

we can find approximations for the discharges considering the cases when the filtration coefficient is constant and equals first k and then $\tilde{k}$.

The second way is to approximate the given medium by a harmonically inhomogeneous medium, i.e. the medium for which

$$\Delta k^{1/2} = 0,$$

and when we have to deal also with the determination of a harmonic function knowing certain boundary conditions.

REFERENCES

- [1] Ciarnii I. A., Podzeamnaia ghidravlika, Moscova (1956).
- [2] Dupuis J., Tables des logarithmes, d'après Callet, Paris (1880).
- [3] Filciakov P. F., Metod posledovatelniĥ konformniĥ otobrajenii i ego prilozhenia k zadaciām filtraĭii, Ukr. Mat. Jurnal, 7 4, 453 (1955); 8, 1, 76; 3, 299 (1956).
- [4] Filciakov P. F., Cislesniĥ metod konformnovo otobrajenia odnosviazniĥ odnolistniĥ oblastei; Ukr. Mat. Jurnal, 10, 438 (1958).
- [5] Gheorghita St. I., Asupra mișcării apelor arteziene, Analele Univ. București, nr. 15, 51 (1957).
- [6] Gheorghita St. I., A semi-inverse method in plane hydrodynamics, Arch. Mech. Stosowanej, IX, 6, 681 (1959).
- [7] Lavrentiev M. A., Șabat B. V., Metodi teorii funkĭi kompleksnovo peremennovo, Moscova, (1951).
- [8] Pihacev G. B., Podzemnaia ghidravlika, Moscova (1961).
- [9] Tabliți Barlow, Moscova (1950).
- [10] Tabliți e^x i e^{-x} , Moscova (1955).

Received 19. XI. 1963

L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

par

D. V. IONESCU

à Cluj

C. STÖRMER [5] a donné une formule d'intégration numérique pour l'équation différentielle

$$y'' = f(x, y).$$

On sait que si les noeuds $x_0, x_1, \dots, x_6$ sont en progression arithmétique dont la raison est égale à h et sont situés dans l'intervalle d'existence de la solution $y(x)$ de cette équation, on peut calculer $y(x_6)$, si $y(x)$ a été calculée au préalable sur les noeuds $x_0, x_1, \dots, x_5$, par la formule de Störmer

$$y(x_6) = 2y(x_5) - y(x_4) + h^2 \left[g(x_5) + \frac{\Delta_2 g(x_5)}{12} + \frac{\Delta_3 g(x_5)}{12} + 19 \frac{\Delta_4 g(x_5)}{240} + 9 \frac{\Delta_5 g(x_5)}{120} \right] + R$$

où $g(x) = f[x, y(x)]$.

Nous avons donné dans un récent travail [2] l'expression du reste de cette formule sous la forme d'une intégrale définie et nous avons montré qu'il est de l'ordre de h^6 .

Dans ce travail nous traitons un problème sur l'intégration numérique de l'équation différentielle

$$(1) \quad y'' = f(x, y, y').$$

Nous désignons par $y(x)$ la solution de cette équation qui satisfait aux conditions

$$(2) \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

et nous considérons les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_6$ en progression arithmétique dont la raison est $h = x_1 - x_0$ et qui sont situés dans l'intervalle d'existenc

de la solution $y(x)$. Nous allons donner des formules pour le calcul de la solution $y(x)$ et de sa dérivée sur les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_6$ en supposant que la solution $y(x)$ et sa dérivée $y'(x)$ ont été calculées au préalable sur l'un des noeuds $x_1, x_2, \dots, x_6$.

