

DESPRE O FORMULĂ DE CUBATURĂ

de

D. V. IONESCU

Este cunoscută formula de cubatură

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \frac{S}{6} [f(x_0 - h, y_0) + f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0 - k) + f(x_0, y_0 + k) + 2f(x_0, y_0)] + R \quad (1)$$

în care domeniul D este un dreptunghi definit de inegalitățile

$$D : x_0 - h \leq x \leq x_0 + h, y_0 - k \leq y \leq y_0 + k$$

S este aria dreptunghiului, iar R este restul formulei.

Această formulă este amintită de F r. A. W i l l e r s [5], de G. W. T y l l e r [4] și de I. A l b r e c h t și L. C o l l a t z [1].

În această lucrare vom da o metodă pentru a obține formula de cubatură (1) și restul R în același timp, sub forma

$$R = \iint_D \Phi(x, y) \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy + \int_{x-h}^{x_0+h} \varphi(s) \frac{\partial^4 f}{\partial s^4}(s, y_0) ds + \int_{y_0-k}^{y_0+k} \psi(t) \frac{\partial^4 f}{\partial t^4}(x_0, t) dt \quad (2)$$

determinînd funcțiile $\Phi(x, y)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$

Restul formulei (1) fiind astfel bine precizat, se va face o aplicație a formulei (1), la calculul aproximativ al integralelor duble.

Metoda de lucru pentru obținerea formulei de cubatură (1) este aceeași cu cea întrebuințată în lucrarea noastră [2], despre punerea unei diferențe divizate de ordinul (m, n) a unei funcții de două variabile, sub forma unei integrale duble. Prin această metodă obținerea unei formule de cubatură se reduce la integrarea unui sistem de ecuații cu derivate parțiale cu anumite condiții la limită, după cum obținerea unei formule de cuadratură

este legată de integrarea unui sistem de ecuații diferențiale cu anumite condiții la limită [3].

§ 1. FORMULE PRELIMINARII

1. Să considerăm dreptunghiul D , definit de inegalitățile

$$D: x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2$$

în care sînt definite funcțiile $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ continue împreună cu derivatele lor parțiale,

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

Transformînd integrala dublă

$$\iint_D \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy$$

prin integrări prin părți convenabile, se ajunge la următoarea formulă

$$\begin{aligned} \iint_D \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy &= \varphi(x_2, y_2) f(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_2) f(x_1, y_2) - \\ &- \varphi(x_2, y_1) f(x_2, y_1) + \varphi(x_1, y_1) f(x_1, y_1) \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y_1) f(x, y_1) dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y_2) f(x, y_2) dx + \\ &+ \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_1, y) f(x_1, y) dy - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_2, y) f(x_2, y) dy + \\ &+ \iint_D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} f dx dy \end{aligned} \quad (3)$$

Să presupunem acum că funcțiile $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ mai au derivatele parțiale

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \end{aligned}$$

continue în D .

Înlocuind atunci în formula (3) pe f cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ vom avea

$$\begin{aligned} \iint_D \varphi \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy &= \varphi(x_2, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_2) - \\ &- \varphi(x_2, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_1) + \varphi(x_1, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_1) dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_2) dx + \\ &+ \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_1, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y) dy - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_2, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y) dy + \\ &+ \iint_D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy \end{aligned}$$

Dacă în membrul al doilea înlocuim ultima integrală cu membrul al doilea al formulei (3), în care $\varphi(x, y)$ este înlocuit cu $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ obținem formula

$$\begin{aligned} \iint_D \varphi \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy &= \varphi(x_2, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_2) - \\ &- \varphi(x_2, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_1) + \varphi(x_1, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) + \\ &+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) f(x_2, y_2) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_1, y_2) f(x_1, y_2) - \\ &- \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_2, y_1) f(x_2, y_1) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) f(x_1, y_1) + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_1) dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_2) dx + \\ &+ \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_1, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y) dy - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_2, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y) dy + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y}(x, y_1) f(x, y_1) dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2) f(x, y_2) dx + \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} (x_1, y) f(x_1, y) dy - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} (x_2, y) f(x_2, y) dy + \\
& + \iint_D \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} f dx dy
\end{aligned}$$

care este fundamentală pentru această lucrare.

