

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Жарков Ф. Т., Об одном признаке сходимости рядов с вещественными членами. Чч. Зап. мордовск. ЧН-Т, 8, 41—42 (1960).
 [2] Кнорр К., *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. Berlin, Verlag J. Springer, 1931.
 [3] Ney A., Contribution à l'étude de la rapidité de convergence des séries à termes positifs. *Mathematica*, 4 (27), 1, 77—106 (1962).
 [4] Ney A., O formulă asimptotică generală pentru evaluarea restului seriilor convergente cu termeni pozitivi. *Studii și Cercetări de Matematică*, Cluj Roumanie. XII, 2, 1961.
 [5] Nicolesco M., *Analiză Matematică*, Vol. I. Ed. Tehnică București, 1957.
 [6] Салехов Г. С., *Вычисление рядов*. Гостехиздат, Москва 1955.

Reçu le 9. 1. 1963.

SUR CERTAINS POLYNOMES D'INTERPOLATION

par

D. RIPIANU

à Cluj

1. Dans le travail [1] le professeur TIBERIU POPOVICIU donne un procédé pour construire les polynômes $P_i(x)$ de degré $m \geq 1$ ($i=0, 1, \dots, m$) qui jouissent de la propriété que si la fonction $f(x)$ définie sur l'ensemble de points $E = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ est convexe de l'ordre n pour toutes les valeurs de $n = -1, 0, \dots, m-1$, le polynome

$$(1) \quad P(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i) P_i(x),$$

dénommé dans [1] „polynome d'interpolation” de la fonction $f(x)$ est convexe d'ordre n dans l'intervalle $I = [a, b]$ ($a < b$). À la fin du paragraphe 14 du travail cité on définit certains polynômes „minimaux” d'interpolation, choisis parmi les polynômes d'interpolation sus-mentionnés et l'on détermine le polynome minimal d'interpolation (1) aux cas où $m = 1$ et $m = 2$ à noeuds quelconques (on suppose toujours $x_0 < x_1 < \dots < x_m$) et au cas $m = 3$ au cas où $x_1 + x_2 = x_0 + x_3$.

Dans le présent travail, on détermine, en utilisant le procédé indiqué par le professeur Popoviciu, le polynome (1) au cas où $m = 3$ à noeuds quelconques, ensuite l'on donne — en utilisant toujours le procédé du professeur T. Popoviciu — un procédé à l'aide duquel on peut déterminer le polynome minimal d'interpolation $P(x)$ de (1), qu'on désigne pour abréger par „polynome $P(x)$ ” pour m quelconque et pour des noeuds $x_0, x_1, \dots, x_m$, également quelconques.

Le procédé indiqué par le professeur T. Popoviciu est compris dans les formules (15) et (17) de [1] et consiste dans ce qui suit :

On considère les expressions :

$$(2) \quad S_{0,i}(x) \equiv 0 \quad S_{1,i}(x) = - \sum_{j=i+1}^m P_j(x),$$

$$(3) \quad \left. \begin{aligned} S_{s,i}(x) &= -\frac{1}{\prod_{v=1}^{s-1} (x_i - x_{i-v})} \sum_{j=i+1}^m P_j(x) \prod_{v=1}^{s-1} (x_j - x_{i-v}), \\ S_{i+1,i}(x) &= -\frac{1}{\prod_{v=0}^{i-1} (x_i - x_v)} \sum_{j=i+1}^m P_j(x) \prod_{v=0}^{i-1} (x_j - x_v), \end{aligned} \right\}$$

$$(4) \quad \lambda_{j,i} = \sup_{x \in I} \left[S_{i-j,i}^{(i-j)}(x) - S_{i+1,i}^{(i-j)}(x) - \sum_{v=0}^{j-1} \lambda_{v,i} \frac{(x-a)^{j-v}}{(j-v)!} \right]$$

à la condition qu'au cas où $j = 0$, la somme $\sum_{v=0}^{j-1}$ soit remplacée par zéro et

$$(5) \quad P_i(x) = S_{i+1,i}(x) + \sum_{j=0}^i \lambda_{j,i} \frac{(x-a)^{i-j}}{(i-j)!}.$$

Dans toutes ces expressions $i = 0, 1, \dots, m-1$. Si l'on connaît $P_m(x), P_{m-1}(x), \dots, P_{i+1}(x)$, on détermine $P_i(x)$ de la manière suivante:
 1°. On détermine $S_{0,i}(x), S_{1,i}(x)$ à l'aide de (2) et $S_{2,i}(x), S_{3,i}(x), \dots, S_{i+1,i}(x)$ à l'aide de (3).

2°. On détermine $\lambda_{0,i}, \lambda_{1,i}, \dots, \lambda_{i,i}$ à l'aide de (4).

3°. On détermine $P_i(x)$ à l'aide de (5).

On pose $P_m(x) = \rho(x-a)^m$, où ρ est une constante positive et l'on détermine successivement les polynômes $P_{m-1}(x), P_{m-2}(x), \dots, P_0(x)$, auquel cas (1) donne le polynôme $P(x)$ en question.

2. On déterminera d'abord le polynôme (1) au cas $m = 3$ pour des noeuds x_0, x_1, x_2, x_3 quelconques. On posera donc $P_3(x) = \rho(x-a)^3$ et on fera tout d'abord $i = 2$. (2) donne en ce cas

$$S_{0,2}(x) \equiv 0, \quad S_{1,2}(x) = -P_3(x)$$

et (3)

$$S_{2,2}(x) = -\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} P_3(x), \quad S_{3,2}(x) = -\frac{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} P_3(x).$$

Avec ces expressions, (4) donne

$$\lambda_{0,2} = \sup_{x \in I} (S_{2,2}^{(2)}(x) - S_{3,2}^{(2)}(x)) = 6\rho \sup_{x \in I} \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} (x-a),$$

donc

$$\lambda_{0,2} = 6\rho \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} (b-a).$$

$$(6) \quad \lambda_{1,2} = \sup_{x \in I} [S_{1,2}^{(1)}(x) - S_{3,2}^{(1)}(x) - \lambda_{0,2}(x-a)] =$$

$$= 3\rho \frac{x_3 - x_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \sup_{x \in I} [(x_2 + x_3 - x_0 - x_1)(x-a)^2 - 2(x_3 - x_1)(b-a)(x-a)].$$

Si l'on introduit pour la commodité la notation

$$(7) \quad x - a = (b-a)u,$$

alors

$$\lambda_{1,2} = 3\rho \frac{x_3 - x_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} (b-a)^2 \sup_{u \in [0,1]} Q_1(u),$$

avec

$$Q_1(u) = (x_2 + x_3 - x_0 - x_1)u^2 - 2(x_3 - x_1)u.$$

Tableau 1.

u	0	$\bar{u}$	1
$\varphi(u)$	$\varphi(0)$	$\varphi(\bar{u})$	$\varphi(1)$
$\varphi'(u)$	—	0	+

On considérera une fonction $\varphi(u)$ de la variable u , continue pour $u \in [0, 1]$ et dont la variation dans cet intervalle est donnée par le tableau 1.

Si $\varphi(1) > \varphi(0)$, alors $\max_{u \in [0,1]} \varphi(u) = \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi(1) - \varphi(0)$, tandis

que si $\varphi(1) \leq \varphi(0)$,

alors $\max_{u \in [0,1]} \varphi(u) = \varphi(0) = \varphi(0) + 0$,

par conséquent aux deux cas $\max_{u \in [0,1]} \varphi(u) = \varphi(0) + F[\varphi(1) - \varphi(0)]$, où l'on a désigné par $F(x)$ la fonction

$$(8) \quad F(x) = \frac{1}{2} (x + |x|) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Il est évident que si $\varphi(u)$ est monotone pour $u \in [0, 1]$, la relation ci-dessus subsiste. Par conséquent, si la fonction $\varphi(u)$, continue pour $u \in [0, 1]$ est monotone dans cet intervalle ou bien varie conformément au tableau 1, alors $\max_{u \in [0,1]} \varphi(u) = \varphi(0) + F[\varphi(1) - \varphi(0)]$.