Ce problème est lié au polynôme d'interpolation de *Lagrange-Hermite* avec les noeuds ξ_0, ξ_1 triples et à sa dérivée. En prenant les valeurs de ce polynôme et de sa dérivée au point ξ_2 , nous avons des formules de dérivation numérique de la forme

$$(K) \quad f(\xi_2) = A_0 f(\xi_0) + A_1 f'(\xi_0) + A_2 f''(\xi_0) + B_0 f(\xi_1) + B_1 f'(\xi_1) + B_2 f''(\xi_1) + R$$

$$(L) \quad f'(\xi_2) = C_0 f(\xi_0) + C_1 f'(\xi_0) + C_2 f''(\xi_0) + D_0 f(\xi_1) + D_1 f'(\xi_1) + D_2 f''(\xi_1) + R'$$

Nous étudierons les restes R et R' de ces formules sous la forme d'une intégrale définie en supposant que la fonction $f(x)$ soit de la classe $C^{(6)}$ sur l'intervalle sur lequel on a pris les noeuds ξ_0, ξ_1, ξ_2 . Nous insisterons surtout sur le reste R' , dans le cas où $\xi_0 < \xi_2 < \xi_1$.

Des formules diverses de dérivation numérique sont établies dans tous les livres sur l'analyse numérique. Nous citons notamment le livre de I. S. BEREZIN et N. P. JIDKOV [1] et le livre de S. E. MIKELADZE [3]. L'académicien T. POPOVICIU a publié à ce propos un très important mémoire [4].

Evidemment ce problème peut-être étendu de diverses manières et nous comptons revenir sur ce sujet dans d'autres travaux.

§ 1.

La formule (K) de dérivation numérique

1. Considérons une fonction $f(x)$ de la classe $C^{(6)}$ sur l'intervalle $[\xi_0, \xi_2]$ et désignons par ξ_1 , un noeud compris entre ξ_0 et ξ_2 . Pour le calcul de $f(\xi_2)$ nous avons la formule (K), dans laquelle les coefficients $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ sont donnés par les formules

$$A_0 = -\frac{(\xi_2 - \xi_1)^3}{(\xi_1 - \xi_0)^5} [(\xi_1 - \xi_0)^2 + 3(\xi_1 - \xi_0)(\xi_2 - \xi_0) + 6(\xi_2 - \xi_0)^2]$$

$$(3) \quad A_1 = -\frac{(\xi_2 - \xi_1)^3}{(\xi_1 - \xi_0)^4} (\xi_2 - \xi_0) [3(\xi_2 - \xi_0) + (\xi_1 - \xi_0)]$$

$$A_2 = -\frac{(\xi_2 - \xi_1)^3 (\xi_2 - \xi_0)^2}{2(\xi_1 - \xi_0)^3}$$

et

$$B_0 = \frac{(\xi_2 - \xi_0)^3}{(\xi_1 - \xi_0)^5} [6(\xi_2 - \xi_0)^2 - 15(\xi_1 - \xi_0)(\xi_2 - \xi_0) + 10(\xi_1 - \xi_0)^2]$$

$$(4) \quad B_1 = \frac{(\xi_2 - \xi_0)^3}{(\xi_1 - \xi_0)^4} (\xi_2 - \xi_1) [4(\xi_1 - \xi_0) - 3(\xi_2 - \xi_0)]$$

$$B_2 = \frac{(\xi_2 - \xi_0)^3 (\xi_2 - \xi_1)^2}{2(\xi_1 - \xi_0)^3}$$

Le reste de la formule (K) est donné par la formule

$$(5) \quad R = \int_{\xi_0}^{\xi_2} \varphi(x) f^{(6)}(x) dx.$$

où la fonction $\varphi(x)$ coïncide sur les intervalles $[\xi_0, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2]$ avec les polynômes

$$\varphi_1(x) = -A_0 \frac{(x - \xi_0)^5}{5!} + A_1 \frac{(x - \xi_0)^4}{4!} - A_2 \frac{(x - \xi_0)^3}{3!}$$

$$(6) \quad \varphi_2(x) = -\frac{(x - \xi_2)^5}{5!}$$

On démontre que la fonction $\varphi(x)$ est positive sur l'intervalle (ξ_0, ξ_2) . En posant

