

EIN WARTEZEITPROBLEM IN DER PROGRAMMIERUNG DER PRODUKTION

von

L. NÉMETI und F. RADÓ

in Cluj

1. Problemstellung. In vorliegender Arbeit befassen wir uns mit einem Problem, welches bei der Lancierung der Fertigung auftritt.

Betrachten wir einen Betrieb, in welchem für die Fertigung eines Erzeugnisses eine Folge von Maschinen verwendet wird, die in einer bestimmten Reihenfolge vom Produkt durchlaufen werden. Die Bearbeitung auf einer Maschine erfolgt kontinuierlich, mit konstanter Geschwindigkeit. Wir bezeichnen mit δ_i die gleichbleibende Zeitspanne vom Eintritt einer Einheit des Erzeugnisses in die i -te Maschine bis zu seiner Ankunft zur $i + 1$ -ten Maschine. Es seien $t_1, t_2, \dots, t_n$ die benötigten Bearbeitungszeiten des Fertigungsloses an den nacheinanderfolgenden Maschinen. Ein Beispiel für diese Fertigungsart ist das Kaltziehen von Drähten.

Die Fertigung des Loses kann man entweder in der Hypothese programmieren, dass seine Bearbeitung an den einzelnen Maschinen ohne Unterbrechung erfolgt, oder dass gewisse Unterbrechungen in bestimmten Zeitpunkten zugelassen werden. Im nächsten Abschnitt werden wir die erste Hypothese voraussetzen: dann besteht die Programmierung für die Fertigung des Loses einfach in der Angabe des Zeitpunktes, bei welchem der Beginn der Bearbeitung an jeder einzelnen Maschine erfolgen soll. Die Fertigungsdauer eines Loses ist die Zeitspanne zwischen dem Anfang der Bearbeitung an der ersten Maschine und dem Ende der Bearbeitung an der letzten Maschine.

Das Problem besteht in der Festlegung desjenigen Fabrikationsprogrammes, welches die kleinste Fertigungsdauer ergibt.

2. Fertigungsprogramm ohne Unterbrechungen. Der Bearbeitungsprozess auf der i -ten Maschine ist in Abb. 1 dargestellt. Die Abszisse bedeutet die Zeit, und die Ordinate stellt die Mengen des Zwischenproduktes dar (ausgedrückt in Einheiten des Fertigproduktes). Die Strecke AB stellt die in die i -te Maschine eingetretene Menge vom

Los dar und die Strecke CD die Menge, welche auf dieser Maschine bearbeitet wurde und bereits vor die $i+1$ -te Maschine gelangt ist. Bis zum Zeitpunkt $t = OP$ ist also von der i -ten Maschine die Menge $q = PM$ erfasst worden, hingegen vor die $i+1$ -te Maschine ist die Menge $q' = PN$ gelangt. Die Länge $OQ = q_0$ stellt die Losgrösse dar. Es gilt $t_i = AB' = CD'$, $\delta_i = AC = B'D'$.

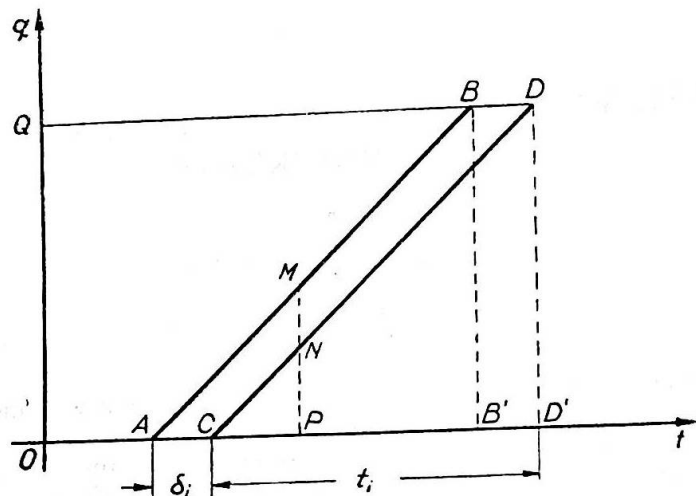


Abb. 1.

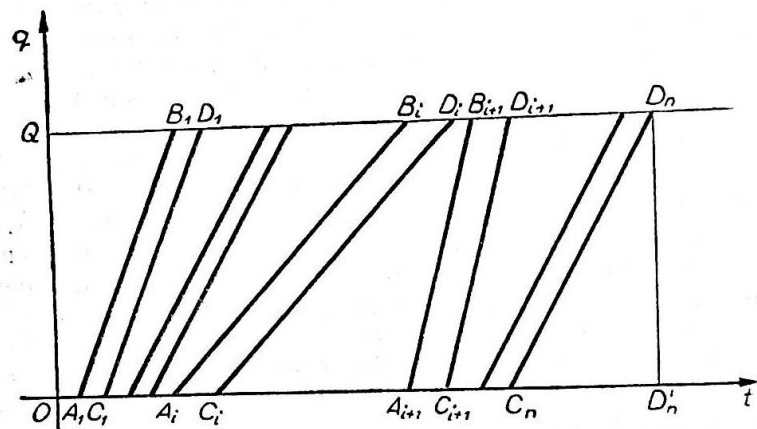


Abb. 2.

Ein Fertigungsprogramm ist in Abb. 2 dargestellt. Die parallelen Streckenpaare $A_i B_i$, $C_i D_i$ entsprechen den verschiedenen Bearbeitungsmaschinen ($i = 1, 2, \dots, n$). Aus der Eigenart des Fertigungsprozesses folgt sofort die geometrische Bedingung, dass die Strecke $A_{i+1} B_{i+1}$ zur Gänze rechts von der Strecke $C_i D_i$ liegen muss ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

Das gestellte Problem erfordert das Minimum der Länge $A_1 D_n'$ zu finden, unter Einhaltung obiger Bedingung.

Aus Abb. 2 ist ersichtlich, dass die Lösung dieses Problems unmittelbar aus der Lösung des speziellen Problems folgt, bei welchem $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = 0$ gesetzt wurde. Aus diesem Grunde werden wir in vorliegender Arbeit diesen Sachverhalt voraussetzen. Dann fallen die beiden Strecken $A_i B_i$ und $C_i D_i$ zusammen. (Abb. 3).

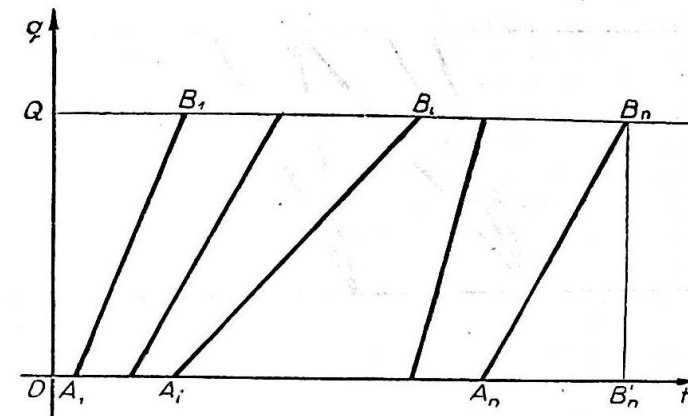


Abb. 3.

Ein Fertigungsprogramm, welches auf eine minimale Fertigungsdauer führt, nennen wir ein *Optimalprogramm* und seine graphische Darstellung eine *Optimalfigur*. Die graphische Darstellung irgend eines Programms, also die Folge von Strecken $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n$, wobei $A_{i+1} B_{i+1}$ immer rechts von $A_i B_i$ zu liegen kommt, ist eine *zulässige Figur*. Ein Teil $A_p B_p, A_{p+1} B_{p+1}, \dots, A_q B_q$ einer zulässigen Figur ist ein *zulässiger Figurenteil*.

Die Lösung des gestellten Problems ist schnell gefunden, wenn man beachtet, dass in einer Optimalfigur bei zwei aufeinander folgenden Strecken $A_i B_i$ und $A_{i+1} B_{i+1}$ entweder

$A_i = A_{i+1}$ ist, oder aber $B_i = B_{i+1}$ (wenn $t_i = t_{i+1}$, dann fallen beide Strecken zusammen).

Betrachten wir die so erhaltene Optimalfigur (Abb. 4), so sehen wir, dass, wenn $t_{i-1} \leq t_i \leq t_{i+1}$ oder $t_{i-1} \geq t_i \geq t_{i+1}$, dann beeinflusst die Anwesenheit der i -ten Maschine die Fertigungsdauer überhaupt nicht. Wir können infolgedessen von Anfang an die Monotonieabschnitte der Folge

$$(1) \quad t_1, t_2, \dots, t_n$$

feststellen, können die Unterfolge aus den Endpunkten der Monotonieabschnitte

$$(2) \quad t_{n_1}, t_{n_2}, \dots, t_{n_k}$$

bilden, und nur diejenigen Maschinen in Betracht ziehen, die dieser Unterfolge entsprechen. Die dazugehörigen Strecken in der Optimalfigur schließen sich gegenseitig abwechselnd auf den Geraden $q = 0$ und $q = q_0$ an.

Ist $t_{n_1} < t_{n_2}$, so kann man t_{n_1} und die dazugehörige Strecke ebenfalls weglassen, ist $t_{n_k} < t_{n_{k-1}}$, lässt man t_{n_k} weg. Man kann also voraussetzen, dass in der Folge (2): $t_{n_1} > t_{n_2}$, $t_{n_k} > t_{n_{k-1}}$ und k ungerade ist.

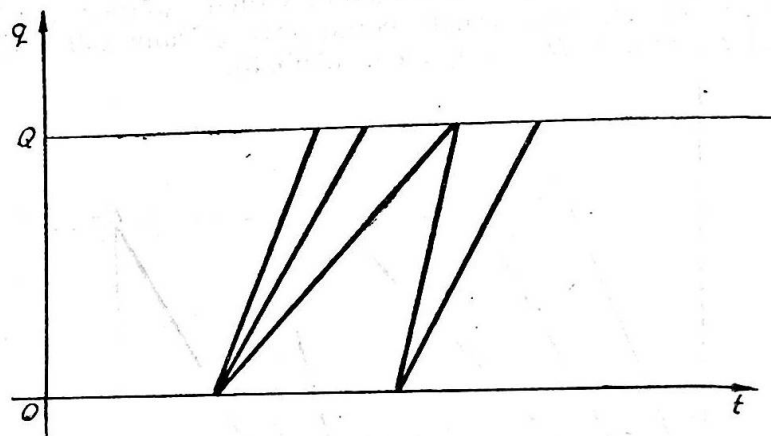


Abb. 4.

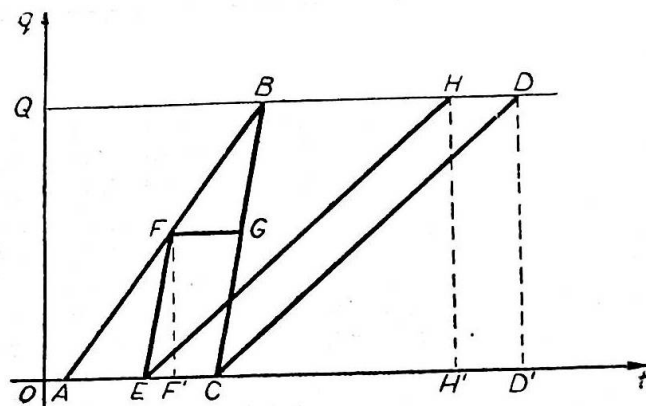


Abb. 5.