Il est d'ailleurs évident que si le polynôme $Q(u)$ remplit les conditions requises ci-dessus pour la fonction $\varphi(u)$ et si $Q(0) \leq 0$, alors le polynôme $R(u)$ avec $R'(u) = Q(u)$ remplit également ces conditions. On en déduit que le polynôme $Q(u) = \sum_{i=0}^n a_i u^i$ avec $a_i \leq 0$, ($i = 1, 2, \dots, n-1$) remplit ces mêmes conditions (ce qui d'ailleurs devient évident si l'on utilise le théorème de Descartes pour $Q'(u)$).

Par conséquent :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\text{a) Si le polynôme } Q(u) = \sum_{i=0}^n a_i u^i \text{ est monotone dans l'intervalle } [0,1] \text{ ou bien varie conformément au tableau 1 (avec } Q(u) \text{ à la place de } \varphi(u)) \text{ alors } \sup_{u \in [0,1]} Q(u) = \max_{u \in [0,1]} Q(u) = Q(0) + F[Q(1) - Q(0)]. \\ &\text{b) Si en particulier } a_i \leq 0 \text{ (} i = 1, 2, \dots, n-1 \text{), alors la même relation a lieu.} \\ &\text{c) Si } a_i \leq 0 \text{ (} i = 1, 2, \dots, n-1 \text{) et } a_0 = 0, \text{ alors } \sup_{u \in [0,1]} Q(u) = F[Q(1)] \geq 0. \end{aligned} \right.$$

Or, $Q_1(u)$ remplit les conditions (9) (b) de sorte que

$$(10) \quad \lambda_{1,2} = 3\rho \frac{x_3 - x_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)(b - a)^2$$

$$\lambda_{2,2} = \sup_{x \in I} \left[S_{0,2}(x) - S_{3,2}(x) - \lambda_{0,2} \frac{(x - a)^2}{2} - \lambda_{1,2}(x - a) \right] =$$

$$= \rho \frac{(b - a)^3}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \sup_{u \in [0,1]} Q_2(u), \text{ où}$$

$$Q_2(u) = (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)u^3 - 3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)u^2 -$$

$$- 3(x_3 - x_2)F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)u$$

remplit les conditions (9) (c), de sorte que

$$(11) \quad \lambda_{2,2} = \frac{\rho(b - a)^3}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F[(x_3 - x_1)(-x_0 + 3x_2 - 2x_3) -$$

$$- 3(x_3 - x_2)F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)].$$

On déduit donc de (5) avec les expressions (6), (10) et (11)

$$P_2(x) = S_{3,2}(x) + \frac{\lambda_{0,2}}{2}(x - a)^2 + \lambda_{1,2}(x - a) + \lambda_{2,2} =$$

$$= \rho \left\{ - \frac{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}(x - a)^3 + \frac{3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}(b - a)(x - a)^2 + \right.$$

$$(12) \quad \left. + 3 \frac{x_3 - x_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)(b - a)^2(x - a) + \right.$$

$$\left. + \frac{(b - a)^3}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F[(x_3 - x_1)(-x_0 + 3x_2 - 2x_3) - \right.$$

$$\left. - 3(x_3 - x_2)F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)] \right\}.$$

On fera maintenant $i = 1$. En ce cas (2) donne $S_{0,1}(x) \equiv 0$,

$$S_{1,1}(x) = -[P_2(x) + P_3(x)] = \rho \left[\frac{(x_3 - x_2)(x_2 + x_3 - x_0 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}(x - a)^3 - \right.$$

$$- 3 \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}(b - a)(x - a)^2 - 3 \frac{x_3 - x_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F(x_1 + x_2 -$$

$$- x_0 - x_3)(b - a)^2(x - a) - \frac{(b - a)^3}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F[(x_3 - x_1)(-x_0 + 3x_2 - 2x_3) -$$

$$- 3(x_3 - x_2)F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)] \Big],$$

$$S_{2,1}(x) = -\frac{1}{x_1 - x_0} [(x_2 - x_0)P_2(x) + (x_3 - x_0)P_3(x)] =$$

$$= \rho \left[\frac{(x_3 - x_0)(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}(x - a)^3 - 3 \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}(b - a)(x - a)^2 - \right.$$

$$- 3 \frac{(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)(b - a)^2(x - a) -$$

$$- \frac{(b - a)^3}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} F[(x_3 - x_1)(-x_0 + 3x_2 - 2x_3) - 3(x_3 - x_2)F(x_1 + x_2 -$$

$$- x_0 - x_3)],$$

de sorte que

$$\lambda_{0,1} = \sup_{x \in I} [S_{1,1}(x) - S_{2,1}(x)] = \frac{3\rho(b - a)^2(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)}.$$

$$\sup_{u \in [0,1]} [(x_3 - x_1) + F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3) - (x_3 - x_1)(1 - u)^2].$$

$$(13) \quad \lambda_{0,1} = 3\rho \frac{(b - a)^2(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)} [x_3 - x_1 + F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)].$$

$$\lambda_{1,1} = \sup_{u \in I} [-S_{2,1}(x) - \lambda_{0,1}(x - a)] = \rho(b - a)^3 \sup_{u \in [0,1]} Q_3(u),$$

avec

$$Q_3(u) = - \frac{(x_3 - x_0)(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} u^3 + 3 \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} u^2 +$$

$$+ 3 \frac{x_3 - x_2}{x_1 - x_0} \left[- \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_0} + \frac{x_1 - x_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3) \right] u +$$

$$+ \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} F[(x_3 - x_1)(-x_0 + 3x_2 - 2x_3) -$$

$$- 3(x_3 - x_2)F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)],$$

de sorte que si $x_1 + x_2 - x_0 - x_3 \leq 0$, alors

$$Q_3(0) < 0, \quad Q_3(1) = 3 \frac{(x_3 - x_2)(x_0 + x_3 - x_1 - x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \geq 0,$$

et si $x_1 + x_2 - x_0 - x_3 > 0$, alors

$$Q_3(u) = 3 \frac{x_3 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} (1 - u)[(x_3 - x_0)u - x_0 + 2x_1 - x_3].$$

Les conditions (9) (a) étant remplies, on a donc

$$(14) \quad \lambda_{1,1} = \rho(b - a)^3 \left\{ \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} F[(x_3 - x_1)(-x_0 + 3x_2 - 2x_3) - \right.$$

$$- 3(x_3 - x_2)F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)] + \frac{x_3 - x_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F \left[\frac{1}{x_1 - x_0} (-x_0^2 - \right.$$

$$- 3x_1^2 + 3x_0x_1 + x_0x_2 - 2x_0x_3 + 3x_1x_3 - x_2x_3) + 3F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3) \Big] \Big\}.$$

La relation (5) donne par conséquent avec les expressions (13) et (14)

$$(15) \quad P_1(x) = S_{2,1}(x) + \lambda_{0,1}(x-a) + \lambda_{1,1} = \rho \left\{ \frac{(x_3-x_0)(x_3-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)}(x-a)^3 - \right. \\ \left. - 3 \frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)}(b-a)(x-a)^2 + 3 \left[\frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{x_3-x_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} F(x_1+x_2-x_0-x_3) \right] (b-a)^2(x-a) + \right. \\ \left. + \frac{x_3-x_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} F \left[-\frac{1}{x_1-x_0} (-x_0^2-3x_1^2+3x_0x_1+x_0x_2- \right. \right. \\ \left. \left. - 2x_0x_3+3x_1x_3-x_2x_3) + 3F(x_1+x_2-x_0-x_3) \right] (b-a)^3 \right\}.$$

On fera enfin $i=0$. En ce cas (2) donne

$$(16) \quad S_{1,0}(x) = \rho \left\{ \frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}(b-x)^3 - (b-a)^3 \left\{ \frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} F[(x_3-x_1)(-x_0+3x_2-2x_3)-3(x_3-x_2)F(x_1+x_2-x_0-x_3)] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{x_3-x_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} F \left[\frac{1}{x_1-x_0} (-x_0^2-3x_1^2+ \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 3x_0x_1+x_0x_2-2x_0x_3+3x_1x_3-x_2x_3) + 3F(x_1+x_2-x_0-x_3) \right] \right\} \Bigg\},$$

de sorte que (4) donne

$$\lambda_{0,0} = \sup_{x \in I} [-S_{1,0}(x)] = \rho \left\{ \frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} F[(x_3-x_1)(-x_0+3x_2-2x_3)-3(x_3-x_2)F(x_1+x_2-x_0-x_3)] + \right. \\ \left. + \frac{x_3-x_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} F \left[\frac{1}{x_1-x_0} (-x_0^2-3x_1^2+3x_0x_1+x_0x_2-2x_0x_3+3x_1x_3-x_2x_3) + \right. \right. \\ \left. \left. + 3F(x_1+x_2-x_0-x_3) \right] \right\} (b-a)^3.$$