2. Să considerăm acum dreptunghiurile D_1, D_2, D_3, D_4 , definite de inegalitățile

$$\begin{array}{lll}
D_1: & x_2 \leq x \leq x_3, & y_2 \leq y \leq y_3 \\
D_2: & x_1 \leq x \leq x_2, & y_2 \leq y \leq y_3 \\
D_3: & x_1 \leq x \leq x_2, & y_1 \leq y \leq y_2 \\
D_4: & x_2 \leq x \leq x_3, & y_1 \leq y \leq y_2
\end{array}$$

și să notăm cu D dreptunghiul format din dreptunghiurile D_1, D_2, D_3, D_4 .

La dreptunghiul D_i atașăm funcția $\varphi_i(x)$ continuă și cu derivatele parțiale care figurează în formula (4), continue în D_i ; aceasta pentru $i = 1, 2, 3, 4$.

De asemenea fie $f(x, y)$ o funcție continuă în dreptunghiul D și care are derivatele parțiale care figurează în formula (4), continue în D .

Aplicăm la fiecare dreptunghi D_i și la funcțiile f, φ_i formula (4). Adunăm membru cu membru cele patru formule care se obțin și vom avea următoarea formulă

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^4 \iint_{D_i} \varphi_i \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy = \\
& = \varphi_1(x_3, y_3) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_3, y_3) - \varphi_2(x_1, y_3) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_1, y_3) + \varphi_3(x_1, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_1, y_1) \\
& - \varphi_4(x_3, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_3, y_1) + [\varphi_3(x_3, y_3) - \varphi_1(x_3, y_3)] \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_2, y_3) + \\
& + [\varphi_2(x_1, y_2) - \varphi_3(x_1, y_2)] \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_1, y_2) + [\varphi_4(x_2, y_1) - \varphi_3(x_2, y_1)] \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_2, y_1) + \\
& + [\varphi_4(x_3, y_2) - \varphi_1(x_3, y_2)] \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_3, y_2) + [\varphi_1(x_2, y_2) - \varphi_2(x_2, y_2) + \\
& + \varphi_3(x_2, y_2) - \varphi_4(x_2, y)] \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_2, y_2) + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} (x_3, y_3) f(x_3, y_3) - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} (x_1, y_3) f(x_1, y_3) + \\
& + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} (x_1, y_1) f(x_1, y_1) - \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x \partial y} (x_3, y_1) f(x_3, y_1) + \\
& + \left[\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} (x_2, y_3) - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} (x_2, y_3) \right] f(x_2, y_3) + \left[\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} (x, y_2) - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} (x_1, y_2) \right] f(x_1, y_2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}(x_2, y_1) - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y}(x_2, y_1) \right] f(x_2, y_1) + \left[\frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x \partial y}(x_3, y_2) + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y}(x_3, y_2) \right] f(x_3, y_2) + \\
& + \left[\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) - \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) \right] f(x_2, y_2) + \\
& + \int_{x_2}^{x_3} \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y_2) - \frac{\partial \varphi_4}{\partial x}(x, y_2) \right] \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_2) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y_3) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_3) + \right. \\
& + \left. \frac{\partial \varphi_4}{\partial x}(x, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_1) \right\} dx \\
& + \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y_2) - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(x, y_2) \right] \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_2) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y_3) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_3) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(x, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_1) \right\} dx + \\
& + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_2, y) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_2, y) \right] \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_3, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_3, y) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_1, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y) \right\} dy + \\
& + \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_4}{\partial y}(x_2, y) - \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(x_2, y) \right] \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y) - \frac{\partial \varphi_4}{\partial y}(x_3, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_3, y) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(x_1, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y) \right\} dy + \\
& + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2) - \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2) \right] f(x, y_2) - \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y}(x, y_3) f(x, y_3) + \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y}(x, y_1) f(x, y_1) \right\} dx + \\
& + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2) - \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2) \right] f(x, y_2) - \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y}(x, y_3) f(x, y_3) + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x^2 \partial y}(x, y_1) f(x, y_1) \right\} dx + \\
& + \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \left[\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y^2}(x_2, y) - \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x \partial y^2}(x_2, y) \right] f(x_2, y) - \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y^2}(x_3, y) f(x_3, y) + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x \partial y^2}(x_1, y) f(x_1, y) \right\} dy + \\
& + \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \left[\frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial x \partial y^2}(x_2, y) - \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x \partial y^2}(x_2, y) \right] f(x_2, y) - \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial x \partial y^2}(x_3, y) f(x_3, y) + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x \partial y^2}(x_1, y) f(x_1, y) \right\} dy + \\
& + \sum_{i=1}^4 \iint_{D_i} \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x^2 \partial y^2} f \, dx \, dy
\end{aligned}$$