Die kürzeste Fertigungsdauer ist:

$$(3) \quad T_{\min} = t_{n_1} - t_{n_2} + t_{n_3} - \dots + t_{n_k}.$$

3. **Fertigungsprogramm mit einer Unterbrechung.** Lässt man im Laufe der Fertigung des Loses an einigen Maschinen Unterbrechungen in der Bearbeitung zu, so lässt sich die Fertigungsdauer verkürzen. Um diesen Sachverhalt einzusehen, betrachten wir das in Abb. 5 dargestellte Beispiel. Die Geradenstücke AB, CB, CD bilden die Optimalfigur für das Programmierungsproblem ohne Unterbrechungen; wir ersetzen die Strecke CB durch den Linienzug $EFGB$; dieser stellt einen Bearbeitungsprozess an der zweiten Maschine dar, der eine Unterbrechung im Zeitpunkt F' und von der Dauer FG aufweist. Wir erhalten damit die zulässige Figur $AB, EFGB, EH$ für welche die Fertigungsdauer $AH' < AD'$ ist.

Des weiteren können wir bei einer grossen Anzahl von Unterbrechungen der Bearbeitung an verschiedenen Maschinen erreichen, dass die Wartezeiten des Zwischenproduktes vor den einzelnen Maschinen sich verringern und hierdurch die Fertigungsdauer beliebig nahe zu $\max t_i$ kommt. Damit wird derjenige Fall angenähert, bei welchem alle Maschinen dieselbe Bearbeitungszeit aufweisen $t_1 = t_2 = \dots = t_n$.*

Andererseits bedeuten häufige Unterbrechungen einen wirtschaftlichen Nachteil; wollen wir die betreffende Maschine während der Bearbeitungsunterbrechung für andere Aufträge verwenden, so verursacht die Aufnahme der neuen Arbeit verschiedene Zeitverluste (Neueinstellungen an der Maschine, Förderleistungen, usw.), und wenn die Dauer der Unterbrechungen kurz wird, so kann die betreffende Maschine überhaupt nicht für andere Arbeiten herangezogen werden. Man kann deshalb nur eine beschränkte Anzahl von Bearbeitungsunterbrechungen zulassen. Im Hinblick auf obige Überlegungen stellen wir folgendes Problem:

Es soll das Fertigungsprogramm eines gegebenen Loses so bestimmt werden, dass es die kürzeste Fertigungsdauer ergibt, wobei für jede Bearbeitungsmaschine höchstens eine Unterbrechung gestattet ist. Gegeben sind die Zeiten $t_1, t_2, \dots, t_n$ welche zur unterbrechungslosen Bearbeitung des Loses an den aufeinanderfolgenden Maschinen benötigt werden.

Um die Lösung dieses Problems angeben zu können, benötigen wir einige neue Begriffe, die wir nachfolgend definieren wollen. Hiernach werden wir das Ergebnis aussprechen.

Der Beweis befindet sich in den Abschnitten 4, 5 und 6.

Eine *zulässige Figur* (die geometrische Darstellung eines Fertigungsprogramms) besteht aus einer Folge von Linienzügen $A_1B_1C_1D_1, \dots, A_nB_nC_nD_n$, die *Elemente* der zulässigen Figur genannt werden. Jedes Element befindet sich rechts vom vorangehenden Element (Abb. 6).

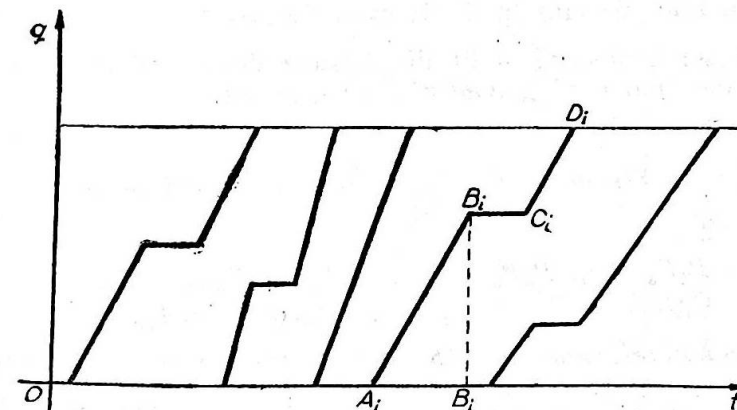


Abb. 6.

*) Zum selben Ergebnis, d.h. zur Verringerung der Fertigungszeit, gelangt man durch Regelung der Bearbeitungsgeschwindigkeit, indem man die einzelnen Bearbeitungszeiten derart vergrößert, dass alle Maschinen dieselbe Bearbeitungszeit $\max t_i$ aufweisen. Dieses Vorgehen bedeutet aber in vielen Fällen, genau wie die häufigen Unterbrechungen, einen wirtschaftlichen Nachteil.

Die Geraden $B_i C_i$ sind die *Unterbrechungsgeraden*. Das Fertigungsprogramm gilt als angegeben, wenn für jede Bearbeitungsmaschine 3 Parameter gegeben sind: der Zeitpunkt des Bearbeitungsbeginns ($O A_i$), die bearbeitete Erzeugnismenge bis zur Unterbrechung ($x_i = B_i' B_i$), und die Dauer der Unterbrechung ($B_i C_i$).

Die Begriffe Optimalprogramm, Optimalfigur und zulässiger Figurenteil sind wie im Abschnitt 2 definiert.

Genau wie im Abschnitt 2 leiten wir aus Folge (1) die Unterfolge (2) ab, welche die Eigenschaft besitzt:

$$t_{n_1} > t_{n_2}, t_{n_2} < t_{n_3}, t_{n_3} > t_{n_4}, \dots, t_{n_{k-1}} < t_{n_k} \\ (1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k \leq n),$$

und setzen $\frac{k-1}{2} = m$.

Wir bezeichnen weiter

$$(4) \quad \begin{cases} a_i = t_{n_{2i-1}} - t_{n_{2i}} \\ b_i = t_{n_{2i+1}} - t_{n_{2i}} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Wir nennen das *reduzierte Problem* dasjenige Programmierungsproblem, bei welchem die Rolle der gegebenen Folge (1) die Unterfolge (2) übernommen hat; genau wie im Abschnitt 1 hat das reduzierte Problem im wesentlichen dieselben Lösungen wie das gegebene Problem. Demgemäss werden wir die Doppelindices unterdrücken, und wir schreiben an Stelle von $t_{n_i}, A_{n_i}, B_{n_i}, C_{n_i}, D_{n_i}$ einfacher t_i, A_i, B_i, C_i, D_i ($i = 1, 2, \dots, 2m+1$).

Wir konstruieren den Linienzug $P_1, Q_1, P_3, Q_3, \dots, P_{2m+1}, Q_{2m+1}$, wobei die Punkte P_i auf der Abszissenachse, die Punkte Q_i auf der Geraden $q = q_0$ liegen und die einzelnen Strecken die Anstiege $m_i = \frac{q_0}{t_i}$ besitzen (Abb. 7). Dieser Linienzug stellt die Lösung des Problems ohne Unterbrechungen dar und wird *Grundlinienzug* genannt.

Für die Steigungen m_i gilt

$$m_1 < m_2, m_2 > m_3, m_3 < m_4, \dots, m_{2m} > m_{2m+1}.$$

Desgleichen gilt

$$P_1 P_3 = a_1, P_3 P_5 = a_2, \dots, P_{2m-1} P_{2m+1} = a_m, \\ Q_1 Q_3 = b_1, Q_3 Q_5 = b_2, \dots, Q_{2m-1} Q_{2m+1} = b_m.$$

Wir nennen *Figurengrundteil* $(2p+1, 2q+1)$ einen zulässigen Figurenteil $A_{2p+1} B_{2p+1} C_{2p+1} D_{2p+1}, A_{2p+2} B_{2p+2} C_{2p+2} D_{2p+2}, \dots, A_{2q+1} B_{2q+1} C_{2q+1} D_{2q+1}$ mit folgenden Eigenschaften (Abb. 8):

$$(5) \quad \begin{cases} a) p < q \\ b) B_{2p+1} \equiv C_{2p+1}, B_{2q+1} \equiv C_{2q+1} \\ c) A_{2h} = A_{2h+1}, B_{2h} = B_{2h-1} \\ \quad C_{2h} = C_{2h+1}, D_{2h} = D_{2h-1} \end{cases} \quad h = p+1, p+2, \dots, q.$$