$$(7) \quad M_6 = \sup_{[\xi_0, \xi_1]} |f^{(6)}(a)|.$$

on a pour R , l'évaluation

$$(8) \quad |R| \leq \frac{(\xi_2 - \xi_0)^3 (\xi_2 - \xi_1)^3}{6!} M_6$$

2. Lorsque $\xi_0 < \xi_2 < \xi_1$ et la fonction $f(x)$ est de la classe $C^{(6)}$ sur l'intervalle $[\xi_0, \xi_1]$ on a pour la calcul de $f(\xi_2)$ la même formule (K) avec les coefficients (3) et (4), mais pour laquelle le reste que nous désignons par R_1 , est donné par la formule

$$(9) \quad R_1 = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \psi(x) f^{(6)}(x) dx$$

où la fonction $\psi(x)$ coïncide sur les intervalles $[\xi_0, \xi_2]$, $[\xi_2, \xi_1]$ avec les polynômes

$$(10) \quad \psi_1(x) = -A_0 \frac{(x - \xi_0)^5}{5!} + A_1 \frac{(x - \xi_0)^4}{4!} - A_2 \frac{(x - \xi_0)^3}{3!}$$

$$\psi_2(x) = B_0 \frac{(x - \xi_1)^5}{5!} - B_1 \frac{(x - \xi_1)^4}{4!} + B_2 \frac{(x - \xi_1)^3}{3!}$$

On démontre que la fonction $\psi(x)$ est négative sur l'intervalle (ξ_0, ξ_1) . En posant

$$(11) \quad M'_6 = \sup_{[\xi_0, \xi_1]} |f^{(6)}(x)|.$$

nous avons l'évaluation

$$(12) \quad |R_1| \leq \frac{(\xi_2 - \xi_0)^2 (\xi_1 - \xi_2)^2}{6!} M'_6$$

§ 2.

La formule (L) de dérivation numérique

3. Si la fonction $f(x)$ est de la classe $C^{(6)}$ sur l'intervalle $[\xi_0, \xi_2]$ et si ξ_1 est un noeud compris entre ξ_0 et ξ_2 , nous avons la formule (L) pour le calcul de $f'(\xi_2)$, dans laquelle les coefficients $C_0, C_1, C_2, D_0, D_1, D_2$ sont donnés par les formules

$$C_0 = -30 \frac{(\xi_2 - \xi_1)^2 (\xi_2 - \xi_0)^2}{(\xi_1 - \xi_0)^5}$$

$$(13) \quad C_1 = -\frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{(\xi_1 - \xi_0)^4} [3(\xi_2 - \xi_0) - (\xi_1 - \xi_0)] [5(\xi_2 - \xi_0) + (\xi_1 - \xi_0)]$$

$$C_2 = -\frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{2(\xi_1 - \xi_0)^3} (\xi_2 - \xi_0) [5(\xi_2 - \xi_0) - 2(\xi_1 - \xi_0)]$$

et

$$D_0 = 30 \frac{(\xi_2 - \xi_1)^2 (\xi_2 - \xi_0)^2}{(\xi_1 - \xi_2)^5}$$

$$(14) \quad D_1 = -\frac{(\xi_2 - \xi_0)^2}{(\xi_1 - \xi_0)^4} [3(\xi_2 - \xi_0) - 2(\xi_1 - \xi_0)] [5(\xi_2 - \xi_0) - 6(\xi_1 - \xi_0)]$$

$$D_2 = \frac{(\xi_2 - \xi_0)^2}{2(\xi_1 - \xi_0)^3} (\xi_2 - \xi_1) [5(\xi_2 - \xi_0) - 3(\xi_1 - \xi_0)]$$

Le reste de la formule (L) est donné par la formule

$$(15) \quad R' = \int_{\xi_0}^{\xi_2} \theta(x) f^{(6)}(x) dx$$

où la fonction $\theta(x)$ coïncide sur les intervalles $[\xi_0, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2]$ avec les polynômes

$$(16) \quad \begin{aligned} \theta_1(x) &= -C_0 \frac{(x - \xi_0)^5}{5!} + C_1 \frac{(x - \xi_0)^4}{4!} - C_2 \frac{(x - \xi_0)^3}{3!} \\ \theta_2(x) &= \frac{(x - \xi_2)^4}{4!} \end{aligned}$$