La relation (5) donne donc avec l'expression (16)

$$(17) \quad P_0(x) = S_{1,0}(x) + \lambda_{0,0} = \rho \frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}(b-x)^3.$$

Si dans les expressions $P_3(x) = \rho(x-a)^3$, (12), (15) et (17) on fait $\rho=1$, $x_0+x_3=x_1+x_2$, on obtient les expressions

$$P_0(x) = (b-x)^3, \quad P_1(x) = -(2k+1)(b-x)^3 + 3k(b-a)(b-x)^2 + \\ + (b-a)^3 F(1-k), \quad P_2(x) = -(2k+1)(x-a)^3 + \\ + 3k(b-a)(x-a)^2 + (b-a)^3 F(1-k),$$

avec $k = \frac{x_1-x_0}{x_2-x_1} = \frac{x_3-x_2}{x_2-x_1}$, données dans [1].

3. On indiquera à présent un procédé de calcul des coefficients $\lambda_{j,i}$ de (5) pour m quelconque et pour $x_0, x_1, \dots, x_m$ également arbitraires. À des fins de commodité on prendra le coefficient ρ de l'expression de $P_m(x)$ égal à l'unité de sorte que $P_m(x) = (x-a)^m$. Si $\rho \neq 1$, on déduit de (2), (3), (4), (5) que les polynômes $P_i(x)$ s'obtiennent en multipliant par ρ les polynômes $P_i(x)$ obtenus dans l'hypothèse $\rho=1$.

Si l'on introduit la notation

$$(18) \quad \begin{cases} A_i(x) = \sum_{j=0}^i \lambda_{j,i} \frac{(x-a)^{i-j}}{(i-j)!} \quad (i=0, 1, \dots, m-1), \\ A_m(x) = P_m(x) = (x-a)^m, \end{cases}$$

alors (3) et (5) donnent

$$(19) \quad P_i(x) = A_i(x) - \sum_{j=i+1}^m \frac{(x_j-x_0)(x_j-x_1) \dots (x_j-x_{i-1})}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})} P_j(x).$$

Si de plus on désigne par $\pi_p(x)$ le polynome

$$(20) \quad \pi_p(x) = \prod_{s=0}^p (x-x_s),$$

alors

$$(21) \quad P_i(x) = \sum_{s=0}^{m-i} \frac{\pi'_{m-s}(x_{m-s})}{\pi'_{m-s}(x_i)} A_{m-s}(x), \quad (i=0, 1, \dots, m-1).$$

La relation (21) ressort de manière évidente si l'on remarque d'une part que (19) donne

$$P_{m-1}(x) = A_{m-1}(x) - \frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1) \dots (x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})} P_m(x) = \\ = A_{m-1}(x) + \frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1) \dots (x_m-x_{m-1})}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})(x_{m-1}-x_m)} P_m(x) = \\ = A_{m-1}(x) + \frac{\pi'_m(x_m)}{\pi'_m(x_{m-1})} P_m(x),$$

de sorte que (21) a lieu pour $i=m-1$ (pour $i=m$ elle est évidente), et d'autre part que si l'on suppose que (21) a lieu pour $i=m, m-1, \dots, \dots, m-p$, alors la même relation (19) donne

116

$$\begin{aligned}
P_{m-p-1}(x) &= A_{m-p-1}(x) - \sum_{j=m-p}^m \frac{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{m-p-2})}{(x_{m-p-1} - x_0)(x_{m-p-1} - x_1) \dots (x_{m-p-1} - x_{m-p-2})} P_j(x) = \\
&= A_{m-p-1}(x) - \sum_{j=m-p}^m \frac{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{m-p-2})}{(x_{m-p-1} - x_0)(x_{m-p-1} - x_1) \dots (x_{m-p-1} - x_{m-p-2})} \sum_{s=0}^{m-j} \frac{\pi'_{m-s}(x_{m-s})}{\pi'_{m-s}(x_j)} A_{m-s}(x) = \\
&= A_{m-p-1}(x) - \sum_{s=0}^p A_{m-s}(x) \sum_{j=m-p}^{m-s} \frac{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{m-p-2})}{(x_{m-p-1} - x_0)(x_{m-p-1} - x_1) \dots (x_{m-p-1} - x_{m-p-2})} \frac{\pi'_{m-s}(x_{m-s})}{\pi'_{m-s}(x_j)},
\end{aligned}$$

de sorte que pour prouver que (21) a lieu pour $i = m - p - 1$, il suffit d'établir que

$$- \sum_{j=m-p}^{m-s} \frac{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{m-p-2})}{(x_{m-p-1} - x_0)(x_{m-p-1} - x_1) \dots (x_{m-p-1} - x_{m-p-2})} \frac{\pi'_{m-s}(x_{m-s})}{\pi'_{m-s}(x_j)} = \frac{\pi'_{m-s}(x_{m-s})}{\pi'_{m-s}(x_{m-p-1})}$$

Or, cette relation s'écrit

$$\sum_{j=m-p-1}^{m-s} \frac{1}{\pi'(x_j)} = 0, \text{ avec } \pi(x) = (x - x_{m-p-1})(x - x_{m-p}) \dots (x - x_{m-s})$$

et s'obtient pour $z_1 = x_{m-p-1}$, $z_2 = x_{m-p}$, ..., $z_n = z_{p-s+2} = x_{m-s}$ de la relation

$$(22) \quad \sum_{\sigma=1}^n \frac{1}{\pi'(z_\sigma)} = 0, \text{ avec } \pi(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

qui est une identité élémentaire bien connue.

L'on déduit donc de (21) et (18)

$$(23) \quad P_i(x) = \sum_{\sigma=0}^m C_{\sigma,i} \frac{(x-a)^\sigma}{\sigma!} \quad (i = 0, 1, \dots, m-1),$$

où

$$(24) \quad C_{\sigma,i} = \sum_{s=0}^{m-i} \lambda_{m-\sigma-s, m-s} \frac{\pi'_{m-s}(x_{m-s})}{\pi'_{m-s}(x_i)},$$

à la condition de remplacer $\lambda_{m-\sigma-s, m-s}$ par zéro quand $m - \sigma - s < 0$. Les relations (2), (3) et (23) donnent par conséquent

9

$$(25) \quad \begin{cases} S_{i,i}(x) = - \sum_{j=i+1}^m \frac{(x-a)^\sigma}{\sigma!} \sum_{\sigma=0}^m C_{\sigma,j} = - \sum_{\sigma=0}^m \frac{(x-a)^\sigma}{\sigma!} \sum_{j=i+1}^m C_{\sigma,j}, \\ S_{s,i}(x) = - \sum_{\sigma=0}^m \frac{(x-a)^\sigma}{\sigma!} \sum_{j=i+1}^m \frac{(x_j - x_{i-1})(x_j - x_{i-2}) \dots (x_j - x_{i-s+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-2}) \dots (x_i - x_{i-s+1})} C_{\sigma,j}, \\ S_{i+1,i}(x) = - \sum_{\sigma=0}^m \frac{(x-a)^\sigma}{\sigma!} \sum_{j=i+1}^m \frac{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{i-1})}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})} C_{\sigma,j}. \end{cases}$$