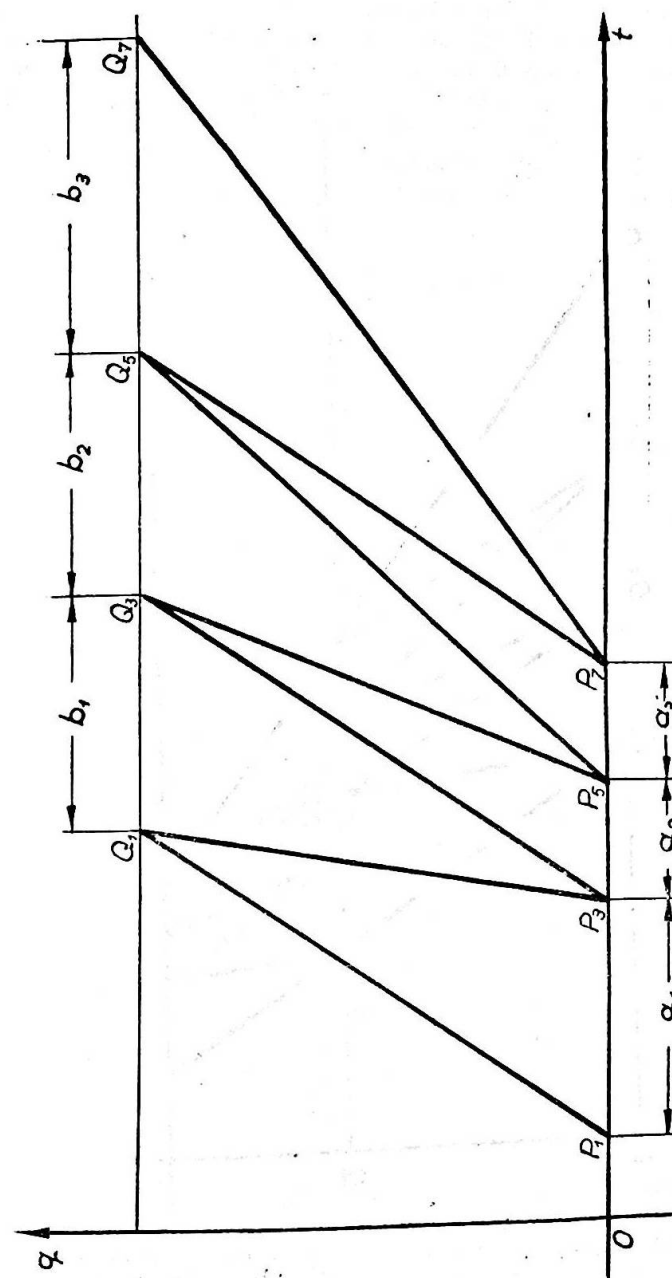


Abb. 7

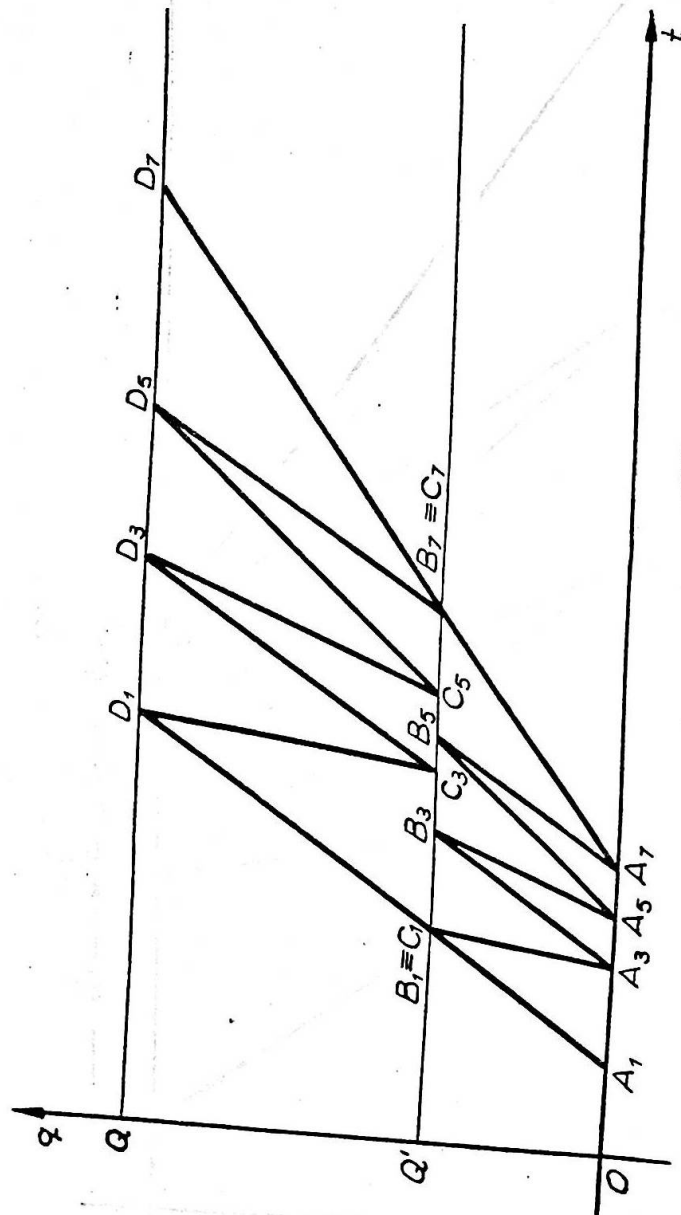


Abb. 8

Bei einem Figurengrundteil gibt es also keine Unterbrechung bei der ersten und bei der letzten Bearbeitung und die übrigen Unterbrechungslinien fallen zusammen. Den entsprechenden Fertigungsprozess kann man auffassen als in zwei Teile zerlegt, welche die Losmenge OQ' , bzw. $Q'Q$ herstellen, und jeder Teilprozess verläuft nach einem Optimalprogramm ohne Unterbrechung. Gleichzeitig ist die Bedingung erfüllt, dass der Punkt B_{2h+1} nicht rechts vom Punkte C_{2h+1} liegt ($h = p+2, \dots, q-1$).

Es gibt höchstens einen Figurengrundteil ($2p+1, 2q+1$). In der Tat, mit $x = OQ'$, erhalten wir aus den ähnlichen Dreiecken der Abb. 7 und 8

$$(6) \quad \frac{C_{2h+1} C_{2h+3}}{q_0 - x} = \frac{a_{h+1}}{q_0}, \quad \frac{B_{2h+1} B_{2h+3}}{x} = \frac{b_{h+1}}{q_0}, \quad h = p, p+1, \dots, q-1$$

hieraus

$$C_{2p+1} C_{2q+1} = \left(1 - \frac{x}{q_0}\right) \sum_{h=p+1}^q a_h, \quad B_{2p+1} B_{2q+1} = \frac{x}{q_0} \sum_{h=p+1}^q b_h.$$

Es ist aber

$$C_{2p+1} C_{2q+1} = B_{2p+1} B_{2q+1}, \text{ in folgedessen gilt}$$

$$(7) \quad x = q_0 \frac{\sum_{h=p+1}^q a_h}{\sum_{h=p+1}^q (a_h + b_h)}.$$

Die Lage der Unterbrechungsgeraden und damit der ganze Figurengrundteil ist also eindeutig bestimmt.

Aus den ähnlichen Dreiecken in den Abb. 7 und 8 entnehmen wir weiter

$$\frac{D_{2h+1} D_{2h+3}}{q_0 - x} = \frac{b_{h+1}}{q_0}, \quad h = p, p+1, \dots, q-1$$

woraus, unter Berücksichtigung der Formel (7):

$$(8) \quad D_{2p+1} D_{2q+1} = \left(1 - \frac{x}{q_0}\right) \sum_{h=p+1}^q b_h = \frac{\left(\sum_{h=p+1}^q b_h\right)^2}{\sum_{h=p+1}^q (a_h + b_h)}.$$

In Abb. 9 ist ein Figurengrundteil dargestellt zusammen mit dem Linienzug $A_1 D_1 P_3 Q_3 P_5 Q_5 P_7 Q_7$, welcher kongruent ist mit dem entsprechenden Teil des Grundlinienzuges. Man bemerkt, dass der Linienzug $A_1 D_1 P_3 Q_3 P_5 Q_5 P_7 Q_7$ homothetisch mit den Linienzügen $B_1 D_1 B_3 D_3 B_5 D_5 B_7 D_7$ und $A_1 B_1 A_3 B_3 A_5 B_5 A_7 B_7$ ist, die jeweiligen Homothetiemittelpunkte sind D_1 , bzw. A_1 . Infolgedessen liegen die Punkte D_1, B_7, P_7 bzw. A_1, B_7, Q_7 .

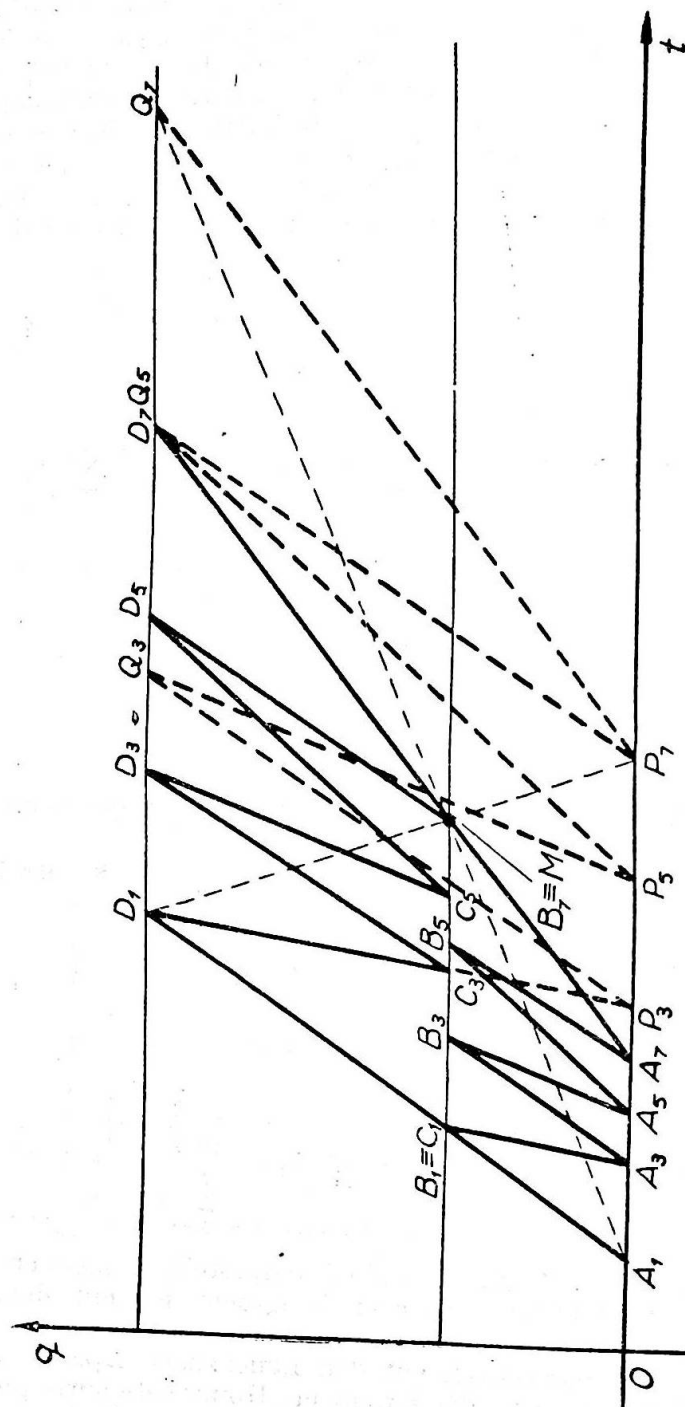


Abb. 9

auf je einer Geraden. Hieraus ergibt sich folgende graphische Konstruktion für den Figurengrundteil $(2p+1, 2q+1)$: man zeichnet den Figurenteil $P_{2p+1}Q_{2p+1}, P_{2p+3}Q_{2p+3}, \dots, P_{2q+1}Q_{2q+1}$ aus dem Grundliniengzug und bringt die Diagonalen des Trapezes $P_{2p+1}Q_{2q+1}Q_{2q+1}P_{2q+1}$ im Punkte M zum Schnitt; die Unterbrechungsgerade des Grundteiles geht durch diesen Punkt M und hiermit ist ihre Lage, und somit auch der Figurengrundteil eindeutig bestimmt.

Man ersieht, dass das letzte Element des Figurengrundteils durch den Punkt M geht.

Wenn wir diese Konstruktion bei beliebigen p und q ($p < q$) anwenden wollen, so ist die Erfüllung der Bedingung, dass die Punkte B_{2h+1} links zu den Punkten C_{2h+1} fallen sollen, nicht gesichert. Die Bedingungen, dass

$$B_{2p+1}B_{2h+1} \leq C_{2p+1}C_{2h+1}, \quad h = p+1, \dots, q-1$$

sind notwendig und hinreichend für die Existenz des Figurengrundteils $(2p+1, 2q+1)$. Unter Berücksichtigung der Formeln (6) erhalten wir für obige Bedingungen

$$q_0 \sum_{h=p+1}^i b_h \leq \left(1 - \frac{x}{q_0}\right) \sum_{h=p+1}^i a_h, \quad i = p+1, \dots, q-1,$$

oder, indem wir den Wert von x aus (7) einsetzen, erhalten wir die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Figurengrundteils $(2p+1, 2q+1)$ in folgender Form:

$$(9) \quad \frac{\sum_{h=p+1}^i a_h}{\sum_{h=p+1}^i b_h} \geq \frac{\sum_{h=p+1}^q a_h}{\sum_{h=p+1}^q b_h}, \quad i = p+1, \dots, q-1.$$

Ist $q = p+1$, so haben wir gar keine Bedingung, der Figurengrundteil existiert also in diesem Falle immer.

Wir bilden nun die Folge

$$(10) \quad \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}, \dots, \frac{a_1+a_2+\dots+a_m}{b_1+b_2+\dots+b_m},$$

es sei

$$(11) \quad \frac{a_1+a_2+\dots+a_{r_1}}{b_1+b_2+\dots+b_{r_1}}$$

dasjenige Glied der Folge (10), welches den kleinsten Wert besitzt; gibt es mehrere Glieder, welche diesen Minimalwert aufweisen, so nehmen wir für r_1 den grössten Index unter ihnen. Nehmen wir nun an, dass die

Indices $r_1, r_2, \dots, r_j$ bereits gewählt seien; dann bestimmt man denjenigen grössten Index v , für welchen der Bruch

$$(12) \quad \frac{a_{r_j+1} + a_{r_j+2} + \dots + a_v}{b_{r_j+1} + b_{r_j+2} + \dots + b_v}, \quad v = r_j + 1, \dots, m$$

den kleinsten Wert annimmt und setzt $r_{j+1} = v$.
Die Folge

$$(13) \quad r_0 = 0, r_1, r_2, \dots, r_s = m$$

nennen wir die Folge der Grundindices.