On démontre que la fonction $\theta(x)$ est positive sur l'intervalle (ξ_0, ξ_2) et qu'on a l'évaluation

$$(17) \quad |R'| \leq \frac{3}{6!} (\xi_2 - \xi_0)^2 (\xi_2 - \xi_1)^2 [(\xi_2 - \xi_0) + (\xi_2 - \xi_1)] M_6$$

4. Lorsque le noeud ξ_2 est compris entre ξ_0 et ξ_1 , et la fonction $f(x)$ est de la classe $C^{(6)}$ sur l'intervalle $[\xi_0, \xi_1]$ nous avons pour le calcul de $f'(\xi_2)$ la même formule (L) avec les mêmes coefficients (13) et (14), mais nous avons pour le reste R'_1 la formule

$$(18) \quad R'_1 = \int_{\xi_1}^{\xi_0} \chi(x) f^{(6)}(x) dx$$

où la fonction $\chi(x)$ coïncide sur les intervalles $[\xi_0, \xi_2]$, $[\xi_2, \xi_1]$ avec les polynômes

$$(19) \quad \begin{aligned} \chi_1(x) &= -C_0 \frac{(x - \xi_0)^5}{5!} + C_1 \frac{(x - \xi_0)^4}{4!} - C_2 \frac{(x - \xi_0)^3}{3!} \\ \chi_2(x) &= D_0 \frac{(x - \xi_1)^5}{5!} - D_1 \frac{(x - \xi_1)^4}{4!} + D_2 \frac{(x - \xi_1)^3}{3!} \end{aligned}$$

La discussion du signe de la fonction $X(x)$ sur l'intervalle (ξ_0, ξ_1) met en évidence trois points importants sur l'intervalle (ξ_0, ξ_1)

$$(20) \quad \alpha_1 = \xi_0 + \frac{2}{5} (\xi_1 - \xi_0), \quad \alpha_2 = \frac{\xi_0 + \xi_1}{2}, \quad \alpha_3 = \xi_0 + \frac{3}{5} (\xi_1 - \xi_0)$$

Nous avons les conclusions suivantes :

1° Si $\xi_0 < \xi_2 \leq \alpha_1$ la fonction $\chi(x)$ est négative sur l'intervalle (ξ_0, ξ_1) .

2° Si $\alpha_1 < \xi_2 < \alpha_2$ la fonction $\chi(x)$ s'annule en un point ξ^* de l'intervalle (ξ_0, ξ_2) ; elle est positive sur l'intervalle (ξ_0, ξ^*) et négative sur l'intervalle (ξ^*, ξ_1) .

3° Si $\xi_2 = \alpha_2$ la fonction $\chi(x)$ s'annule pour $x = \alpha_2$; elle est positive sur l'intervalle (ξ_0, α_2) et négative sur l'intervalle (α_2, ξ_1) .

4° Si $\alpha_2 < \xi_2 < \alpha_3$ la fonction $\chi(x)$ s'annule en un point ξ'^* de l'intervalle (ξ_2, ξ_1) ; elle est positive sur l'intervalle (ξ_0, ξ'^*) et négative sur l'intervalle (ξ'^*, ξ_1) .

5° Si $\alpha_3 \leq \xi_2 < \xi_1$, la fonction $\chi(x)$ est positive sur l'intervalle (ξ_0, ξ_1) .

Nous avons

$$(21) \quad \int_{\xi_0}^{\xi_1} \chi(x) dx = \frac{1}{5!} (\xi_2 - \xi_0)^2 (\xi_2 - \xi_1)^2 \left(\xi_2 - \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} \right)$$

et par suite le degré d'exactitude de la formule (L) est cinq si $\xi_2 \neq \alpha_2$ et il augmente d'une unité lorsque $\xi_2 = \alpha_2$.