On déduit donc de (4) et de (25) (dans laquelle on remplace l'indice j par μ et l'on fait ensuite $s = i - j$)

$$\begin{aligned}
\lambda_{j,i} = \sup_{x \in I} & \left[- \sum_{\sigma=0}^m \frac{((x-a)^\sigma)^{(i-j)}}{\sigma!} \sum_{\mu=i+1}^m \frac{(x_\mu - x_{i-1})(x_\mu - x_{i-2}) \dots (x_\mu - x_{j+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-2}) \dots (x_i - x_{j+1})} C_{\sigma,\mu} + \right. \\
& + \sum_{\sigma=0}^m \frac{((x-a)^\sigma)^{(i-j)}}{\sigma!} \sum_{\mu=i+1}^m \frac{(x_\mu - x_{i-1})(x_\mu - x_{i-2}) \dots (x_\mu - x_0)}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-2}) \dots (x_i - x_0)} C_{\sigma,\mu} - \\
& \left. - \sum_{\mu=0}^{j-1} \lambda_{\mu,i} \frac{(x-a)^{j-\mu}}{(j-\mu)!} \right],
\end{aligned}$$

à la condition de remplacer au cas $j = i - 1$ l'expression

$$\frac{(x_\mu - x_{i-1})(x_\mu - x_{i-2}) \dots (x_\mu - x_{j+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-2}) \dots (x_i - x_{j+1})}$$

par 1. Si l'on introduit la notation

$$\frac{(x_\mu - x_j)(x_\mu - x_{j-1}) \dots (x_\mu - x_0)}{(x_i - x_j)(x_i - x_{j-1}) \dots (x_i - x_0)} - 1 = \frac{(x_\mu - x_i)I(x_\mu, x_i; x_j, x_{j-1}, \dots, x_0)}{(x_i - x_j)(x_i - x_{j-1}) \dots (x_i - x_0)},$$

de sorte que

$$(26) \quad I(x_\mu, x_i; x_j, x_{j-1}, \dots, x_0) = \frac{(x_\mu - x_j)(x_\mu - x_{j-1}) \dots (x_\mu - x_0) - (x_i - x_j)(x_i - x_{j-1}) \dots (x_i - x_0)}{x_\mu - x_i}$$

l'on remplace dans l'expression ci-dessus de $\lambda_{j,i}$, $C_{\sigma,\mu}$ par son expression (24) et l'on tient compte que

$$\sum_{\mu=i+1}^m \sum_{s=0}^{m-\mu} C_{s,\mu} = \sum_{s=0}^{m-i-1} \sum_{\mu=i+1}^{m-s} C_{s,\mu},$$

alors on a

$$\lambda_{j,i} = \sup_{x \in I} \left[\sum_{\sigma=0}^m \frac{((x-a)^\sigma)^{(i-j)}}{\sigma!} \sum_{s=0}^{m-i-1} \lambda_{m-\sigma-s, m-s} \pi'_{m-s}(x_{m-s}) \times \right.$$

$$\times \sum_{\mu=i+1}^{m-s} \frac{(x_{\mu}-x_i)(x_{\mu}-x_{i-1}) \dots (x_{\mu}-x_{j+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-2}) \dots (x_i-x_0)} \frac{I(x_{\mu}, x_i; x_j, x_{j-1}, \dots, x_0)}{\pi'_{m-s}(x_{\mu})} - \sum_{\mu=0}^{j-1} \lambda_{\mu,i} \frac{(x-a)^{j-\mu}}{(j-\mu)!} \Big], \quad (j=0, 1, \dots, i-1),$$

$$\lambda_{i,i} = \sup_{x \in I} \left[\sum_{\sigma=0}^m \frac{(x-a)^{\sigma}}{\sigma!} \sum_{s=0}^{m-i-1} \lambda_{m-\sigma-s, m-s} \pi'_{m-s}(x_{m-s}) \times \sum_{\mu=i+1}^{m-s} \frac{(x_{\mu}-x_{i-1})(x_{\mu}-x_{i-2}) \dots (x_{\mu}-x_0)}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-2}) \dots (x_i-x_0) \pi'_{m-s}(x_{\mu})} - \sum_{\mu=0}^{i-1} \lambda_{\mu,i} \frac{(x-a)^{i-\mu}}{(i-\mu)!} \right],$$

c'est-à-dire

$$(27) \quad \lambda_{j,i} = \sup_{x \in I} \left[\sum_{\sigma=0}^m \frac{((x-a)^{\sigma})^{(i-j)}}{\sigma!} \sum_{s=0}^{m-i-1} \lambda_{m-\sigma-s, m-s} \times \frac{(x_{m-s}-x_0)(x_{m-s}-x_1) \dots (x_{m-s}-x_{m-s-1})}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})} a_{j,i,s} - \sum_{\mu=0}^{j-1} \lambda_{\mu,i} \frac{(x-a)^{j-\mu}}{(j-\mu)!} \right],$$

$$(28) \quad \lambda_{i,i} = \sup_{x \in I} \left[\sum_{\sigma=0}^m \frac{(x-a)^{\sigma}}{\sigma!} \sum_{s=0}^{m-i-1} \lambda_{m-\sigma-s, m-s} \times \frac{(x_{m-s}-x_0)(x_{m-s}-x_1) \dots (x_{m-s}-x_{m-s-1})}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})} b_{i,s} - \sum_{\mu=0}^{i-1} \lambda_{\mu,i} \frac{(x-a)^{i-\mu}}{(i-\mu)!} \right],$$

où

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{j,i,s} &= \frac{I(x_{i+1}, x_i; x_j, x_{j-1}, \dots, x_0)}{(x_{i+1}-x_0)(x_{i+1}-x_1) \dots (x_{i+1}-x_j)(x_{i+1}-x_{i+2})(x_{i+1}-x_{i+3}) \dots (x_{i+1}-x_{m-s})} + \\ &+ \sum_{\mu=i+2}^{m-s} \frac{I(x_{\mu}, x_i; x_j, x_{j-1}, \dots, x_0)}{(x_{\mu}-x_0)(x_{\mu}-x_1) \dots (x_{\mu}-x_j)(x_{\mu}-x_{i+1})(x_{\mu}-x_{i+2}) \dots (x_{\mu}-x_{\mu-1})} \times \\ &\times \frac{1}{(x_{\mu}-x_{\mu+1})(x_{\mu}-x_{\mu+2}) \dots (x_{\mu}-x_{m-s})}, \\ b_{i,s} &= \sum_{\mu=i+1}^{m-s} \frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_{\mu}-x_i)(x_{\mu}-x_{i+1}) \dots (x_{\mu}-x_{\mu-1})} \times \\ &\times \frac{1}{(x_{\mu}-x_{\mu+1})(x_{\mu}-x_{\mu+2}) \dots (x_{\mu}-x_{m-s})}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on tient compte de (22) et de (26), on a donc

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{j,i,s} &= (x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_j) \sum_{\mu=0}^j \frac{1}{(x_{\mu}-x_0)(x_{\mu}-x_1) \dots (x_{\mu}-x_{\mu-1})} \times \\ &\times \frac{1}{(x_{\mu}-x_{\mu+1})(x_{\mu}-x_{\mu+2}) \dots (x_{\mu}-x_j)(x_{\mu}-x_i)(x_{\mu}-x_{i+1}) \dots (x_{\mu}-x_{m-s})} = \\ &= -(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_j) \sum_{\mu=i}^{m-s} \frac{1}{(x_{\mu}-x_0)(x_{\mu}-x_1) \dots (x_{\mu}-x_j)} \times \\ &\times \frac{1}{(x_{\mu}-x_i)(x_{\mu}-x_{i+1}) \dots (x_{\mu}-x_{\mu-1})(x_{\mu}-x_{\mu+1})(x_{\mu}-x_{\mu+2}) \dots (x_{\mu}-x_{m-s})} \\ &\quad (j \geq 1) \\ a_{0,i,s} &= - \frac{1}{(x_0-x_{i+1})(x_0-x_{i+2}) \dots (x_0-x_{m-s})} \\ b_{i,s} &= - \frac{1}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2}) \dots (x_i-x_{m-s})} \end{aligned} \right. \quad (a), (b), (c), (d)$$