Die Bestimmung der Folge (13) kann auch auf graphischem Wege erfolgen, indem man die Vektoren $\overrightarrow{OM_1} = (b_1, a_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (b_2, a_2)$, $\dots$, $\overrightarrow{M_{m-1}M_m} = (b_m, a_m)$ in der Ebene darstellt (Abb. 10).

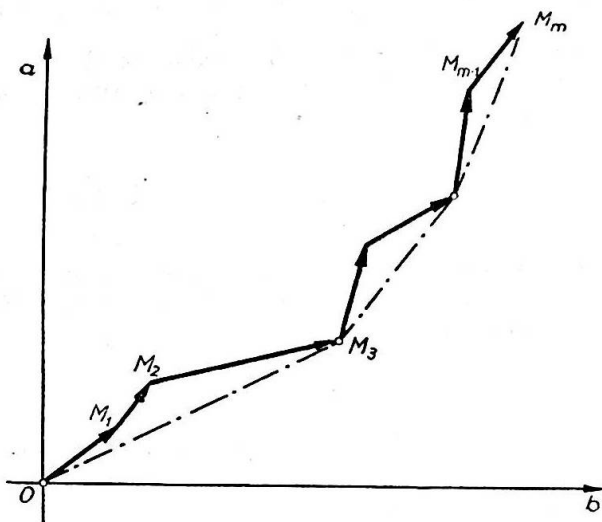


Abb. 10

Dann ist

$$\overrightarrow{OM_i} = (b_1 + b_2 + \dots + b_i, a_1 + a_2 + \dots + a_i),$$

und die Bedingung, dass der Quotient (11) den kleinsten Wert in der Folge (10) aufweist, bedeutet, dass kein Vektor $\overrightarrow{OM_i}$ sich unterhalb der Geraden OM_{r_1} befindet. Analog, kein Vektor $\overrightarrow{M_{r_j}M_i}$ ($i > r_j$) befindet sich unterhalb der Geraden $M_{r_j}M_{r_{j+1}}$.

Der Quotient drückt den Anstieg des Vektors $\overrightarrow{M_{r_j}M_{r_{j+1}}}$ aus, diese Anstiege nehmen also zu. Hieraus folgt, dass der Linienzug $OM_{r_1}M_{r_2}\dots M_{r_s}$ einen Teil aus der Grenzlinie der konvexen Hülle der Punktmenge $O \cup \{M_i\}$

bildet, $i = 1, 2, \dots, m$. Infolgedessen bestimmen diejenigen Ecken der konvexen Hülle des Linienzuges $OM_1M_2\dots M_m$, welche auf der Unterseite dieser Hülle liegen, die Folge des Grundindices.

Wir behaupten weiter, dass die Figurengrundteile $(2r_j + 1, 2r_{j+1} + 1)$, $j = 0, 1, 2, \dots, s - 1$ aufgebaut auf die Grundindices, existieren. In der Tat ergibt es sich aus der Konstruktion der Folge (13), dass die Existenzbedingungen (9) für den Figurengrundteil $(2r_j + 1, 2r_{j+1} + 1)$ erfüllt sind.

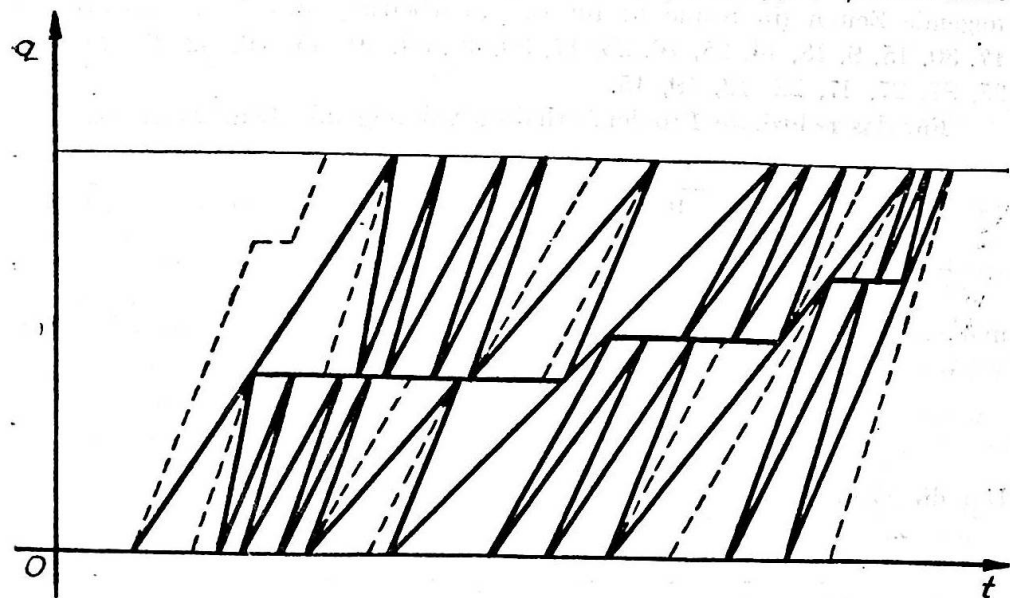


Abb. 11

Mit Hilfe der Begriffe für Figurengrundteil und Grundindices können wir jetzt die Lösung des gestellten Problems wie folgt formulieren:

SATZ. Das reduzierte Problem hat eine einzige Lösung, die man erhält, indem diejenigen Figurengrundteile $(2r_j + 1, 2r_{j+1} + 1)$ aneinandergereiht werden, welche den Paaren aufeinanderfolgender Grundindices entsprechen ($j = 0, 1, \dots, s - 1$). Die Ordonaten der Unterbrechungsgeraden dieser Figurengrundteile bilden eine zunehmende Folge (Abb. 11).

Die minimale Fertigungsdauer $T_{\min}$ berechnet sich mit Hilfe der Formel (4) zu

$$(14) \quad T_{\min} = t_1 + \sum_{j=0}^{s-1} \frac{\left(\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} b_h \right)^2}{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} (a_h + b_h)}.$$

Die Ergänzung der Optimalfigur des reduzierten Problems zu derjenigen des ursprünglich gegebenen Problems erfolgt durch Einfügung der Bearbeitungselemente, welche beim reduzierten Problem weggelassen

wurden (die Einfügung ist in Abb. 11 durch gestrichelte Linienzüge angedeutet), was immer möglich ist, und zwar in eindeutiger Weise mit Ausnahme der am Anfang und am Ende weggelassenen Elemente. Das gestellte Problem hat also, abgesehen von einigen unwesentlichen möglichen Änderungen, eine einzige Lösung.

Beispiel. Das Erzeugnis gehe nacheinander durch 28 Maschinen, die folgende Zeiten (in Stunden) für die Bearbeitung des Loses benötigen: 17, 30, 15, 9, 18, 14, 25, 16, 23, 17, 30, 40, 34, 20, 45, 26, 32, 21, 30, 18, 25, 37, 27, 17, 22, 12, 19, 15.

Für das reduzierte Problem erhalten wir folgende Bearbeitungszeiten:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
t_i	30	9	18	14	25	16	23	17	40	20	45	26	32	21	30	18	37	17	22	
i	20	21																		
t_i	12	19																		

und die Werte für $a_1, \dots, a_{10}, b_1, \dots, b_{10}$ erhält man laut Formel (4) zu

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_h	21	4	9	6	20	19	11	12	20	10
b_h	9	11	7	23	25	6	9	19	5	7

Um die Grundindices zu berechnen, stellen wir Folge (10) her:

$\frac{21}{9}$	$\frac{25}{20}$	$\frac{34}{27}$	$\frac{40}{50}$	$\frac{60}{75}$	$\frac{79}{81}$	$\frac{90}{90}$	$\frac{102}{109}$	$\frac{122}{114}$	$\frac{132}{121}$
----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-------------------	-------------------	-------------------

Die kleinsten Brüche der Folge sind $\frac{40}{50} = \frac{60}{75}$, wir erhalten somit

$$r_1 = 5;$$

wir bilden die nächste Folge (12) mit $r_j = 5$:

$\frac{19}{6}$	$\frac{30}{15}$	$\frac{42}{34}$	$\frac{62}{39}$	$\frac{72}{46}$
----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Hier ist der kleinste Quotient $\frac{42}{34}$, es ist also

$$r_2 = 8;$$

die nächste Folge (12) mit $r_j = 8$ ist

$\frac{20}{5}$	$\frac{30}{12}$
----------------	-----------------

unter welchen $\frac{30}{12}$ der kleinste ist, mithin

$$r_3 = 10.$$

Die Optimalfigur besteht also aus 3 Grundteilen. Die Höhen der Unterbrechungsgeraden ergeben sich aus Formel (7) zu:

$$x_1 = \frac{21 + 4 + 9 + 6 + 20}{(21 + 4 + 9 + 6 + 20) + (9 + 11 + 7 + 23 + 25)} q_0 = \frac{60}{135} q_0 = \frac{4}{9} q_0$$

$$x_2 = \frac{19 + 11 + 12}{(19 + 11 + 12) + (6 + 9 + 10)} q_0 = \frac{42}{76} q_0 = \frac{21}{38} q_0$$

$$x_3 = \frac{20 + 10}{(20 + 10) + (5 + 7)} q_0 = \frac{30}{42} q_0 = \frac{5}{7} q_0.$$

Mithin wird man im Fertigungsprogramm für das reduzierte Problem das Los anfangs in die Teilmengen $\frac{4}{9} q_0$ und $\frac{5}{9} q_0$ zerlegen, welche sukzessiv durch die ersten $2r_1 + 1 = 11$ Maschinen bearbeitet werden; bei der zweiten bis elften Maschine wird die Bearbeitung des zweiten Teillooses nicht unmittelbar nach Beendigung der Bearbeitung des ersten Teillooses angefangen, hingegen erfolgt eine solche Unterbrechung nicht bei der ersten und bei der zwölften Maschine. Angefangen bei der 12. Maschine zerlegt sich das Los in die Teilloose $\frac{21}{38} q_0$ und $\frac{17}{38} q_0$, welche nacheinander die Maschinen 12. bis $2r_2 + 1 = 17$. passieren, wonach das Los in die Teile $\frac{5}{7} q_0$ und $\frac{2}{7} q_0$ zerlegt wird, bis zum Ende der Bearbeitung.

Die Einfügung der Maschinen, die im reduzierten Problem nicht auftreten, wurde in Abb. 11 vorgenommen, welche das Optimalprogramm dieses Beispiels darstellt.

Formel (14) liefert uns die minimale Fertigungsdauer.

$$T_{\min} = 30 + \frac{78^2}{135} + \frac{34^2}{76} + \frac{12^2}{42} = 90 \frac{122}{399} = 90^h 18^{\min}.$$

Würde man die Bearbeitung ohne Unterbrechungen vornehmen, so wäre die kürzeste Fertigungsdauer

$$T_{\min} = 30 + 9 + 11 + 7 + 23 + 25 + 6 + 9 + 19 + 5 + 7 = 151^h.$$

4. Reduktion der Menge der zulässigen Figuren. In diesem Abschnitt fangen wir mit dem Beweis des im vorigen Abschnitt ausgesprochenen Satzes an.