On démontre que le graphique de la fonction $\chi(x)$ sur l'intervalle $[\xi_0, \xi_1]$ a l'une des formes suivantes selon la position de ξ_2 par rapport aux points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

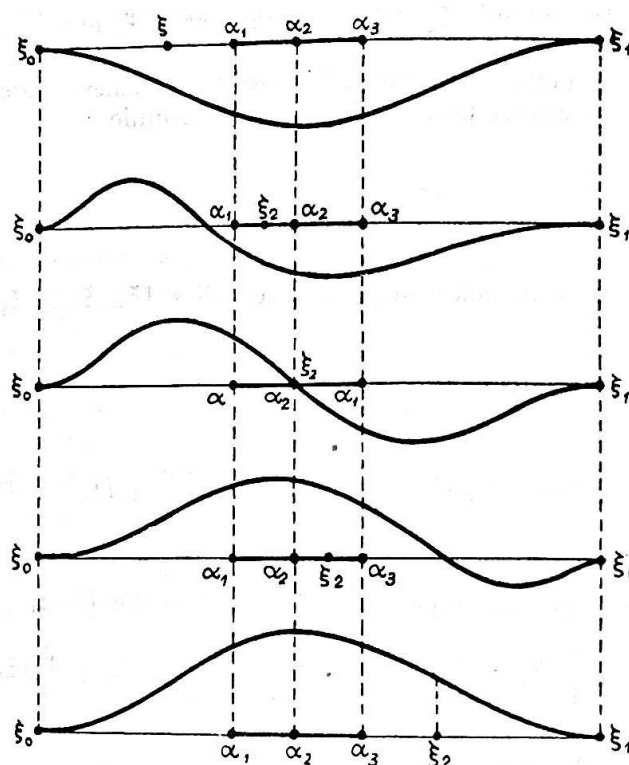


Fig. 1.

Remarque. Lorsque la fonction $f(x)$ est de la classe $C^{(7)}$ sur l'intervalle $[\xi_0, \xi_1]$ et $\xi_2 = \alpha_2$, on a la formule de dérivation numérique

$$(22) \quad f'(\xi_2) = -\frac{15}{16\lambda} f(\xi_0) - \frac{7}{16} f'(\xi_0) - \frac{\lambda}{16} f''(\xi_0) + \\ + \frac{15}{16\lambda} f(\xi_1) - \frac{7}{16} f'(\xi_1) + \frac{\lambda}{16} f''(\xi_1) + R_2$$

où $\lambda = \xi_2 - \xi_0 = \xi_1 - \xi_2$. Le reste R_2 est donné par la formule

$$(23) \quad R_2 = - \int_{\xi_0}^{\xi_1} \omega(x) f^{(7)}(x) dx$$

où la fonction $\omega(x)$ coïncide sur les intervalles $[\xi_0, \xi_2]$, $[\xi_2, \xi_1]$ avec les polynômes

$$(24) \quad \omega_1(x) = \frac{15}{16\lambda} \frac{(x - \xi_0)^6}{6!} - \frac{7}{16} \frac{(x - \xi_0)^5}{5!} + \frac{\lambda}{16} \frac{(x - \xi_0)^4}{4!} \\ \omega_2(x) = \frac{15}{16\lambda} \frac{(x - \xi_1)^6}{6!} + \frac{7}{16} \frac{(x - \xi_1)^5}{5!} + \frac{\lambda}{16} \frac{(x - \xi_1)^4}{4!}$$

On démontre que la fonction $\omega(x)$ est positive sur l'intervalle (ξ_0, ξ_1) et qu'elle a le graphique donné dans la fig. 2

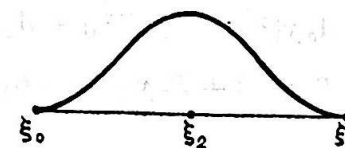


Fig. 2.