Avec cette expression de $b_{i,s}$, (28) s'écrit

$$(31) \quad \lambda_{i,i} = \sup_{x \in I} \left\{ - \left[\sum_{\sigma=0}^m \frac{(x-a)^{\sigma}}{\sigma!} \sum_{s=0}^{m-i-1} \frac{(x_{m-s}-x_0)(x_{m-s}-x_1) \dots (x_{m-s}-x_{m-s-1})}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})} \times \right. \right. \\ \left. \times \frac{1}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2}) \dots (x_i-x_{m-s})} \lambda_{m-\sigma-s, m-s} + \right. \\ \left. + \sum_{\mu=0}^{i-1} \lambda_{\mu,i} \frac{(x-a)^{i-\mu}}{(i-\mu)!} \right] \Big\}.$$

Dans les expressions (27) et (31) on respecte, ainsi qu'il a été mentionné, la convention introduite dans la relation (24). On a dans ce cas, si l'on remplace dans la somme double de (27) les indices σ et s par les indices $\mu = \sigma + j - i$ et $\varphi = m + j - i - \mu - s$ et l'on fait le changement (7)

$$(32) \quad \lambda_{j,i} = \sup_{u \in [0,1]} \left[\sum_{\mu=0}^{m+j-1} \frac{(b-a)^{\mu} u^{\mu}}{\mu!} \times \sum_{\varphi=F(j+1-\mu)}^{m+j-i-\mu} \frac{(x_{i-j+\mu+\varphi}-x_0)(x_{i-j+\mu+\varphi}-x_1) \dots (x_{i-j+\mu+\varphi}-x_{i-j+\mu+\varphi-1})}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})} \times \right. \\ \left. \times a_{j,i,m+j-i-\mu-\varphi} \lambda_{\varphi,i-j+\mu+\varphi} - \sum_{\mu=1}^j \lambda_{j-\mu,i} \frac{(b-a)^{\mu}}{\mu!} u^{\mu} \right] \\ (j=0, 1, \dots, i-1),$$

où $a_{j,i,m+j-i-\mu-\varphi}$ est donné par (29) ou (30) (où l'on remplace l'indice μ par σ):

$$\begin{aligned}
 a_{j,i,m+j-i-\mu-\varphi} &= \frac{I(x_{i+1}, x_i, x_j, x_{j-1}, \dots, x_0)}{(x_{i+1} - x_0)(x_{i+1} - x_1) \dots (x_{i+1} - x_j)} \times \\
 &\quad \times \frac{1}{(x_{i+1} - x_{i+2})(x_{i+1} - x_{i+3}) \dots (x_{i+1} - x_{i-j+\mu+\varphi})} + \\
 &\quad + \sum_{\sigma=i+2}^{i-j+\mu+\varphi} \frac{I(x_\sigma, x_i, x_j, x_{j-1}, \dots, x_0)}{(x_\sigma - x_0)(x_\sigma - x_1) \dots (x_\sigma - x_j)(x_\sigma - x_{i+1})(x_\sigma - x_{i+2}) \dots} \times \\
 &\quad \times \frac{1}{(x_\sigma - x_{\sigma-1})(x_\sigma - x_{\sigma+1})(x_\sigma - x_{\sigma+2}) \dots (x_\sigma - x_{i-j+\mu+\varphi})} = \\
 &= (x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_j) \sum_{\sigma=0}^i \frac{1}{(x_\sigma - x_0)(x_\sigma - x_1) \dots (x_\sigma - x_{\sigma-1})} \times \\
 &\quad \times \frac{1}{(x_\sigma - x_{\sigma+1})(x_\sigma - x_{\sigma+2}) \dots (x_\sigma - x_j)(x_\sigma - x_{i+1})(x_\sigma - x_{i+2}) \dots} \times \\
 &\quad \times \frac{1}{\dots (x_\sigma - x_{i-j+\mu+\varphi})} = \\
 &= -(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_j) \sum_{\sigma=i}^{i-j+\mu+\varphi} \frac{1}{(x_\sigma - x_0)(x_\sigma - x_1) \dots (x_\sigma - x_j)(x_\sigma - x_i)} \times \\
 &\quad \times \frac{1}{(x_\sigma - x_{i+1}) \dots (x_\sigma - x_{\sigma-1})(x_\sigma - x_{\sigma+1})(x_\sigma - x_{\sigma+2}) \dots (x_\sigma - x_{i-j+\mu+\varphi})} \quad (j \geq 1) \\
 &= - \frac{1}{(x_0 - x_{i+1})(x_0 - x_{i+2}) \dots (x_0 - x_{i+\mu+\varphi})} \quad (d)
 \end{aligned}$$

Si, à des fins d'uniformité de notation, l'on remplace de même dans (31) les indices σ et s par les indices $\mu = \sigma$ et $\varphi = m - \mu - s$, l'on obtient

$$\begin{aligned}
 \lambda_{i,i} &= \sup_{u \in [0,1]} \left\{ - \left[\sum_{\mu=0}^m \frac{(b-a)^\mu u^\mu}{\mu!} \times \right. \right. \\
 (34) \times &\quad \sum_{\varphi=F(i+1-\mu)}^{m-\mu} \frac{(x_{\mu+\varphi} - x_0)(x_{\mu+\varphi} - x_1) \dots (x_{\mu+\varphi} - x_{\mu+\varphi-1})}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2}) \dots (x_i - x_{\mu+\varphi})} \lambda_{\varphi,\mu+\varphi} + \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{\mu=1}^i \lambda_{i-\mu,s} \frac{(b-a)^\mu}{\mu!} u^\mu \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Dans les expressions (32) et (34) la fonction $F(x)$ est la fonction définie dans (8) et l'on respecte la convention de (4), c'est-à-dire au cas où $j = 0$ dans (32) et $i = 0$ dans (34), les sommes simples se remplacent par zéro. Pour le calcul de $a_{j,i,m+j-i-\mu-\varphi}$ on peut utiliser une quelconque des expressions (33), respectivement (29) ou (30), selon que les valeurs numériques de i, j, μ, φ rendent plus commode pour le calcul l'une ou l'autre de ces expressions.

D'ailleurs si l'on désigne par $\pi_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x)$ le produit $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ et par $\left[\frac{x_1, x_2, \dots, x_p}{x_1, x_2, \dots, x_n}; f \right]$ la somme

$$\sum_{s=1}^p \frac{f(x_s)}{\pi'_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_s)} \quad (p \leq n-1), \text{ il est évident que}$$

$$\left[\frac{x_1, x_2, \dots, x_p}{x_1, x_2, \dots, x_n}; f \right] = \frac{1}{x_1 - x_2} \left(\left[\frac{x_1, x_2, \dots, x_p}{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}}; f \right] - \left[\frac{x_2, x_3, \dots, x_p}{x_2, x_3, \dots, x_n}; f \right] \right),$$

de sorte que si l'on fait $f(x) \equiv 1$, on obtient la relation

$$\sum_{s=1}^p \frac{1}{\pi'_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_s)} = \frac{1}{x_1 - x_n} \left[\sum_{s=1}^p \frac{1}{\pi'_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}}(x_s)} - \sum_{s=2}^p \frac{1}{\pi'_{x_2, x_3, \dots, x_n}(x_s)} \right],$$

qu'on peut utiliser pour le calcul des expressions (33) (b) et (c).

Ainsi qu'il a été rappelé ci-dessus, dans (32) et (34) interviennent les expressions $\lambda_{0,m}, \lambda_{1,m}, \dots, \lambda_{m,m}$.