Betrachten wir zwei benachbarte Elemente $ABCD$ und $A'B'C'D'$ einer zulässigen Figur, wobei wir zuerst voraussetzen, dass die Unterbrechungsgeraden BC und $B'C'$ nicht dieselbe Höhe besitzen. Wir unterscheiden drei Fälle:

a) die Linienzüge $ABCD$ und $A'B'C'D'$ besitzen keinen gemeinsamen Punkt; wir sagen dann: die beiden Elemente besitzen keinen Kontakt;

b) die Linienzüge $ABCD$ und $A'B'C'D'$ besitzen einen gemeinsamen Punkt; in diesem Falle sagen wir, dass sie einen Kontakt haben;

c) die Linienzüge $ABCD$ und $A'B'C'D'$ haben zwei gemeinsame Punkte, dann haben sie also 2 Kontakte: einen unteren Kontakt und einen oberen Kontakt (Abb. 12)

Wenn die Unterbreckungsstrecken BC und $B'C'$ sich (teilweise) decken, dann werden wir bei der Bestimmung der Anzahl der Kontakte nur die

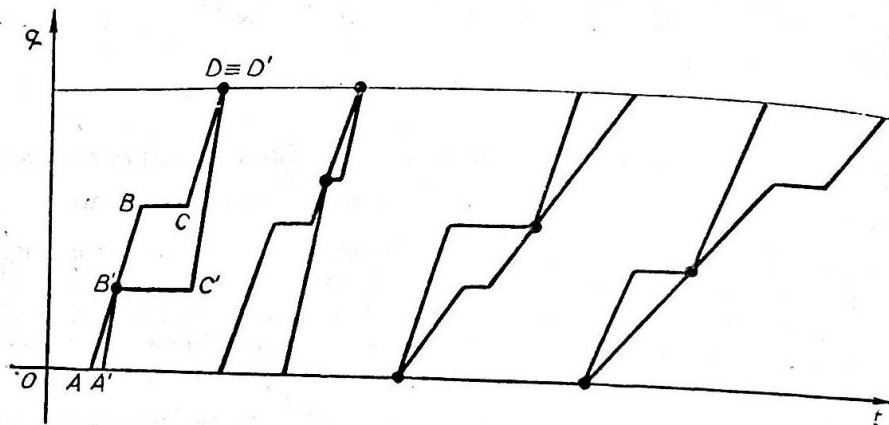


Abb. 12

gemeinsamen Punkte der Punktmengen $AB \cup CD$ und $A'B' \cup C'D'$ betrachten, d.h. von beiden Elementen werden die inneren Punkte der Unterbreckungsstrecken abgezogen. Auf diese Weise können zwei benachbarte Elemente — beim reduzierten Problem — höchstens zwei Kontakte aufweisen.

Wenn es bei einer zulässigen Figur zwei benachbarte Elemente gibt, die ohne Kontakt sind, dann kann man eine andere zulässige Figur angeben, welcher eine kürzere Fertigungsdauer entspricht. Die betrachtete zulässige Figur zerfällt nämlich in diesem Fall in zwei Figurenteile, welche durch Parallelverschiebung aneinander genähert werden können. Infolgedessen kann man, zur Bestimmung der Optimalfiguren, die Menge der zulässigen Figuren auf diejenigen Figuren einschränken, bei welchen alle aufeinander folgenden Elemente wenigstens einen Kontakt aufweisen.

Wir können eine weitere Einschränkung der Menge zulässiger Figuren vornehmen, indem wir nur diejenigen Figuren behalten, bei welchen jedes Paar benachbarter Elemente genau zwei Kontakte besitzt. In der Tat setzen wir zuerst voraus, dass wir eine zulässige Figur vor uns haben, bei welcher es ein Paar Nachbarelemente gibt, denen der obere Kontakt fehlt. Wenn in diesem Paar das rechts gelegene Element sich nicht auf eine einzige Strecke reduziert, dann kann man an seinem oberen Geradenstück eine Parallelverschiebung nach links vornehmen (Abb. 13). In diesem Falle unterbricht sich aber der obere Kontakt beim nächstfolgenden Elementenpaar, wenn es einen solchen Kontakt gab (in Abb. 13 wurde der mögliche obere Kontakt am nächsten Elementenpaar mit einem verdickten Punkt angedeutet). Dieser Vorgang kann dann wiederholt und weiter fortgesetzt werden, bis man schliesslich entweder ans rechte Ende der zulässigen

Figur gelangt, oder an ein Element, welches aus einer einzigen Strecke besteht. Im ersten Fall haben wir offenbar eine zulässige Figur erhalten, der eine kürzere Fertigungsdauer entspricht. Im zweiten Fall haben wir ein Paar Nachbarelemente $ABCD$, AE , wie sie Abb. 14 zeigt. Das Element $ABCD$ ist nicht das erste Element der zulässigen Figur, weil, gemäss der

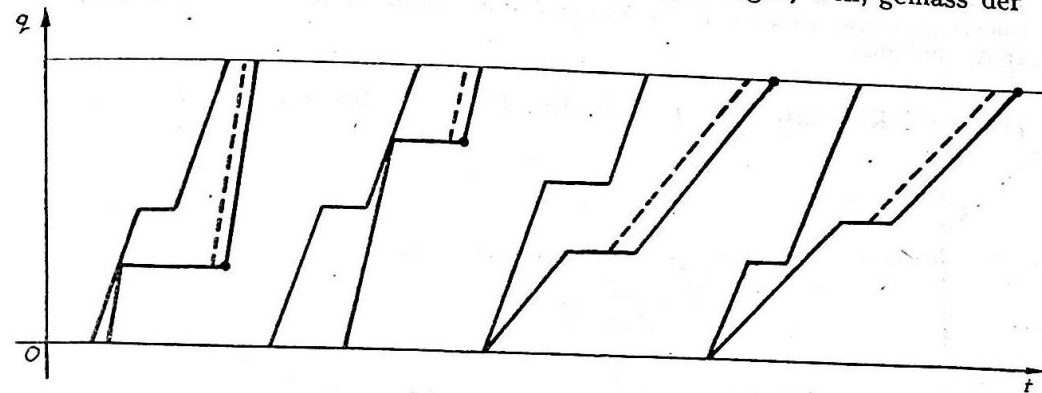


Abb. 13

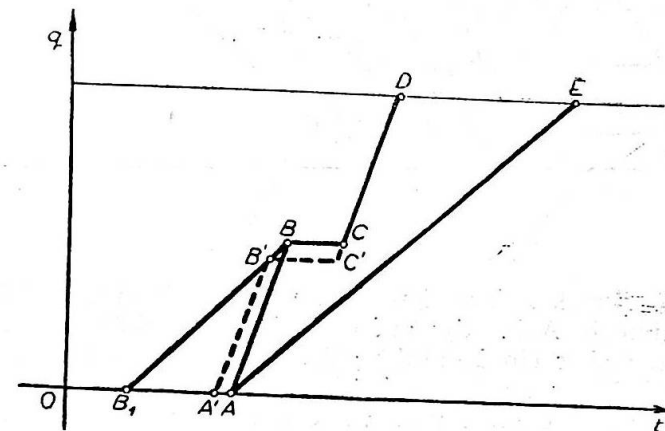


Abb. 14

Eigenschaften der Folge (2) das erste Element einen kleineren Anstieg besitzt als das zweite Element ($t_1 > t_2$). Es sei nun BB_1 parallel zur Richtung des linken Nachbarelementes von $ABCD$; dieses Element kann keine Punkte innerhalb des Dreiecks B_1BA besitzen. Mithin können wir das Element $ABCD$ durch $A'B'C'D'$ ersetzen (indem wir die Unterbreckungsgerade etwas senken); die hierbei entstandene zulässige Figur enthält das Elementenpaar $A'B'C'D'$ und AE ohne Kontakt, somit kann man ihr eine andere zulässige Figur zuordnen, welche eine kürzere Bearbeitungsdauer besitzt.

Betrachten wir nun eine zulässige Figur mit einem Elementenpaar, wo der untere Kontakt fehlt. Indem man die Figur in ihrer Ebene um

180° dreht, kommt man auf den vorhin untersuchten Fall zurück. In allen Fällen also, wo Elementenpaare mit nur einem Kontakt vorkommen, können wir zulässige Figuren angeben, denen eine kürzere Fertigungsdauer entspricht. Noch mehr, durch wiederholte Anwendung des oben beschriebenen Vorganges können wir eine kürzere Fertigungsdauer aufweisende zulässige Figur angeben, bei welcher alle Elementenpaare je zwei Kontakte haben.

Nehmen wir jetzt eine zulässige Figur, welche bei jedem Elementenpaar zwei Kontakte besitzt (Abb. 15). Ist ihr erstes oder letztes Element

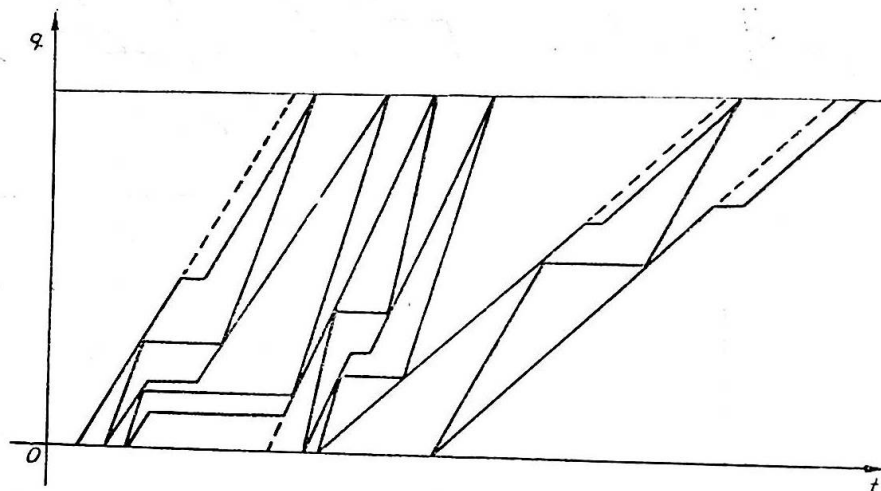


Abb. 15

keine einfache Strecke, dann kann man es durch eine solche ersetzen (punktierte Linie in Abb. 15); auf diese Weise verkürzt sich die Fertigungsdauer, oder aber ein Kontakt geht verloren; wir können dann eine andere zulässige Figur angeben, mit kleinerer Fertigungsdauer, bei welcher es überall 2 Kontakte gibt, und wo das erste und das letzte Element einfache Strecken sind.

Des weiteren, wenn wir ein Elementenpaar vor uns haben, bei welchem die Unterbrechungsgerade des rechts gelegenen Elementes über derjenigen des linksseitigen Elementes liegt, dann kann man das Element mit dem kleineren Anstieg ebenfalls durch eine einzige Strecke ersetzen (dieses Vorgehen wurde in Abb. 15 gleichfalls durch punktierte Linien gezeigt). Hierdurch geht aber wiederum ein Kontakt verloren und man kann dann eine neue zulässige Figur angeben, mit kleinerer Fertigungsdauer, welche sich also in Figurenteile zerlegt, die folgende Eigenschaften aufweisen. (Abb. 16)

- Alle Elementenpaare besitzen zwei Kontakte;
- Das erste und das letzte Element des zulässigen Figurenteils sind

einfache Strecken und zeigen einen kleineren Anstieg als das Nachbarelement;

c) Die Höhen der Unterbrechungsgeraden bilden eine nichtzunehmende Folge.