§ 2. PROBLEMĂ LA LIMITĂ

3. În legătură cu formula (5) se pune următoarea problemă la limită.

Să se determine funcțiile $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $\varphi_3(x, y)$, $\varphi_4(x, y)$ soluții ale ecuațiilor cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y^2} = 1, \quad \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y^2} = 1, \quad \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial x^2 \partial y^2} = 1, \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y^2} = 1 \quad (6)$$

și care să verifice următoarele condiții la limită

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y}(x, y_3) = 0, \quad \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y^2}(x_3, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}(x_3, y_3) = 0 \\ \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y}(x, y_3) = 0, \quad \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x \partial y^2}(x_1, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y}(x_1, y_3) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x^2 \partial y}(x, y_1) = 0, \quad \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x \partial y^2}(x_1, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) = 0$$

$$\frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y}(x, y_1) = 0, \quad \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial x \partial y^2}(x_3, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x \partial y}(x_3, y_1) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y_3) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_3, y) = 0, \quad \varphi_1(x_3, y_3) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y_3) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_1, y) = 0, \quad \varphi_2(x_1, y_3) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(x, y_1) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(x_1, y) = 0, \quad \varphi_3(x_1, y_1) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial x}(x, y_1) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial y}(x_3, y) = 0, \quad \varphi_4(x_3, y_1) = 0$$

Integrând ecuațiile (6) cu condițiile la limită (7), se găsește

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} &= (x - x_3)(y - y_3) \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} &= (x - x_1)(y - y_3) \\ \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} &= (x - x_1)(y - y_1) \\ \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x \partial y} &= (x - x_3)(y - y_1) \end{aligned} \quad (9)$$

Integrând apoi ecuațiile cu derivate parțiale (9) cu condițiile (8) se obține

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{4}(x - x_3)^2 (y - y_3)^2 \\ \varphi_2 &= \frac{1}{4}(x - x_1)^2 (y - y_3)^2 \\ \varphi_3 &= \frac{1}{4}(x - x_1)^2 (y - y_1)^2 \\ \varphi_4 &= \frac{1}{4}(x - x_3)^2 (y - y_1)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Cu aceasta problema la limită pusă mai sus este rezolvată.

§ 3. FORMULĂ DE CUBATURĂ

4. În formula (5) să alegem funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ astfel ca ele să fie soluțiile ecuațiilor cu derivate parțiale (9) și care verifică condițiile la limită (7) și (8). Atunci această formulă capătă forma

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^4 \iint_{D_i} \varphi_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy &= A \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) + B f(x_2, y_2) + \\
 &+ \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x_1 y_2) - \frac{\partial \varphi_4}{\partial x}(x_1 y_2) \right] \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1 y_2) dx + \\
 &+ \int_{y_2}^{y_3} \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_2, y) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_2, y) \right] \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y) dy + \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial \varphi_4}{\partial y}(x_2, y) - \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(x_2, y) \right] \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y) dy + \\
 &+ \int_{x_2}^{x_3} \left[\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2) - \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2) \right] f(x, y_2) dx + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2) - \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2) \right] f(x, y_2) dx + \\
 &+ \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y^2}(x_2, y) - \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x \partial y^2}(x_2, y) \right] f(x_2, y) dy + \int_{y_2}^{y_3} \left[\frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial x \partial y^2}(x_2, y) - \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x \partial y^2}(x_2, y) \right] f(x_2, y) dy + \\
 &+ \iint_D f dx dy
 \end{aligned} \tag{11}$$

unde

$$A = \varphi_1(x_2, y_2) - \varphi_2(x_2, y_2) + \varphi_3(x_2, y_2) - \varphi_4(x_2, y_2) \tag{12}$$

$$B = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) - \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) \tag{13}$$