On prendra

$$(35) \quad \lambda_{0,m} = m!, \quad \lambda_{i,m} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Avec ces valeurs et avec la convention $S_{m+1,m}(x) \equiv 0$, (5) donne la valeur $(x-a)^m$ adoptée pour $P_m(x)$, tandis que dans l'expression (32) on peut diminuer d'une unité si $\mu < m + j - i$, la limite supérieure de sommation de la somme $\sum_{\varphi}$, parce que si $\mu \leq m + j - i - 1$, alors pour $\varphi = m + j - i - \mu \geq 1$ on a $\lambda_{\varphi,i-j+\mu+\varphi} = \lambda_{\varphi,m} = 0$, de sorte que (32) peut s'écrire

$$\begin{aligned}
 (36) \quad \lambda_{j,i} &= \sup_{u \in [0,1]} \left[m(m-1) \dots (m+j-i-1) \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1) \dots (x_m - x_{m-1})}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})} \times \right. \\
 &\quad \times a_{j,i,0} (b-a)^{m+j-i} u^{m+j-i} + \sum_{\mu=0}^{m+j-i-1} \frac{(b-a)^\mu u^\mu}{\mu!} \times \\
 &\quad \times \sum_{\varphi=F(j+1-\mu)}^{m+j-i-\mu-1} \frac{(x_{i-j+\mu+\varphi} - x_0)(x_{i-j+\mu+\varphi} - x_1) \dots (x_{i-j+\mu+\varphi} - x_{i-j+\mu+\varphi-1})}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})} \times \\
 &\quad \left. \times a_{j,i,m+j-i-\mu-\varphi} \lambda_{\varphi,i-j+\mu+\varphi} - \sum_{\mu=1}^j \lambda_{j-\mu,i} \frac{(b-a)^\mu}{\mu!} u^\mu \right] \\
 &\quad (j = 0, 1, \dots, i-1).
 \end{aligned}$$

Ces mêmes valeurs permettent de réduire, si $\mu \leq m-1$, d'une unité la limite supérieure de sommation dans la somme $\sum_{\varphi}$ de (34)

$$(37) \lambda_{i,i} = \sup_{u \in [0,1]} \left\{ - \left[\frac{(b-a)^m}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2}) \dots (x_i-x_m)} u^m + \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{(b-a)^{\mu} u^{\mu}}{\mu!} \sum_{\varphi=F(i+1-\mu)}^{m-\mu-1} \frac{(x_{\mu+\varphi}-x_0)(x_{\mu+\varphi}-x_1) \dots (x_{\mu+\varphi}-x_{\mu+\varphi-1})}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2}) \dots (x_i-x_{\mu+\varphi})} \lambda_{\varphi, \mu+\varphi} + \sum_{\mu=1}^i \lambda_{i-\mu,i} \frac{(b-a)^{\mu}}{\mu!} u^{\mu} \right] \right\}.$$

Dans (36) et (37) au cas où $i = m-1$, les sommes doubles manquent, vu qu'on a respectivement dans (32) et (34)

$$0 \leq j+1-\mu = F(j+1-\mu) = m+j-i-\mu \text{ et} \\ 0 \leq i+1-\mu = F(i+1-\mu) = m-\mu.$$

De même, ainsi qu'il a été spécifié relativement aux expressions (32) et (34), si dans (36) $j=0$ ou dans (37) $i=0$, les sommes simples manquent dans ces expressions. (36) et (30) (b) donnent donc

$$(38) \lambda_{j,m-1} = \sup_{u \in [0,1]} \left[m(m-1) \dots (j+2) \left(\frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1) \dots (x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})} - \frac{(x_m-x_{j+1})(x_m-x_{j+2}) \dots (x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_{j+1})(x_{m-1}-x_{j+2}) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})} \right) (b-a)^{j+1} u^{j+1} - \sum_{\mu=1}^j \lambda_{j-\mu,m-1} \frac{(b-a)^{\mu}}{\mu!} u^{\mu} \right] (0 \leq j \leq m-2),$$

à la condition de remplacer au cas où $j = m-2$ l'expression

$$\frac{(x_m-x_{j+1})(x_m-x_{j+2}) \dots (x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_{j+1})(x_{m-1}-x_{j+2}) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})}$$

par 1 et au cas où $j=0$ la somme simple par zéro.

$$(39) \lambda_{m-1,m-1} = \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1) \dots (x_m-x_{m-2})(b-a)^m}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})} u^m - \sum_{\mu=1}^{m-1} \lambda_{m-1-\mu,m-1} \frac{(b-a)^{\mu}}{\mu!} u^{\mu} \right].$$

D'ailleurs si l'on calcule à l'aide de (2), (3) et (4) $\lambda_{j,m-1}$ ($j=0, 1, \dots, m-1$), l'on obtient les expressions (38) et (39).

Les relations (36), (37), (18), (21) et (1) constituent le procédé proposé pour la détermination du polynôme $P(x)$ de (1). (36) et (37) donnent $\lambda_{j,i}$ ($j \leq i-1$), respectivement $\lambda_{i,i}$ à l'aide de $\lambda_{0,p}, \lambda_{1,p}, \dots, \lambda_{p,p}$ ($p = m-1, m-2, \dots, i+1$) et de $\lambda_{0,i}, \lambda_{1,i}, \dots, \lambda_{j-1,i}$, respectivement $\lambda_{0,i}, \lambda_{1,i}, \dots, \lambda_{i-1,i}$.

Si l'on a les coefficients $\lambda_{j,i}$ ($j=0, 1, \dots, i$) ($i = m, m-1, \dots, 0$) (18) et (21) donnent les polynômes $P_i(x)$ ($i = m, m-1, \dots, 0$), puis (1) le polynôme $P(x)$ en question

4. On fera quelques remarques à propos du procédé indiqué.

1°. Les relations (38) et (39) donnent immédiatement l'expression explicite de $\lambda_{j,m-1}$ ($j=0, 1, \dots, m-1$). On déduit à cet effet de (38) et de (9) (c) que si $\lambda_{s,m-1} \geq 0$ ($s=0, 1, \dots, j-1$), alors $\lambda_{j,m-1}$ est également non-négatif. Or, la même relation (38) donne

$$(40) \lambda_{0,m-1} = m! \frac{(x_m-x_1)(x_m-x_2) \dots (x_m-x_{m-1})}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})} (b-a) > 0,$$

de sorte que $\lambda_{j,m-1} \geq 0$ ($j=0, 1, \dots, m-2$), auquel cas (38) et (9) (c) donnent

$$(41) \lambda_{j,m-1} = F \left[m(m-1) \dots (j+2) \left(\frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1) \dots (x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})} - \frac{(x_m-x_{j+1})(x_m-x_{j+2}) \dots (x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_{j+1})(x_{m-1}-x_{j+2}) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})} \right) (b-a)^{j+1} - \sum_{\mu=0}^{j-1} \lambda_{\mu,m-1} \frac{(b-a)^{j-\mu}}{(j-\mu)!} \right],$$

avec la convention adoptée dans (38) relativement aux valeurs $j=0$ et $j=m-2$, tandis que (39) et (9) (c) donnent

$$(42) \lambda_{m-1,m-1} = F \left[\frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1) \dots (x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})} (b-a)^m - \sum_{\mu=0}^{m-2} \lambda_{\mu,m-1} \frac{(b-a)^{m-1-\mu}}{(m-1-\mu)!} \right].$$

À l'aide de (41) et (42) on peut calculer successivement

$$\lambda_{1,m-1}, \lambda_{2,m-1}, \dots, \lambda_{m-1,m-1}.$$

On a ainsi, par exemple,

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_{1,m-1} &= \\ &= \frac{m!}{2!} (b-a)^2 \frac{(x_m - x_2)(x_m - x_3) \dots (x_m - x_{m-1})}{(x_{m-1} - x_0)(x_{m-1} - x_1) \dots (x_{m-1} - x_{m-2})} F(x_1 + x_{m-1} - x_0 - x_m), \\ &\quad (m \geq 3), \\ \lambda_{2,m-1} &= \frac{m!}{3!} (b-a)^3 \frac{(x_m - x_3)(x_m - x_4) \dots (x_m - x_{m-2})}{(x_{m-1} - x_0)(x_{m-1} - x_1) \dots (x_{m-1} - x_{m-2})} \times \\ &\quad \times F[-(x_m - x_{m-1})(x_{m-1} + 2x_m) - (x_0 + x_1 + x_2)x_{m-1} + \\ &\quad + (-x_0 + 2x_1 + 2x_2)x_m + x_0x_1 + x_0x_2 - 2x_1x_2 - \\ &\quad - 3(x_m - x_2)F(x_1 + x_{m-1} - x_0 - x_m)], \quad (m \geq 5) \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite

2° En particulier (41) donne avec $m = 3$, $j = 0$ et $j = 1$, les expressions de $\lambda_{0,2}$ et $\lambda_{1,2}$ de (6) et (10); (42) avec $m = 3$ l'expression de $\lambda_{2,2}$ de (11); (36) avec $m = 3$, $j = 0$ et $i = 1$ l'expression de $\lambda_{0,1}$ de (13); (37) avec $m = 3$, $i = 1$ l'expression de $\lambda_{1,1}$ de (14) et avec $m = 3$, $i = 0$ l'expression de $\lambda_{0,0}$ de (15).

