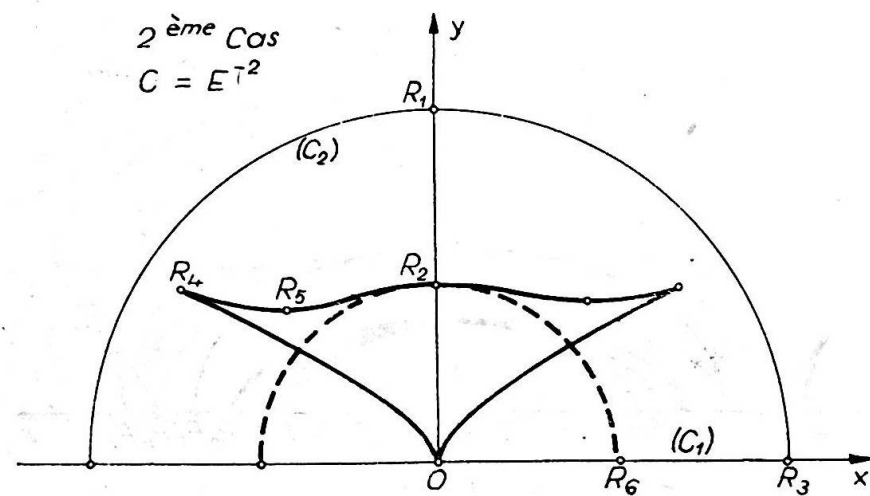


Fig. 28

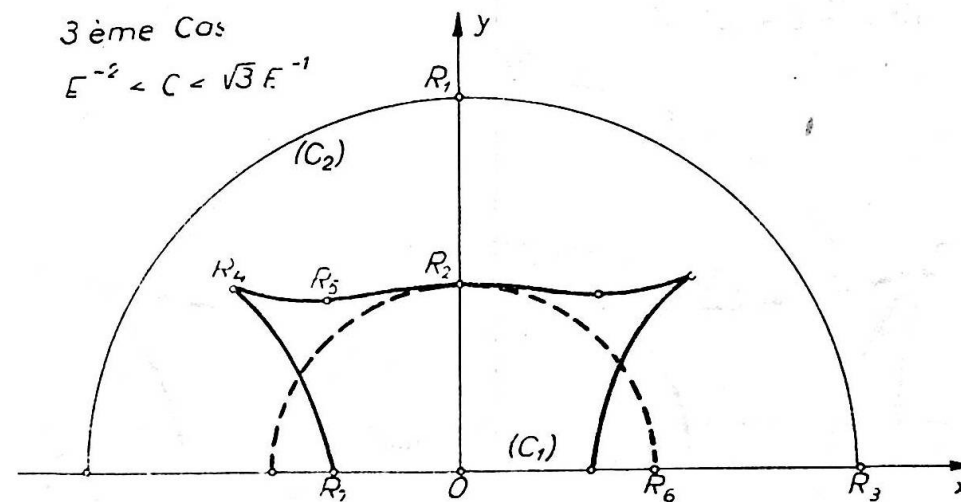


Fig. 29

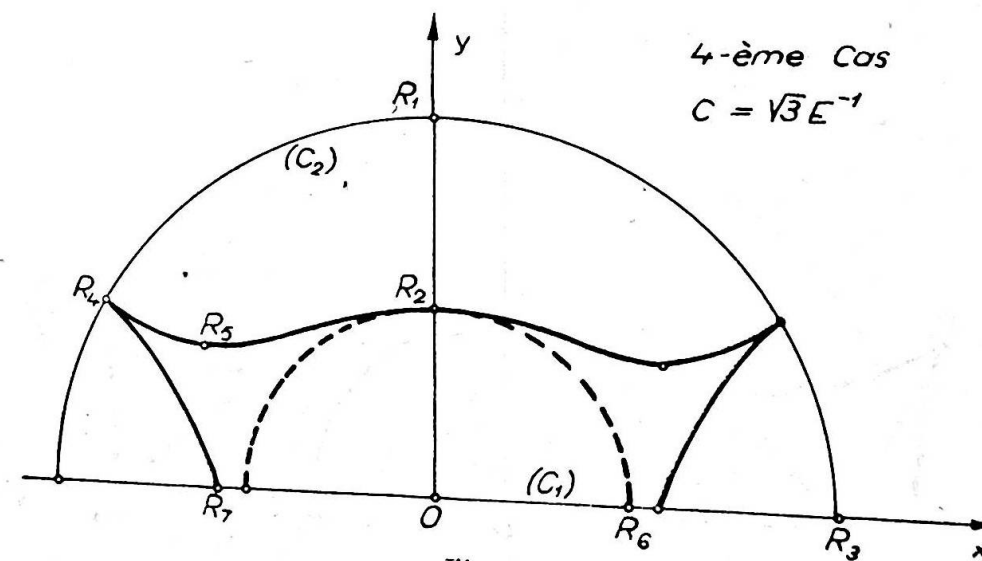


Fig. 30

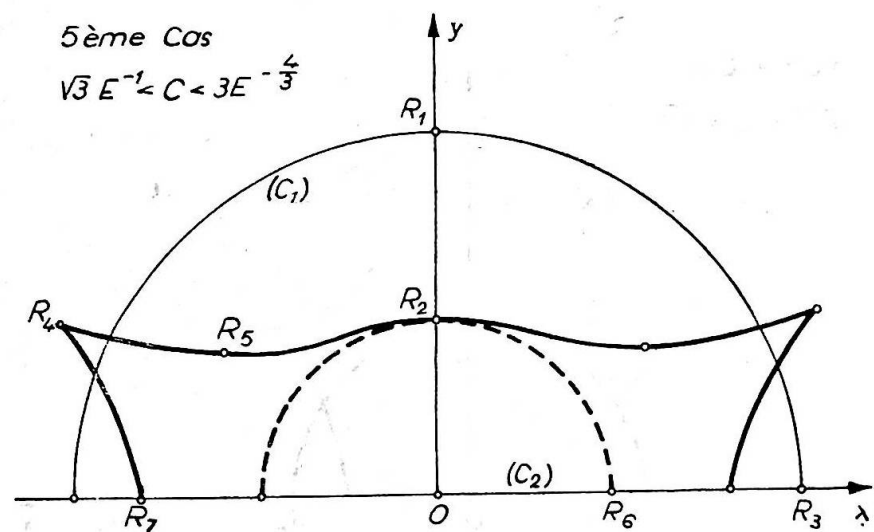


Fig. 31

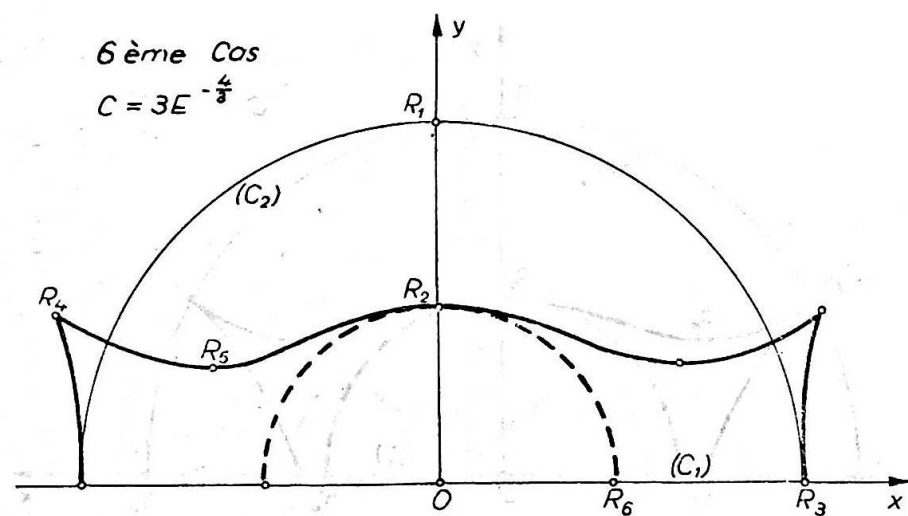


Fig. 32

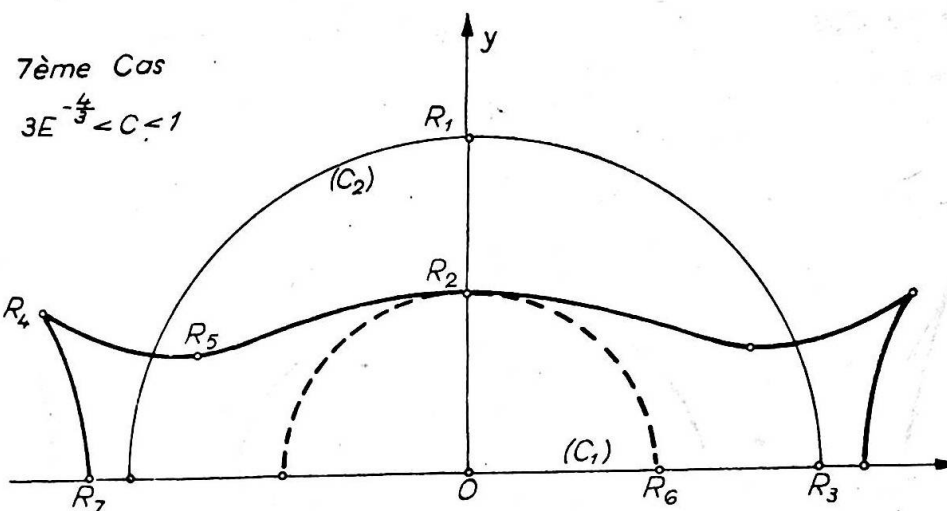


Fig. 33

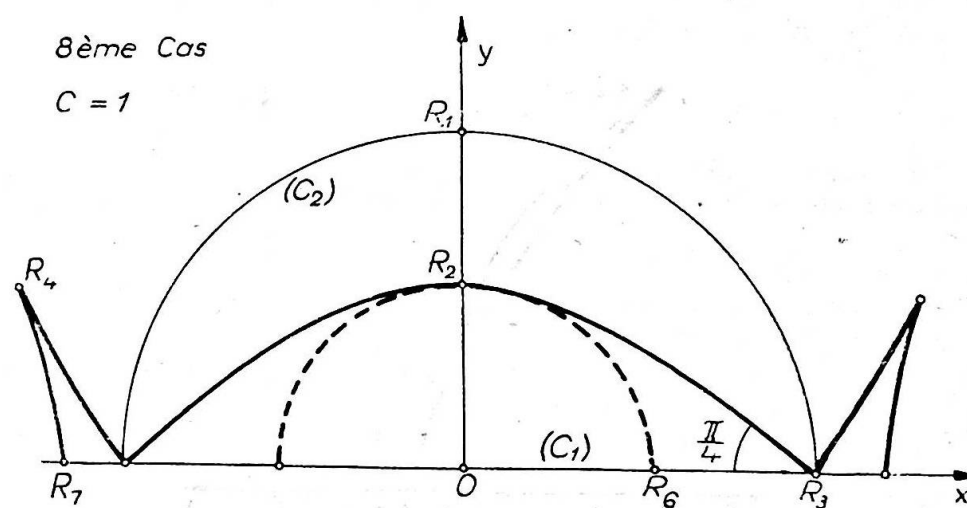


Fig. 34

9ème Cas

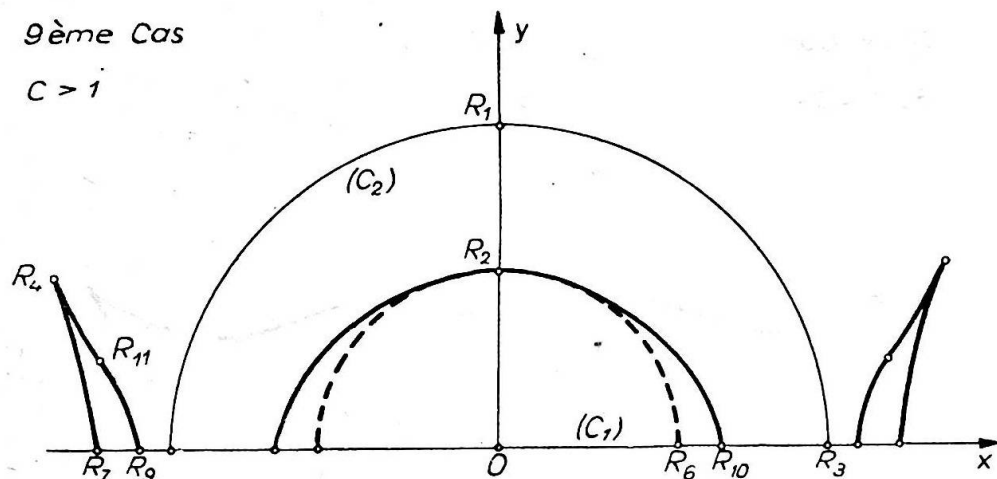
 $C > 1$ 

Fig. 35

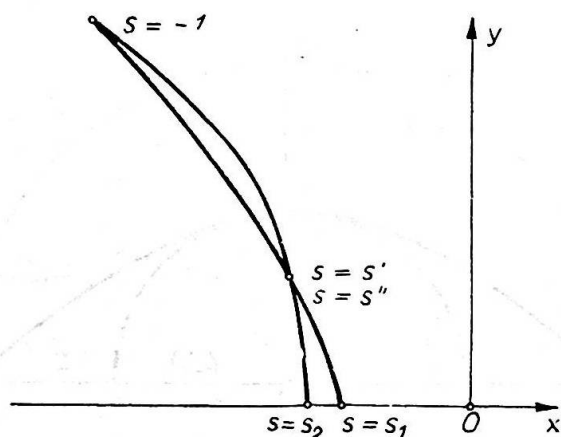


Fig. 36

CHAPLIGHIN TYPE METHODS FOR HYPERBOLIC EQUATIONS