Ținând seamă de ecuațiile (10) și făcînd calculele, avem

$$A = (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) \left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2} \right) \left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2} \right) \tag{12'}$$

$$B = (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) \tag{13'}$$

Mai departe, avem

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y_2) - \frac{\partial \varphi_4}{\partial x}(x, y_2) &= - (y_3 - y_1) \left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2} \right) (x - x_3) \\
 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y_2) - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(x, y_2) &= - (y_3 - y_1) \left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2} \right) (x - x_1) \\
 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_2, y) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_2, y) &= - (x_3 - x_1) \left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2} \right) (y - y_3) \\
 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_2, y) - \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(x_2, y) &= - (x_3 - x_1) \left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2} \right) (y - y_1) \\
 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2) - \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2) &= \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2) - \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x^2 \partial y}(x, y_2) = - (y_3 - y_1) \\
 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial y^2}(x_2, y) - \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x \partial y^2}(x_2, y) &= \frac{\partial^3 \varphi_4}{\partial x \partial y^2}(x_2, y) - \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x \partial y^2}(x_2, y) = - (x_3 - x_1)
 \end{aligned} \tag{14}$$

Ținând seama de ecuațiile (6) și de condițiile la limită (7), (8), (9), precum și de formulele (12'), (13'), (14), formula fundamentală (5) se transformă în formula

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^4 \iint_{D_i} \varphi_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy &= (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) \left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2} \right) \left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) + \\
 &+ (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) f(x_2, y_2) - \\
 &- (y_3 - y_1) \int_{x_1}^{x_3} f(x, y_2) dx - (x_3 - x_1) \int_{y_1}^{y_3} f(x_2, y) dy - \\
 &- (y_3 - y_1) \left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2} \right) \left[\int_{x_1}^{x_2} (x - x_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_2) dx + \int_{x_2}^{x_3} (x - x_3) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y_2) dx \right] - \\
 &- (x_3 - x_1) \left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2} \right) \left[\int_{y_1}^{y_2} (y - y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y) dy + \int_{y_2}^{y_3} (y - y_3) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y) dy \right] + \\
 &+ \iint_D f dx dy
 \end{aligned} \tag{15}$$

Să observăm însă că

$$\int_{x_1}^{x_2} (x - x_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x, y_2) dx = (x_2 - x_1) \frac{\partial f}{\partial y} (x_2, y_2) - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} (x, y_2) dx$$

$$\int_{x_2}^{x_3} (x - x_3) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x, y_2) dx = (x_3 - x_2) \frac{\partial f}{\partial y} (x_2, y_2) - \int_{x_2}^{x_3} \frac{\partial f}{\partial x} (x, y_2) dx$$

$$\int_{y_1}^{y_2} (y - y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_2, y) dy = (y_2 - y_1) \frac{\partial f}{\partial x} (x_2, y_2) - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f}{\partial x} (x_2, y) dy$$

$$\int_{y_2}^{y_3} (y - y_3) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_2, y) dy = (y_3 - y_2) \frac{\partial f}{\partial x} (x_2, y_2) - \int_{y_2}^{y_3} \frac{\partial f}{\partial x} (x_2, y) dy$$

și ținînd seama de aceasta, formula (15) devine

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \iint_{D_i} \varphi_i \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy &= (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) \left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2} \right) \left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2} \right) \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y} (x_2, y_2) + \\ &+ (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) f(x_2, y_2) - (y_3 - y_1) \int_{x_1}^{x_3} f(x, y_2) dx - (x_3 - x_1) \int_{y_1}^{y_3} f(x_2, y) dy - \\ &- (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) \left[\left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial y} (x_2, y_2) + \left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial x} (x_2, y_2) \right] + (16) \\ &+ (y_3 - y_1) \left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2} \right) \int_{x_1}^{x_3} \frac{\partial f}{\partial y} (x, y_2) dx + (x_3 - x_1) \left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2} \right) \int_{y_1}^{y_3} \frac{\partial f}{\partial x} (x_2, y) dy + \\ &+ \iint_D f dx dy \end{aligned}$$