3° On déduira encore de (36) la relation qui donne $\lambda_{j,m-2}$ ($j = 0, 1, \dots, m-4$; au cas où $j = m-3$, l'expression subit de légères modifications).

$$(44) \quad \lambda_{j,m-2} = \sup_{u \in [0,1]} \left\{ m(m-1) \dots (j+3) \times \right. \\ \times \left[\frac{-(x_m - x_0)(x_m - x_1) \dots (x_m - x_{m-3})(x_m - x_{m-1})}{(x_{m-2} - x_0)(x_{m-2} - x_1) \dots (x_{m-2} - x_{m-3})(x_{m-1} - x_{m-2})} + \right. \\ \left. + \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1) \dots (x_m - x_{m-2})}{(x_{m-1} - x_0)(x_{m-1} - x_1) \dots (x_{m-1} - x_j)(x_{m-1} - x_{m-2})(x_{m-2} - x_{j+1})(x_{m-2} - x_{j+2}) \dots (x_{m-2} - x_{m-3})} \right. \\ \left. - \frac{(x_m - x_{j+1})(x_m - x_{j+2}) \dots (x_m - x_{m-3})}{(x_{m-2} - x_{j+1})(x_{m-2} - x_{j+2}) \dots (x_{m-2} - x_{m-3})} \right] (b-a)^{j+2} u^{j+2} + \\ + \sum_{\mu=0}^{j+1} \left[\frac{(x_{m-1} - x_0)(x_{m-1} - x_1) \dots (x_{m-1} - x_{m-3})}{(x_{m-2} - x_0)(x_{m-2} - x_1) \dots (x_{m-2} - x_{m-3})} - \right. \\ \left. - \frac{(x_{m-1} - x_{j+1})(x_{m-1} - x_{j+2}) \dots (x_{m-1} - x_{m-3})}{(x_{m-2} - x_{j+1})(x_{m-2} - x_{j+2}) \dots (x_{m-2} - x_{m-3})} \right] \times \\ \times F[m(m-1) \dots (j+3-\mu) \left(\frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1) \dots (x_m - x_{m-2})}{(x_{m-1} - x_0)(x_{m-1} - x_1) \dots (x_{m-1} - x_{m-2})} - \right.$$

$$- \frac{(x_m - x_{j+2-\mu})(x_m - x_{j+3-\mu}) \dots (x_m - x_{m-2})}{(x_{m-1} - x_{j+2-\mu})(x_{m-1} - x_{j+3-\mu}) \dots (x_{m-1} - x_{m-2})} (b-a)^{j+1-\mu} - \\ - \sum_{\sigma=0}^{j-\mu} \lambda_{\sigma,m-1} \frac{(b-a)^{j+1-\mu-\sigma}}{(j+1-\mu-\sigma)!} \left[\frac{(b-a)^\mu u^\mu}{\mu!} - \sum_{\mu=1}^j \lambda_{j-\mu,m-2} (b-a)^\mu \frac{u^\mu}{\mu!} \right].$$

5. Dans le dernier paragraphe de la note, on donnera l'expression explicite de $P(x)$ de (1) au cas particulier où les noeuds sont équidistants, c'est-à-dire où

$$x_s = x_0 + ls \quad (s = 0, 1, \dots, m; l > 0).$$

À cet effet, on prouvera d'abord que

$$(45) \quad \lambda_{0,i} = \frac{m!}{(m-i)!} (b-a)^{m-i}; \quad \lambda_{j,i} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, i)$$

$$(i = m, m-1, \dots, 0).$$

La démonstration des relations (45) est immédiate. On supposera que ces relations ont lieu pour $i = m-1, m-2, \dots, m-p$ ($1 \leq p \leq m-1$). En ce cas (36) donne

$$(46) \quad \lambda_{j,m-p-1} = (b-a)^{j+p+1} \sup_{u \in [0,1]} \left[m(m-1) \dots (j+p+2) m(m-1) \times \right. \\ \times \dots (m-p) l^{p+1} a_{j,m-p-1,0} u^{j+p+1} + \\ + \sum_{\mu=j+1}^{j+p} (m-p+\mu-j-1)(m-p+\mu-j-2) \dots \\ \dots (m-p) \frac{m!}{(p+j+1-\mu)!} l^{\mu-j} a_{j,m-p-1,p+j+1-\mu} \frac{u^\mu}{\mu!} - \\ \left. - \frac{1}{(b-a)^{j+p+1}} \sum_{\mu=0}^{j-1} \lambda_{\mu,m-p-1} \frac{(b-a)^{j-\mu}}{(j-\mu)!} u^{j-\mu} \right], \\ (0 \leq j \leq m-p-2).$$

Or, (30) (b) donne

$$(47) \quad a_{j,i,s} = (-1)^{m-s-1} \frac{i(i-1) \dots (i-j)}{i^{m-s-i}} \sum_{\mu=i}^{m-s} \frac{(-1)^\mu}{(\mu-i)!(m-s-\mu)! \mu(\mu-1) \dots (\mu-j)} = \\ = (-1)^{m-s-i+1} \frac{i(i-1) \dots (i-j)}{(m-s-i)! i^{m-s-i}} \sum_{\alpha=0}^{m-s-i} \frac{(-1)^\alpha C_{m-s-i}^\alpha}{(\alpha+i-j)(\alpha+i-j+1) \dots (\alpha+i)}$$

Nous allons nous servir de la relation

$$(48) \quad \sum_{\alpha=0}^M (-1)^\alpha \frac{C_M^\alpha}{(\alpha+h)(\alpha+h+1)\dots(\alpha+h+\lambda)} = \frac{(h-1)!}{\lambda!(M+\lambda+1)(M+\lambda+2)\dots(M+\lambda+h)} =$$

$$(M, h, \lambda \text{ entiers}; M \geq 0, h \geq 1, \lambda \geq 0),$$

dont la démonstration est immédiate, si dans la relation

$$\int_0^x \sigma^{h-1} (1-\sigma)^M d\sigma = \sum_{\alpha=0}^M (-1)^\alpha C_M^\alpha \frac{x^{\alpha+h}}{\alpha+h}$$

on fait $x = \varphi$ et l'on intègre ensuite les expressions obtenues par rapport à φ entre 0 et x :

$$\int_0^x d\varphi \int_0^\varphi \sigma^{h-1} (1-\sigma)^M d\sigma = \int_0^x \sigma^{h-1} (1-\sigma)^M d\sigma \int_\sigma^x d\varphi =$$

$$= \int_0^x (x-\sigma) \sigma^{h-1} (1-\sigma)^M d\sigma = \sum_{\alpha=0}^M (-1)^\alpha C_M^\alpha \frac{x^{\alpha+h+1}}{(\alpha+h)(\alpha+h+1)}.$$

Si l'on fait dans la relation obtenue $x = \varphi$ et l'on intègre ensuite les expressions obtenues par rapport à φ entre 0 et x , il vient

$$\sum_{\alpha=0}^M (-1)^\alpha C_M^\alpha \frac{x^{\alpha+h+2}}{(\alpha+h)(\alpha+h+1)(\alpha+h+2)} = \int_0^x \sigma^{h-1} (1-\sigma)^M \frac{(x-\sigma)^2}{2!} d\sigma.$$

En continuant le procédé, on obtient la relation

$$\sum_{\alpha=0}^M (-1)^\alpha C_M^\alpha \frac{x^{\alpha+h+\lambda}}{(\alpha+h)(\alpha+h+1)\dots(\alpha+h+\lambda)} = \int_0^x \sigma^{h-1} (1-\sigma)^M \frac{(x-\sigma)^\lambda}{\lambda!} d\sigma,$$

qui donne pour $x = 1$

$$(49) \quad \sum_{\alpha=0}^M \frac{(-1)^\alpha C_M^\alpha}{(\alpha+h)(\alpha+h+1)\dots(\alpha+h+\lambda)} = \frac{1}{\lambda!} \int_0^1 \sigma^{h-1} (1-\sigma)^{M+\lambda} d\sigma.$$