by

E. SCHECHTER

Cluj

The purpose of the present paper is to extend a method given by W. Mlak [6], to second order hyperbolic partial differential equations. Some special procedures requiring less restrictive conditions than those in [1], [2], are also derived. The last section deals with the convergence of the approximating sequences.

1. For the sake of brevity we shall follow Kisynski's approach [4] of simultaneously discussing the Cauchy and Darboux problems for

$$(1) \quad u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y).$$

We shall suppose, so as not to encumber the exposition unduly, that existence and uniqueness conditions are always fulfilled. For such conditions the reader is referred to [4].

Let the curve C_1 be represented by $y = \bar{y}(x)$ for $x \in [0, a_0]$. Denote by $x = \bar{x}(y)$, $y \in [0, b_0]$ the inverse of $y = \bar{y}(x)$ and by a and b two numbers such that $a \geq a_0$, $b \geq b_0$. We define now $\bar{y}(x)$ on $[0, a]$ and $\bar{x}(y)$ on $[0, b]$ by putting $\bar{y}(x) = 0$ for $x \in [a_0, a]$ and $\bar{x}(y) = 0$ for $y \in [b_0, b]$. As in [8]

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, \bar{y}(x) \leq y \leq b\} = \\ = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq b, \bar{x}(y) \leq x \leq a\},$$

$r(x_0, y_0)$ is the intersection of R with the rectangle $0 \leq x \leq x_0$; $0 \leq y \leq y_0$ and C is the set of the points of R belonging either to C_1 or to the axes. A function $g(x, y)$ is said to be of class $C^*(R)$ if g_x, g_y, g_{xy} exist and are continuous on R .