Din formula (16), rezultă formula de cubatură care face obiectul acestei lucrări:

$$\begin{aligned} \iint_D f dx dy &= - (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) \left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2} \right) \left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2} \right) \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y} (x_2, y_2) - \\ &- (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) f(x_2, y_2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) \left[\left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) + \left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) \right] + \\
& + (y_3 - y_1) \int_{x_1}^{x_3} f(x, y_2) dx + (x_3 - x_1) \int_{y_1}^{y_3} f(x_2, y) dy. \quad (17) \\
& - (y_3 - y_1) \left(y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2} \right) \int_{x_1}^{x_3} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_2) dx - (x_3 - x_1) \left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2} \right) \int_{y_1}^{y_3} \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y) dy + R
\end{aligned}$$

unde restul R este dat de formula

$$R = \iint_D \Phi(x, y) \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy \quad (18)$$

unde funcția $\Phi(x, y)$ coincide pe dreptunghiurile D_1, D_2, D_3, D_4 cu funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ date de formulele (10).

5. În cazul particular cînd punctul de coordonare (x_2, y_2) este centrul dreptunghiului D , formula de cubatură (17) se simplifică și ia forma

$$\iint_D f dx dy = -(x_3 - x_1)(y_3 - y_1) f(x_2, y_2) + (y_3 - y_1) \int_{x_1}^{x_3} f(x, y_2) dx + \int_{y_1}^{y_3} f(x_2, y) dy + R \quad (19)$$

unde restul R este dat tot de formula (18). În acest caz însă funcția $\varphi(x, y)$ este continuă pe dreptunghiul D și se anulează pe laturile acestui dreptunghi.

Înlocuind în formula (19) pe $f(x, y)$ cu $\frac{(x - x_2)^2(y - y_2)^2}{4}$, obținem

$$\iint_D \Phi(x, y) dx dy = \frac{(x_2 - x_1)^3(y_2 - y_1)^3}{9} \quad (20)$$

și de aici rezultă o nouă formă a restului formulei de cubatură

$$R = \frac{(x_2 - x_1)^3(y_2 - y_1)^3}{9} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{\substack{x=\xi \\ y=\eta}} \quad (21)$$

unde (ξ, η) este un anumit punct din dreptunghiul D .

Din formula (21) rezultă și următoarea evaluare a restului. Avem

$$|R| \leq \frac{(x_2 - x_1)^3(y_2 - y_1)^3}{9} M_{22} \quad (22)$$

unde

$$M_{22} = \sup_{(D)} \left| \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right|$$

§ 4. APLICAȚIE A FORMULEI DE CUBATURĂ (19)

6. Să schimbăm notația punînd

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 - h, & x_2 &= x_0, & x_3 &= x_0 + h \\y_1 &= y_0 - k, & y_2 &= y_0, & y_3 &= y_0 + k\end{aligned}$$

Formula (19) se va scrie sub forma

$$\iint_D f dx dy = -4hk f(x_0, y_0) + 2h \int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_0, y) dy + 2k \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_0) dx + R \quad (19)$$

și avem

$$|R| \leq \frac{h^3 k^3}{9} M_{2,2} \quad (22')$$

Să aplicăm la fiecare integrală din membrul al doilea formula de cuadratură a lui Simpson. Vom avea

$$\begin{aligned}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x, y_0) dx &= \frac{h}{3} [f(x_0-h, y_0) + 4f(x_0, y_0) + f(x_0+h, y_0)] + R_1 \\ \int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x_0, y) dy &= \frac{k}{3} [f(x_0, y_0-k) + 4f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0+k)] + R_2\end{aligned} \quad (23)$$

unde după cum se știe [3], avem

$$R_1 = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \varphi(x) \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x, y_0) dx, \quad R_2 = \int_{y_0-k}^{y_0+k} \psi(y) \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x_0, y) dy \quad (24)$$

unde funcțiile $\varphi(x)$ și $\psi(y)$ au fost studiate de noi: ele sînt negative prima pe intervalul $(x_0 - h, x_0 + h)$, a doua pe intervalul $(y_0 - k, y_0 + k)$ și avem