Or,

$$\int_0^1 \sigma^{h-1} (1-\sigma)^{M+\lambda} d\sigma = \frac{h-1}{M+\lambda+1} \int_0^1 \sigma^{h-2} (1-\sigma)^{M+\lambda+1} d\sigma \quad (h \geq 2).$$

Si l'on remplace dans cette relation h par $h-p$, λ par $\lambda+p$ puis qu'on fasse $p = 0, 1, \dots, h-2$, on obtient la valeur de

$$\int_0^1 \sigma^{h-1} (1-\sigma)^{M+\lambda} d\sigma, *$$

ce qui donne avec (49) la relation (48). Si l'on y fait $M = m-s-i$, $h = i-j$, $\lambda = j$, il vient à l'aide de (47)

$$(50) \quad a_{j,i,s} = \frac{(-1)^{m-s-i+1}}{i^{m-s-i}} \frac{i!}{j!} \frac{1}{(m-s-i)!(m-s-i+j+1)(m-s-i+j+2)\dots(m-s)}$$

auquel cas (46) s'écrit (en faisant dans la première somme $\mu = \sigma + j$)

$$\lambda_{j,m-p-1} = \frac{m!}{(p+j+1)!} (b-a)^{p+j+1} \sup_{u \in [0,1]} \left[-C_{p+j+1}^j u^j \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{\sigma=1}^{p+1} (-1)^\sigma C_{p+1}^\sigma u^\sigma - \frac{(p+j+1)!}{m!(b-a)^{p+j+1}} \sum_{\mu=0}^{j-1} \lambda_{\mu,m-p-1} \frac{(b-a)^{j-\mu}}{(j-\mu)!} u^{j-\mu} \right],$$

donc, conformément à la formule du binôme

$$(51) \quad \lambda_{j,m-p-1} = \frac{m!}{(p+j+1)!} (b-a)^{p+j+1} \sup_{u \in [0,1]} \left\{ C_{p+j+1}^j u^j [1 - (1-u)^{p+1}] - \right.$$

$$\left. - \frac{(p+j+1)!}{m!(b-a)^{p+j+1}} \sum_{\mu=0}^{j-1} \lambda_{\mu,m-p-1} \frac{(b-a)^{j-\mu}}{(j-\mu)!} u^{j-\mu} \right\},$$

de sorte que

$$(52) \quad \lambda_{0,m-p-1} = \frac{m!}{(p+1)!} (b-a)^{p+1}$$

et

$$\lambda_{1,m-p-1} = \frac{m!}{(p+1)!} (b-a)^{p+2} \sup_{u \in [0,1]} [-u(1-u)^{p+1}] = 0.$$

Si

$$\lambda_{j,m-p-1} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, j_1 \leq m-p-3),$$

alors (51) et (52) donnent

$$\lambda_{j_1+1,m-p} = \frac{m!}{(p+1)(j_1+1)!} (b-a)^{p+j_1+2} \sup_{u \in [0,1]} [-u^{j_1+1} (1-u)^{p+1}] = 0$$

Par conséquent

* Au cas où $h = 1$, la valeur de l'intégrale obtenue directement coïncide avec la valeur obtenue en faisant $h = 1$, dans l'expression obtenue.

$$(53) \quad \lambda_{j,m-p-1} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m-p-2).$$

La relation (37) donne à l'aide de (45) (qui est vraie par hypothèse pour $i = m, m-1, \dots, m-p$) et de (52) et (53)

$$(54) \quad \lambda_{m-p-1,m-p-1} = C_m^{p+1} (b-a)^m \sup_{u \in [0,1]} \left\{ -u^{m-p-1} \left[1 + \sum_{\mu=m-p}^{m-1} (-1)^{p+1-m+\mu} C_{p+1}^{m-\mu} u^{p+1-m+\mu} + (-1)^{p+1} u^{p+1} \right] \right\} = \\ = C_m^{p+1} (b-a)^m \sup_{u \in [0,1]} \left[-u^{m-p-1} (1-u)^{p+1} \right] = 0.$$

Or, (41) donne

$$\lambda_{j,m-1} = F \left[m(m-1) \dots (j+1) (b-a)^{j+1} - \sum_{\mu=0}^{j-1} \lambda_{\mu,m-1} \frac{(b-a)^{j-\mu}}{(j-\mu)!} \right],$$

de sorte que $\lambda_{0,m-1} = m!(b-a)$ et $\lambda_{1,m-1} = 0$. Si donc $\lambda_{j,m-1} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, j_1 \leq m-3$), alors la relation ci-dessus donne $\lambda_{j+1,m-1} = 0$, de sorte que $\lambda_{j,m-1} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, m-2$), auquel cas (42) donne

$\lambda_{m-1,m-1} = 0$. Ainsi donc, les relations (45) ont lieu pour $i = m-1$ (pour $i = m$ elles sont réduites évidentes par (35)). Or, (53) et (54) attestent que si (45) ont lieu pour $i = m-1, m-2, \dots, m-p$, elles ont lieu aussi pour $i = m-p-1$, ce qui prouve que ces relations ont lieu pour toutes les valeurs $m, m-1, \dots, 0$ de cet indice.

On déduit donc de (18), (45) et (21)

$$(55) \quad P_i(x) = (-1)^i \frac{m!}{i!} \sum_{\sigma=i}^m (-1)^\sigma \frac{(b-a)^{m-\sigma} (x-a)^\sigma}{(\sigma-i)! (m-\sigma)!} = \\ = C_m^i (x-a)^i (b-x)^{m-i}, \quad (i = 0, 1, \dots, m-1).$$

On peut remarquer que (55) donne aussi pour $i = m$ la valeur $P_m(x) = (x-a)^m$ adoptée. Les relations (1) et (55) donnent donc

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} P(x) &= \sum_{\sigma=0}^m a_\sigma (x-a)^\sigma, \\ a_\sigma &= (-1)^\sigma \frac{m!}{(m-\sigma)!} (b-a)^{m-\sigma} \sum_{i=0}^{\sigma} \frac{(-1)^i f(x_i)}{i! (\sigma-i)!} \end{aligned} \right.$$

Le polynôme de Bernstein de degré m relatif à l'intervalle $[a, b]$ a l'expression

$$B_m(x) = \frac{1}{(b-a)^m} \sum_{\varphi=0}^m C_m^\varphi f(x_\varphi) (x-a)^\varphi (b-x)^{m-\varphi},$$

où

$$(57) \quad x_\varphi = a + \frac{\varphi}{m} (b-a) \quad (\varphi = 0, 1, \dots, m).$$

Si l'on tient compte que $\sum_{\varphi=0}^m \sum_{\sigma=\varphi}^m C_{\varphi,\sigma} = \sum_{\sigma=0}^m \sum_{\varphi=0}^{\sigma} C_{\varphi,\sigma}$, on a donc

$$B_m(x) = \frac{1}{(b-a)^m} \sum_{\varphi=0}^m C_m^\varphi f(x_\varphi) \sum_{s=0}^{m-\varphi} (-1)^s C_{m-\varphi}^s (b-a)^{m-\varphi-s} (x-a)^{s+\varphi} = \\ = \frac{1}{(b-a)^m} \sum_{\varphi=0}^m (-1)^\varphi C_m^\varphi f(x_\varphi) \sum_{\sigma=\varphi}^m (-1)^\sigma C_{m-\varphi}^{\sigma-\varphi} (b-a)^{m-\sigma} (x-a)^\sigma = \\ = \frac{1}{(b-a)^m} \sum_{\sigma=0}^m a_\sigma (x-a)^\sigma, \text{ avec } a_\sigma \text{ donné par (56). Par conséquent}$$

$$(58) \quad P(x) = (b-a)^m B_m(x).$$

Si donc dans (1) les noeuds x ont la distribution de (57), le polynôme (1) est — abstraction faite d'un facteur constant — le polynôme de Bernstein de degré m relatif à l'intervalle $[a, b]$ qu'on vient de prendre.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Popoviciu T., Sur la conservation de l'allure de convexité d'une fonction par ses polynômes d'interpolation. *Mathematica*, 3 (26), 2, 311-329 (1961).

Reçu le 8. I. 1963