5. Ein lineares Programmierungsproblem. Im vorhergehenden Abschnitt haben wir die Menge der zulässigen Figuren auf solche Figuren

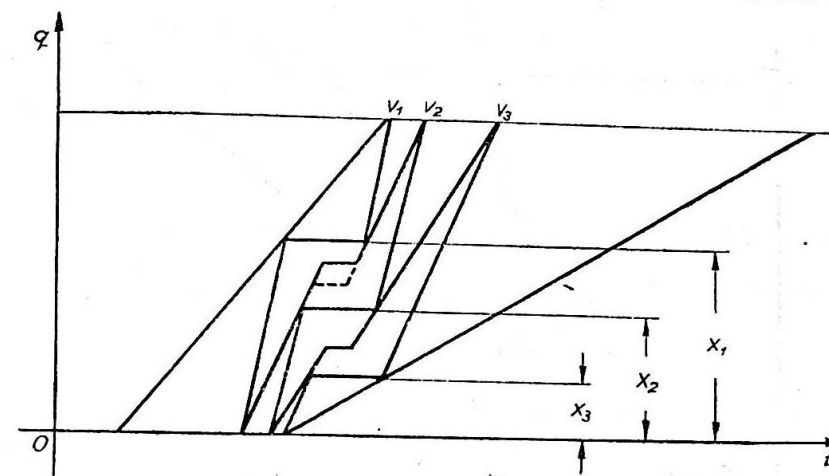


Abb. 16

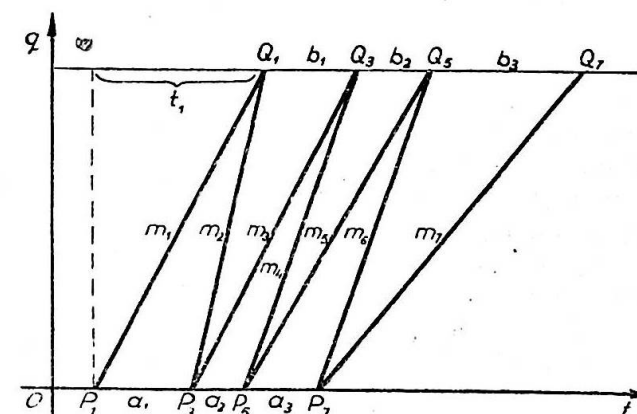


Abb. 17

beschränkt, welche aus Figurenteilen bestehen, die die Eigenschaften a), b), c) besitzen und in Abb. 16 dargestellt wurden. Wir werden jetzt einen solchen Figurenteil getrennt untersuchen um zu sehen, wie man die ihr zukommende Bearbeitungsdauer verringern kann. Hierdurch wird man auf folgendes Problem geführt.

Es seien gegeben $m_1, m_2, \dots, m_{p+1}$, die Anstiege einer Folge von Elementen d.i. ein Teil eines Grundlinienzuges (Abb. 17), gesucht ist unter allen Figurenteilen gemäss Abb. 16 — mit den vorgegebenen Anstiegen — derjenige, welchem die kleinste Fertigungsdauer zukommt.

Ein Figurenteil gemäss Abb. 16 mit vorgegebenen Anstiegen, ist offenbar eindeutig bestimmt durch die Höhen der Unterbrechungsgeraden. Man bemerkt, dass die Unterbrechungsgeraden der Elemente von ungerader Ordnungszahl zwischen den Unterbrechungsgeraden benachbarter Elemente verschoben werden können, ohne einen Einfluss auf die Fertigungsdauer auszuüben. Eine solche Parallelverschiebung ist auf Abb. 16

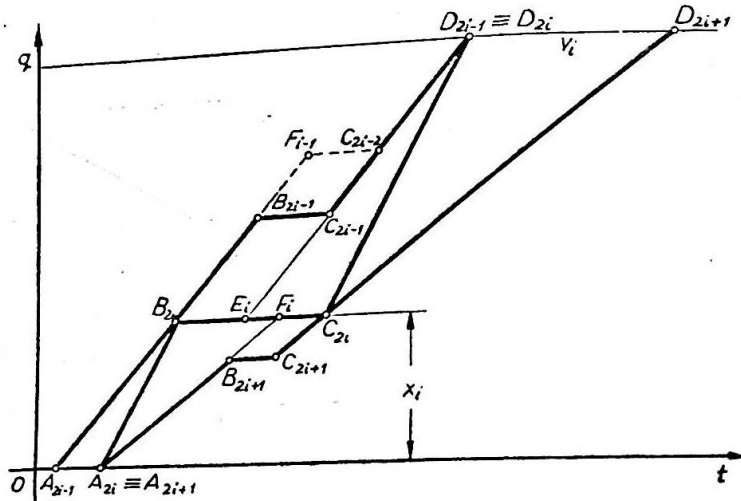


Abb. 18

mit gestrichelten Linien gezeigt. Infolgedessen sind nur die Höhen der Unterbrechungsgeraden der Elemente gerader Ordnungszahl zu bestimmen. Wir bezeichnen sie mit $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Betrachten wir (Abb. 18) drei aufeinander folgende Elemente $A_{2i-1}B_{2i-1}C_{2i-1}D_{2i-1}$, $A_{2i}B_{2i}C_{2i}D_{2i}$ und $A_{2i+1}B_{2i+1}C_{2i+1}D_{2i+1}$ des Figurenteils vom angegebenen Typus, und es seien E_i bzw. F_i die Schnittpunkte der Unterbrechungsgeraden $B_{2i}C_{2i}$ mit den Geraden $C_{2i-1}D_{2i-1}$ bzw. $A_{2i+1}B_{2i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, p$). Wir bezeichnen: $\alpha_i = B_{2i}F_i$, $\beta_i = E_iC_{2i}$, $v_i = D_{2i}D_{2i+1}$. Die Dreiecke $A_{2i}B_{2i}F_i$ und $C_{2i}D_{2i}D_{2i+1}$ sind ähnlich mit dem Dreieck $Q_{2i-1}P_{2i+1}Q_{2i+1}$ aus Abb. 17 und das Dreieck $E_iC_{2i}D_{2i}$ ähnlich mit dem Dreieck $P_{2i-1}P_{2i+1}Q_{2i+1}$, folglich gilt:

$$\frac{x_i}{x_i} = \frac{v_i}{q_0 - x_i} = \frac{b_i}{q_0}; \quad \frac{\beta_i}{q_0 - x_i} = \frac{\alpha_i}{q_0},$$

woraus

$$(15) \quad \alpha_i = \frac{b_i}{q_0} x_i, \quad \beta_i = \frac{\alpha_i}{q_0} (q_0 - x_i), \quad v_i = \frac{b_i}{q_0} (q_0 - x_i).$$

Die Höhen $x_1, x_2, \dots, x_p$ können nicht gänzlich beliebig gewählt werden. In der Tat, setzen wir voraus, dass die Grössen $x_1, x_2, \dots, x_p$ festgelegt wurden; dann muss, bei der sukzessiven Konstruktion der Ele-

mente, der Punkt F_i bei jedem Schritt ($i = 1, 2, \dots, p$) links vom Punkte C_{2i} zu liegen kommen (die beiden Punkte können höchstens zusammenfallen), andernfalls hätten wir beim $2i + 1$ -ten Element eine negative Unterbrechungsdauer. Mit anderen Worten, es muss gelten

$$\Pr B_2 F_1 B_4 F_2 \dots F_{i-1} B_{2i} F_i \leq \Pr E_1 C_2 E_4 C_6 \dots C_{2i-1} E_i C_{2i},$$

oder, wenn wir auf die Zeitachse projizieren:

$$\alpha_1 + \Pr F_1 B_4 + \alpha_2 + \Pr F_2 B_6 + \dots + \Pr F_{i-1} B_{2i} + \alpha_i \leq \beta_1 + \dots + \Pr C_2 E_2 + \beta_2 + \Pr C_4 E_4 + \dots + \Pr C_{2i-2} E_i + \beta_i.$$

Da aber $F_{i-1} B_{2i} = C_{2i-2} E_i$, es folgt also

$$(16) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i \leq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, p-1,$$

und weil F_p mit C_{2p} zusammenfällt (da das letzte Element eine Strecke ist)

$$(17) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p.$$

Beachtet man die Formeln (15), so kann man die Bedingungen (16) und (17) umschreiben. Es wird

$$(18) \quad \sum_{h=1}^i (a_h + b_h) x_h \leq q_0 \sum_{h=1}^i a_h, \quad i = 1, 2, \dots, p-1,$$

bzw.

$$(19) \quad \sum_{h=1}^p (a_h + b_h) x_h = q_0 \sum_{h=1}^p a_h.$$

Die Fertigungsdauer ergibt sich zu

$$T = t_1 + v_1 + v_2 + \dots + v_p = t_1 + \sum_{i=1}^p b_i - \frac{1}{q_0} \sum_{i=1}^p b_i x_i;$$

da die ersten zwei Glieder konstant sind, suchen wir, um T zum Minimum zu machen, das Maximum des Ausdrucks $\sum_{i=1}^p b_i x_i$.

Die Bestimmung der Figur vom Typus der Abb. 16 mit kürzester Fertigungsdauer ist also gleichbedeutend mit der Lösung folgenden linearen Programmierungsproblems:

Man bestimme die reellen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_p$ so, dass die lineare Funktion

$$(20) \quad F = \sum_{i=1}^p b_i x_i$$

zum Minimum wird. Hierbei sind die Zahlen x_i folgenden Bedingungen unterworfen:

$$(21) \quad x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_p \geq 0,$$

$$(22) \quad \begin{cases} (a_1 + b_1)x_1 \leq q_0 a_1 \\ (a_1 + b_1)x_1 + (a_2 + b_2)x_2 \leq q_0(a_1 + a_2) \\ \dots \\ (a_1 + b_1)x_1 + (a_2 + b_2)x_2 + \dots + (a_{p-1} + b_{p-1})x_{p-1} \leq q_0(a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1}) \\ (a_1 + b_1)x_1 + (a_2 + b_2)x_2 + \dots + (a_p + b_p)x_p = q_0(a_1 + a_2 + \dots + a_p) \end{cases}$$

Die gegebenen Festwerte $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_p$ sind alle positiv. *Hilfssatz. Wenn das System linearer Bedingungen (21), (22), (23) erfüllbar ist, dann hat das lineare Programmierungsproblem eine und nur eine Lösung:*

$$(24) \quad x_1 = x_2 = \dots = x_p = q_0 \frac{\sum_{h=1}^p a_h}{\sum_{h=1}^p (a_h + b_h)} = x_0.$$

Beweis. Es sei $x'_1, x'_2, \dots, x'_p$ eine Lösung des Ungleichungssystems (21) ... (23) und setzen wir voraus, dass

$$x'_1 = x'_2 = \dots = x'_k > x'_{k+1}.$$

wo k eine von den Zahlen $1, 2, \dots, p-1$ ist. Wir setzen dann

$$\begin{cases} x''_1 = x''_2 = \dots = x''_k = x''_{k+1} = \frac{\sum_{h=1}^k (a_h + b_h) \cdot x'_1 + (a_{k+1} + b_{k+1})x'_{k+1}}{\sum_{h=1}^{k+1} (a_h + b_h)} \\ x''_i = x'_i, \quad i = k+2, \dots, p. \end{cases}$$

Es ist ersichtlich, dass das Zahlensystem $x''_1, x''_2, \dots, x''_p$ die Bedingungen (21) ... (23) erfüllt. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens erhalten wir eine Lösung des Systems (21) ... (23), die aus lauter gleichen Zahlen besteht, also ist $(x_0, x_0, \dots, x_0)$ eine Lösung des Systems.

Wenn wir diese Lösung in (22) einsetzen, erhalten wir

$$\sum_{h=1}^i (a_h + b_h) q_0 \frac{\sum_{h=1}^p a_h}{\sum_{h=1}^p (a_h + b_h)} \leq q_0 \sum_{h=1}^i a_h, \quad i = 1, 2, \dots, p-1,$$

oder

$$(25) \quad \frac{\sum_{h=1}^i a_h}{\sum_{h=1}^i b_h} \leq \frac{\sum_{h=1}^p a_h}{\sum_{h=1}^p b_h}, \quad i = 1, 2, \dots, p-1.$$

Also ist Ungleichung (25) eine notwendige Verträglichkeitsbedingung für das System (21) ... (23). Gleichzeitig ist sie auch hinreichend, weil sie sicherstellt, dass das Zahlensystem (24) die Bedingung (21) ... (23) erfüllt.