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} \varphi(x) dx = -\frac{(2h)^5}{2880}, \quad \int_{y_0-k}^{y_0+k} \psi(y) dy = -\frac{(2k)^5}{2880} \quad (25)$$

Făcînd înlocuirea integralelor din membrul al doilea al formulei (19') cu membrii al doilea din formulele de cuadratură (23), obținem formula de cubatură.

$$\begin{aligned}\iint_D f dx dy &= \frac{2hk}{3} [f(x_0-h, y_0) + f(x_0, y_0-k) + f(x_0+h, y_0) + \\ &\quad + f(x_0, y_0+k) + 2f(x_0, y_0)] + R'\end{aligned} \quad (26)$$

unde restul R' este dat de formula

$$R' = \iint_D \Phi(x, y) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy + 2h \int_{y_0-k}^{y_0+k} \psi(y) \frac{\partial^4 f(x_0, y)}{\partial y^4} dy + \\ + 2k \int_{x_0-k}^{x_0+k} \psi(x) \frac{\partial^4 f(x, y_0)}{\partial x^4} dx \quad (27)$$

Restul se mai poate pune și sub forma

$$R' = \frac{h^3 k^3}{9} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(\xi, \eta) - \frac{hk^5}{45} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x_0, \eta_1) - \frac{h^5 k}{45} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_1, y_0) \quad (28)$$

dacă ținem seama de formulele (20), (25). În această formulă (ξ, η) , (ξ_1, η_1) sînt două puncte, anumite, din dreptunghiul D .

Notînd

$$M'_{40} = \sup_{(x_0-k, x_0+k)} \left| \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x, y_0) \right|, \quad M'_{04} = \sup_{(y_0-k, y_0+k)} \left| \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x_0, y) \right|$$

avem următoarea evaluare pentru $|R|$

$$|R'| \leq \frac{hk}{45} (5h^2 k^2 M_{22} + h^4 M'_{40} + k^4 M'_{04}) \quad (29)$$

Ținînd seamă că formula de cubatură (19') este exactă pentru orice funcție $f(x, y)$ de forma

$$f = A(x)y + B(y)x + A_1(x) + B_1(y) \quad (30)$$

unde funcțiile $A(x)$, $B(y)$, $A_1(x)$ și $B_1(y)$ sînt oarecari, formula de cubatură (26) este exactă tot pentru funcții de forma (30) în care $A(x)$, $A_1(x)$, $B(y)$, $B_1(y)$ sînt polinoame de gradul al treilea.

În alte lucrări care vor urma, vom face noi aplicații ale formulei de cubatură (19') și o nouă extindere a ei care de asemenea să conducă la formule practice de cubatură.

BIBLIOGRAFIE

1. Albrecht, J., Collatz, L. Zur numerischen Auswertung mehrdimensionaler Integrale. „ZAMM” **38**(1958) 1-15.
2. Ionescu, D. V. La représentation de la différence divisée d'une fonction de deux variables par une intégrale définie. „Mathematica”, **3**(26), (1961), 59-78.
3. Ionescu, D. V. Cuadraturi numerice. Editura tehnică. București, 1957.
4. Tyller, G. W. Numerical integration of fonctions of several variables. „Canadian J. Math.” **5**(1953), 393-412.
5. Willers, Fr. A. Methoden der praktischen Analysis. 1928, p. 110.

ОБ ОДНОЙ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ

(Р е з ю м е)

В этой работе выводится остаточный член кубатурной формулы (1). Устанавливаются сначала формулы (4) и (5) потом проблема на границе из §2 приводит к кубатурным формулам (17) и (26) с их остаточными членами.

SUR UNE FORMULE DE CUBATURE

(R é s u m é)

Dans ce travail on donne l'expression du reste de la formule de cubature (1). On établit d'abord les formules fondamentales (4) et (5). Ensuite, le problème aux limites du § 2 conduit aux formules de cubature (17) et (26) avec leurs restes.