Ein abgeändertes lineares Programmierungsproblem, welches aus der Minimierung der Funktion (20) besteht, mit den Nebenbedingungen (21) und (23) (also ohne (22)), kann man wie folgt lösen. Die Grundlösungen dieses Problems erhält man, indem von den p Stück Ungleichheitszeichen in (21), $p-1$ Stück durch das Gleichheitszeichen ersetzt werden. D.h. die Grundlösungen sind

$$(26) \quad \begin{cases} x_1 = x_2 = \dots = x_i = q_0 \frac{\sum_{h=1}^i a_h}{\sum_{h=1}^i (a_h + b_h)} \\ x_{i+1} = x_{i+2} = \dots = x_p = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p. \end{cases}$$

Die Werte von F für die Grundlösungen sind

$$(27) \quad F = q_0 \frac{\sum_{h=1}^p a_h \cdot \sum_{h=1}^i b_h}{\sum_{h=1}^i (a_h + b_h)}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Wenn wir die Bedingung (25) beachten, stellen wir fest, dass das Maximum der Werte von F für $i = p$ erreicht wird, mithin liefert das System $(x_0, x_0, \dots, x_0)$ eine Optimallösung für die abgeänderte lineare Programmierungsaufgabe.

Wenn wir nun beachten, dass erstens die ursprüngliche lineare Programmierungsaufgabe von der abgeänderten sich nur darin unterscheidet, dass ihr Ungleichungssystem restriktiver ist, und dass zweitens, wie vorhin gezeigt wurde, die Optimallösung der reduzierten Aufgabe eine mögliche, zulässige Lösung der ursprünglichen Aufgabe darstellt, so ergibt es sich, dass $(x_0, x_0, \dots, x_0)$ eine Optimallösung auch für die ursprüngliche Aufgabe ist.

Die abgeänderte Aufgabe kann auch mehrere Optimallösungen besitzen, die ursprüngliche Aufgabe hingegen hat eine einzige Optimallösung. In der Tat, das Maximum des Ausdrucks (27) kann erreicht werden, ausser für den Index $i = p$, auch für andere Indices, den grössten unter diesen wollen wir mit k bezeichnen. Dann steht in der Beziehung (25) für $i = k$, anstelle des Zeichens $\leq$ das Gleichheitszeichen:

$$\frac{\sum_{h=1}^k a_h}{\sum_{h=1}^k b_h} = \frac{\sum_{h=1}^p a_h}{\sum_{h=1}^p b_h}.$$

welches in folgender Form geschrieben werden kann:

$$(28) \quad \frac{\sum_{h=1}^k a_h}{\sum_{h=1}^k (a_h + b_h)} = \frac{\sum_{h=1}^p a_h}{\sum_{h=1}^p (a_h + b_h)}$$

Die Menge der Optimallösungen der abgeänderten Aufgabe besteht aus den konvexen Kombinationen der Grundlösungen. Betrachten wir die Komponenten mit den Ordnungszahlen $k+1, k+2, \dots, p$ irgend einer Optimallösung $x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*$ der abgeänderten Aufgabe. Diese haben den Wert

$$(29) \quad x_{k+1}^* = x_{k+2}^* = \dots = x_p^* = v x_0, \text{ mit } 0 \leq v \leq 1,$$

da doch nur die Grundlösung $(x_0, x_0, \dots, x_0)$ von Null verschiedene Komponenten besitzt. Die Optimallösungen der ursprünglichen Aufgabe sind diejenigen unter den Zahlensystemen $x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*$, welche dem System (21) ... (23) genügen. Indem wir von der Gleichung (23) die k -te Ungleichung (22) abziehen, erhalten wir

$$(30) \quad \sum_{h=k+1}^p (a_h + b_h) x_h \geq q_0 \sum_{h=k+1}^p a_h,$$

die vom System x_i^* befriedigt werden müssen. Beachten wir hierbei die Formeln (29) und (24), so erhalten wir

$$v \frac{\sum_{h=1}^p a_h}{\sum_{h=1}^p (a_h + b_h)} \cdot \sum_{h=k+1}^p (a_h + b_h) \geq \sum_{h=k+1}^p a_h,$$

die zusammen mit (28)

$$v \geq 1 \quad \text{liefert.}$$

Das Ergebnis ist somit $v = 1$ und die erwähnte konvexe Kombination reduziert sich auf die optimale Lösung $(x_0, x_0, \dots, x_0)$.

Hiermit haben wir den Hilfssatz bewiesen, und zugleich haben wir festgestellt, dass unter allen Figuren vom Typus der Abb. 16, mit gegebenen Anstiegen, der entsprechende Figurengrundteil (definiert im Abschnitt 3) und nur dieser die kürzeste Fertigungsdauer aufweist. Hierbei wurde vorausgesetzt, dass es Figuren vom Typus 16 mit den gegebenen Anstiegen gibt; dazu ist es notwendig und hinreichend, dass die Bedingungen (25) befriedigt werden. Es ist einleuchtend, dass diese Bedingungen sich mit den Existenzbedingungen des Figurengrundteils decken, was auch der Fall ist, da die Beziehungen (25) und (9) sich nur in der Schreibweise unterscheiden.

Bemerkung. Die Höhen $x_1, x_2, \dots, x_p$ haben die Figur aus der Abb. 16 nicht eindeutig bestimmt, obwohl allen Figuren vom Typus 16 mit den-

selben Höhen $x_i (i = 1, \dots, p)$ dieselbe Fertigungsdauer zukommt. Diese Unbestimmtheit verschwindet bei dem Figurengrundteil, da hier $x_1 = x_2 = \dots = x_p$, und hiermit besitzen auch die Unterbrechungsgeraden ungerader Ordnungszahl dieselbe Höhe.

6. Die Optimallösung des Problems mit einer Unterbrechung. In Abschnitt 4 haben wir die Menge der zulässigen Figuren auf Figuren reduziert, welche aus lauter Teilen vom Typus der Abb. 16 bestehen. Infolge der Ergebnisse des Abschnittes 5 können wir die zulässigen Figuren weiter beschränken, uzw. auf zulässige Figuren, welche aus lauter Figurengrundteilen bestehen.

Die Menge der zulässigen Figuren, welche nur aus Figurengrundteilen bestehen, ist nicht leer. Wenn wir nämlich von einer gegebenen zulässigen Figur ausgehen und nacheinander die im Abschnitt 4 gezeigten Transformationen anwenden, gelangen wir zu einer zulässigen Figur, die nur aus zulässigen Figurenteilen vom Typus der Abb. 16. besteht; für diese Figurenteile sind die Bedingungen (25) (oder (9)) erfüllt, die Figurenteile können also durch Figurengrundteile ersetzt werden. Hierbei verkürzt sich die Bearbeitungsdauer jedes einzelnen Figurenteils, es verringert sich also auch die gesamte Fertigungsdauer.

Wenn zwei benachbarte Figurengrundteile dieselbe Unterbrechungsgerade besitzen, so kann man die zwei Figurenteile als einen einzigen Figurengrundteil auffassen; wenn die Höhe der Unterbrechungsgeraden des rechten Figurengrundteils kleiner ist, als diejenige des linken Teiles, dann bilden die beiden benachbarten Grundteile einen einzigen Figurenteil vom Typus der Abb. 16., dieser kann dann durch einen einzigen Figurengrundteil ersetzt werden, welcher eine kürzere Fertigungsdauer aufweisen wird, und dessen Unterbrechungsgerade zwischen den Unterbrechungsgeraden der ursprünglichen Figurenteile liegen wird.

Durch wiederholte Anwendung dieses Vorgehens gelangen wir schließlich zu einer zulässigen Figur, welche nur aus Figurengrundteilen besteht und wo die Höhen der zugehörigen Unterbrechungsgeraden eine zunehmende Folge bilden. Es sei M die Menge der zulässigen Figuren, welche diese Eigenschaften besitzen.

Im Endergebnis also haben wir die Menge der zulässigen Figuren auf die Menge M reduziert. Wir betonen, dass bei den einzelnen Reduktionen, bei jedem Schritt, bei dem wir von der Menge M_i zulässiger Figuren zu ihrer Untermenge M_{i+1} gelangt sind, einer jeden zulässigen Figur aus der Menge $M_i \setminus M_{i+1}$ eine zulässige Figur aus der Untermenge M_{i+1} entsprach, welche eine streng kleinere Fertigungsdauer besaß als die vorhergehende Figur. Infolgedessen müssen die Optimalfiguren in der Menge M enthalten sein.

Wir beweisen nun, dass die Menge M ein einziges Element enthält; hiermit wird dann der Existenz- und Unizitätsbeweis der Optimalfigur (und des Optimalprogramms) erbracht sein.

Im Einklang mit dem oben Gesagten ist die Menge M nicht leer. Setzen wir voraus, dass die zulässige Figur $F \in M$ und dass F aus den Figurengrundteilen $(2r_0 + 1, 2r_1 + 1), (2r_1 + 1, 2r_2 + 1), \dots, (2r_{p-1} + 1,$

$2r_s + 1$) besteht ($r_0 = 0$, $r_s = m$). Indem wir Bedingung 25 (oder (9)) auf den Figurengrundteil ($2r_j + 1$, $2r_{j+1} + 1$) anwenden, erhalten wir:

$$(31) \quad \frac{\sum_{h=r_j+1}^{k_j} a_h}{\sum_{h=r_j+1}^{k_j} b_h} \geq \frac{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} a_h}{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} b_h}, \quad k_j = r_j + 1, \dots, r_{j+1} - 1; \quad j = 0, 1, \dots, s-1;$$

beachten wir andererseits, dass die Höhen der Unterbrechungsgeraden, welche durch Formel (7) oder (24) bestimmt sind, eine zunehmende Folge bilden, so erhalten wir:

$$(32) \quad \frac{\sum_{h=r_{j-1}+1}^{r_j} a_h}{\sum_{h=r_{j-1}+1}^{r_j} b_h} < \frac{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} a_h}{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} b_h}, \quad j = 1, 2, \dots, s-1.$$

Die Aufgabe besteht im Beweis, dass die Bedingungen (31) und (32) die Folge $\{r_j\}$, $j = 0, 1, \dots, s$ eindeutig bestimmen. Zu diesem Behufe zeigen wir, dass die Bedingungen (31) und (32) gleichwertig sind mit folgenden Bedingungen:

$$(33) \quad \frac{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} a_h}{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} b_h} \leq \frac{\sum_{h=r_{j+1}+1}^i a_h}{\sum_{h=r_{j+1}+1}^i b_h}, \quad i = r_j + 1, \dots, r_{j+1}; \quad j = 0, 1, \dots, s-1,$$

$$(34) \quad \frac{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} a_h}{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} b_h} < \frac{\sum_{h=r_{j+1}+1}^i a_h}{\sum_{h=r_{j+1}+1}^i b_h}, \quad i = r_{j+1} + 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, s-1.$$

Tatsächlich folgt (33) unmittelbar aus (31). Um zu zeigen, dass auch (34) eine Folgerung von (31) und (32) ist, wollen wir zuerst für die natürliche Zahl i , für welche $r_{j+1} < i \leq m$ gilt, den Index r_l in der Weise bestimmen, dass wir $r_l \leq i < r_{l+1}$ haben; dann gilt

$$(35) \quad \frac{\sum_{h=r_j+1}^i a_h}{\sum_{h=r_j+1}^i b_h} = \frac{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} a_h + \sum_{h=r_{j+1}+1}^{r_{j+2}} a_h + \dots + \sum_{h=r_{l-1}+1}^{r_l} a_h + \sum_{h=r_l+1}^i a_h}{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} b_h + \sum_{h=r_{j+1}+1}^{r_{j+2}} b_h + \dots + \sum_{h=r_{l-1}+1}^{r_l} b_h + \sum_{h=r_l+1}^i b_h}.$$

Andererseits folgt aus (32):

$$(36) \quad \frac{\sum_{h=r_{j+1}+1}^{r_{j+2}} a_h}{\sum_{h=r_{j+1}+1}^{r_{j+2}} b_h} > \frac{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} a_h}{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} b_h} \\ \dots \dots \dots \frac{\sum_{h=r_{l-1}+1}^{r_l} a_h}{\sum_{h=r_{l-1}+1}^{r_l} b_h} > \frac{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} a_h}{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} b_h},$$

und aus (31) und (32) erhalten wir

$$(37) \quad \frac{\sum_{h=r_l+1}^i a_h}{\sum_{h=r_l+1}^i b_h} \geq \frac{\sum_{h=r_{l+1}+1}^{r_{l+1}} a_h}{\sum_{h=r_{l+1}+1}^{r_{l+1}} b_h} > \frac{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} a_h}{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} b_h}.$$

Bekanntlich liegt der Wert des Quotienten $\frac{A_1 + A_2 + \dots + A_v}{B_1 + B_2 + \dots + B_v}$ zwischen dem kleinsten und dem grössten Wert, welchen die Quotienten $\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \dots, \frac{A_v}{B_v}$ aufweisen, wenn alle Nenner positiv sind; aus diesem Grunde folgt aus (35) und den Ungleichungen (36), dass die Bedingung (34) tatsächlich besteht.

Umgekehrt, aus (33) und (34) folgt sofort (31) und

$$\frac{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} a_h}{\sum_{h=r_j+1}^{r_{j+1}} b_h} < \frac{\sum_{h=r_{j+1}+1}^{r_{j+2}} a_h}{\sum_{h=r_{j+1}+1}^{r_{j+2}} b_h},$$

und aus dieser Beziehung kann man dann die Ungleichung (32) ableiten.

Was besagen die Bedingungen (33) und (34)? Die Ungleichungen zeigen für $j = 0$, dass es gilt

$$\frac{\sum_{h=1}^{r_1} a_h}{\sum_{h=1}^{r_1} b_h} = \min_{1 \leq i \leq m} \frac{\sum_{h=1}^i a_h}{\sum_{h=1}^i b_h},$$

und wenn dieses Minimum bei mehreren Indices erreicht wird, dann r_j der grösste Index unter denselben ist (sonst wäre ja Bedingung (34) verletzt). Der Index r_j ist also eindeutig bestimmt, in Übereinstimmung mit den Regeln, welche wir im Abschnitt 3 ausgesprochen haben, als wir die Folge der Grundindices definierten (Formel (1)).

Allgemein, setzen wir voraus, dass wir die Indices $r_1, r_2, \dots, r_j$ bereits bestimmt haben; man ersieht auch hier genau wie vorhin, dass die Bedingungen (33) und (34) die Zahl r_{j+1} eindeutig festlegen, für welche also gehen muss:

$$\frac{\sum_{k=r_j+1}^{r_{j+1}} a_k}{\sum_{k=r_j+1}^{r_{j+1}} b_k} = \min_{r_j+1 \leq i \leq m} \frac{\sum_{k=r_j+1}^i a_k}{\sum_{k=r_j+1}^i b_k},$$

und, wenn dieses Minimum bei mehreren Indices erreicht wird, dann r_{j+1} der grösste unter denselben ist. Also ist die Folge $\{r_j\}$ eindeutig bestimmt, also besteht M aus einem einzigen Element.

Die Bildung der Folge $\{r_j\}$ ist somit identisch mit der Konstruktion der Folge der Grundindices, welche wir im Abschnitt 3 beschrieben haben, infolgedessen ist der Beweis des im selben Abschnitt ausgesprochenen Satzes abgeschlossen.

Bemerkung. Die Folge der Grundindices kann auch auf andere Weise erhalten werden. Es wurde im Abschnitt 3 darauf hingewiesen, dass Figurengrundteile, bestehend aus nur 3 Nachbarelementen, immer existieren. Betrachten wir eine zulässige Figur, die eine Folge von solchen Grundteilen ist; die Höhen der Unterbrechungsgeraden teilen die senkrechte Strecke OQ in den Verhältnissen

$$(38) \quad \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_i}{b_i}, \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}, \dots, \frac{a_m}{b_m}.$$

Wenn ein Glied $\frac{a_i}{b_i}$ der Folge (38) grösser oder gleich ist, als das nächste, dann können die zwei entsprechenden Grundteile, wie wir gesehen haben, zu einem einzigen Grundteil zusammengefasst werden, dessen Unterbrechungsgerade den Abstand OQ im Verhältnis $\frac{a_i + a_{i+1}}{b_i + b_{i+1}}$ teilt. Der neuen zulässigen Figur entspricht dann an Stelle der Folge (38) die neue Folge

$$(39) \quad \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_{i-1}}{b_{i-1}}, \frac{a_i + a_{i+1}}{b_i + b_{i+1}}, \frac{a_{i+2}}{b_{i+2}}, \dots, \frac{a_m}{b_m}.$$

Wenn es in der Folge (39) ein Glied gibt, das grösser oder gleich ist, als das nächste, dann können diese beiden Glieder genau so durch ein einziges ersetzt werden, wie man von der Folge (38) zur Folge (39) gelangt ist. Der neuen Folge entspricht eine neue zulässige Figur, welche aus laute

Grundteilen besteht. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens gelangt man zwangsläufig zu einer zunehmenden Zahlenfolge (38) (welche gegebenenfalls auch aus einem einzigen Glied bestehen kann). Die entsprechende zulässige Figur besteht aus lauter Grundteilen, bei welchen die Höhen der Unterbrechungsgeraden eine zunehmende Folge bilden, demnach gehört sie zur Menge M und stellt die Lösung unseres Problems dar.

Nehmen wir das am Ende des Abschnitts 3 behandelte Zahlenbeispiel. Die Folge (38) ist in diesem Falle

$$\frac{21}{9}, \frac{4}{11}, \frac{9}{7}, \frac{6}{23}, \frac{20}{25}, \frac{19}{6}, \frac{11}{9}, \frac{12}{19}, \frac{20}{5}, \frac{10}{7}.$$

Die nicht zunehmenden Abschnitte dieser Folge ersetzen wir durch je ein einziges Glied, welches im Nenner die Summe der Nenner und im Zähler die Summe der Zähler der Glieder im Abschnitt enthält:

$$\frac{25}{20}, \frac{15}{30}, \frac{20}{25}, \frac{42}{34}, \frac{30}{12}.$$

Indem man weiter so fortfährt, erhält man nacheinander die Folgen

$$\frac{40}{50}, \frac{20}{25}, \frac{42}{34}, \frac{30}{12}.$$

$$\frac{60}{75}, \frac{42}{34}, \frac{30}{12}.$$

Die letzte Folge nimmt monoton zu. Wenn wir die Indices der Glieder verfolgen, welche zu je einem Glied der letzten Folge zusammengefasst worden sind, erhalten wir die Grundindices.

Dieses Ergebnis ist identisch mit demselben im Abschnitt 3.

Wir bemerken, dass die Zusammenfassungen auf verschiedene Weise durchgeführt werden können, die Endfolge aber nicht von der gewählten Reihenfolge abhängt, da wir die einzige Folge der Grundindices erhalten müssen.

7. Eine Verallgemeinerung der linearen Programmierung. Das Problem des Optimalprogramms mit höchstens einer Unterbrechung je Maschine kann auch rein analytisch formuliert werden. Ein Element $A_i B_i C_i D_i$ (Abb. 19) ist durch die Angabe dreier Parameter festgelegt:

x_i = die Ordinate des Punktes B_i
 y_i = die Abszisse des Punktes A_i und
 $z_i = B_i C_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Es wird das Minimum der Fertigungsdauer

$$(40) \quad T = y_n + z_n + t_n - y_1$$

gesucht, bei folgenden Nebenbedingungen:

$$(41) \quad y_1 = 0$$

$$(42) \quad \begin{cases} 0 \leq x_i \leq q_0, & i = 1, 2, \dots, n, \\ z_i \geq 0, \end{cases}$$

$$(43) \quad y_i \leq y_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$(44) \quad (t_{i+1} - t_i)x_{i+1} + q_0(y_{i+1} - y_i) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$(45) \quad (t_{i+1} - t_i)x_i + q_0(y_{i+1} - y_i) + q_0(z_{i+1} - z_i) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

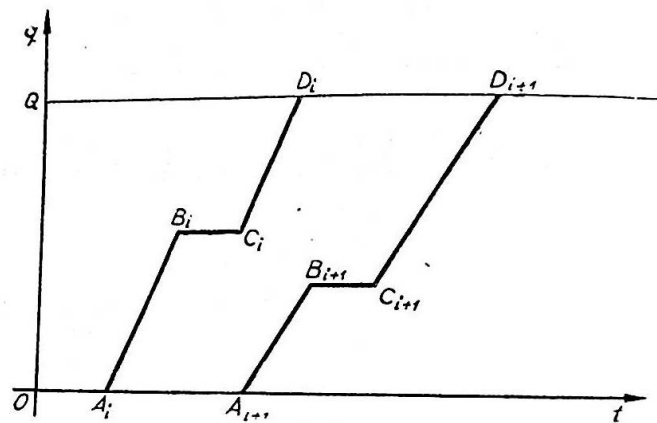


Abb. 19

$$(46) \quad x_{i+1} > x_i \Rightarrow (t_{i+1} - t_i)x_{i+1} + q_0(y_{i+1} - y_i) - q_0 z_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$(47) \quad x_{i+1} > x_i \Rightarrow (t_{i+1} - t_{i+1})x_i + q_0(y_{i+1} - y_i) - q_0 z_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Die Bedingungen (43) ... (47) drücken den Sachverhalt aus, dass der Linienzug $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}D_{i+1}$ sich rechts vom Linienzug $A_iB_iC_iD_i$ befindet. Die Bedingung (44) sagt aus, dass Punkt B_{i+1} rechts von der Geraden A_iB_i liegt, Bedingung (45), dass Punkt C_i links von der Geraden $C_{i+1}D_{i+1}$ liegt. Wenn $x_{i+1} > x_i$, dann müssen diese Bedingungen noch durch die Bedingungen (46) und (47) verstärkt werden, die vorschreiben, dass Punkt B_{i+1} rechts zur Geraden C_iD_i , bzw. Punkt C_i links zur Geraden $A_{i+1}B_{i+1}$ zu liegen kommt.

Beachtet man die Festlegung (41) sowie die Tatsache, dass die Werte t_i gegebene Konstanten sind, so kann man die Funktion T durch

$$(40') \quad T' = y_n + z_n$$

ersetzen.

Das auf diese Weise formulierte Problem gehört zu folgendem Problemtypus, welcher die lineare Programmierung verallgemeinert.

Es sind diejenigen reellen Zahlen $x_i, x, \dots, x_n$ zu bestimmen, die folgende Bedingungen:

$$(48) \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$(49) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$(50) \quad \sum_{j=1}^n a'_{ij} x_j - b'_i > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a''_{ij} x_j - b''_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

und für welche die Funktion

$$(51) \quad F = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Maximum (oder Minimum) wird.

Dieses Problem unterscheidet sich von der linearen Programmierung dadurch, dass bei ihm, ausser den linearen Ungleichungen, auch Nebenbedingungen in der Form von Implikationen auftreten, deren zwei Seiten lineare Ungleichungen sind.

Eingegangen am 3. jan. 1963.