En posant

$$M_7 = \sup_{[\xi_0, \xi_1]} |f^{(7)}(x)|$$

on a l'évaluation

$$(25) \quad |R_2| \leq \frac{\lambda^6}{7!} M_7.$$

§ 3.

L'intégration numérique de l'équation différentielle (1) avec les conditions (2)

5. Nous allons faire maintenant l'application des formules (K) et (L) à l'intégration numérique de l'équation différentielle (1), avec les conditions (2).

Supposons que la solution de l'équation (1) qui vérifie les conditions (2) existe sur l'intervalle $[x_0, x_0 + a]$ et que dans le parallélépipède (π) définie par

$$x_0 \leq x \leq x_0 + a, \quad |y - y_0| \leq b, \quad |y' - y'_0| \leq c.$$

la fonction $f(x, y, y')$ est continue et a des dérivées partielles successives, par rapport à x, y, y' jusqu'au quatrième ordre, continues. Dans ce cas, par des dérivations successives, on déduit de l'équation (1)

$$(26) \quad y''' = f_1(x, y, y'), \dots, y^{(6)} = f_4(x, y, y')$$

où les fonctions $f_1, \dots, f_4$ sont continues dans (π) .

Nous désignons par

$$(27) \quad F_4 = \sup_{(\pi)} |f_4(x, y, y')|$$

Supposons que l'on ait calculé la solution $y(x)$ et sa dérivée $y'(x)$ au point ξ_1 . Alors pour calculer $y(x)$ et $y'(x)$ au point ξ_2 on peut appliquer les formules (K) et (L), où on va remplacer $y''(x)$ par

$$(28) \quad g(x) = f[x, y(x), y'(x)].$$

Les formules d'intégration numérique que nous avons en vue sont alors

$$(29) \quad y(\xi_2) = A_0 y(\xi_0) + A_1 y'(\xi_0) + A_2 g(\xi_0) + \\ + B_0 y(\xi_1) + B_1 y'(\xi_1) + B_2 g(\xi_1) + R$$

où le reste a l'expression

$$(30) \quad R = \int_{\xi_0}^{\xi_2} \varphi(x) f_4[x, y(x), y'(x)] dx$$

si $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2$ ou

$$(30_1) \quad R_1 = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \psi(x) f_4[x, y(x), y'(x)] dx$$

si $\xi_0 < \xi_2 < \xi_1$, et

$$(31) \quad y'(\xi_2) = C_0 y(\xi_0) + C_1 y'(\xi_0) + C_2 g(\xi_0) + \\ + D_0 y(\xi_1) + D_1 y'(\xi_1) + D_2 g(\xi_1) + R'$$

où le reste a l'expression

$$(32) \quad R' = \int_{\xi_0}^{\xi_2} \theta(x) f_4[x, y(x), y'(x)] dx.$$

si $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2$ ou

$$(32_1) \quad R'_1 = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \chi(x) f_4[x, y(x), y'(x)] dx.$$

si $\xi_0 < \xi_2 < \xi_1$.

Pour R , nous avons l'évaluation

$$(33) \quad |R| \leq KF_4.$$

où

$$(34) \quad K = \frac{(\xi_2 - \xi_0)^3 (\xi_2 - \xi_1)^3}{6!}$$

et pour R_1 , nous avons l'évaluation

$$(35) \quad |R_1| \leq K_1 F_4$$

où

$$(36) \quad K_1 = \frac{(\xi_2 - \xi_0)^3 (\xi_1 - \xi_2)^3}{6!}$$

Pour R' nous avons l'évaluation

$$(37) \quad |R'| \leq K' F_4$$

où

$$(38) \quad K' = \frac{1}{5!} (\xi_2 - \xi_0)^2 (\xi_2 - \xi_1)^2 \left(\xi_2 - \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} \right)$$

Quant à l'évaluation de R'_1 nous distinguons plusieurs cas.

1° Si $\xi_0 < \xi_2 \leq \xi_0 + \frac{2}{5} (\xi_1 - \xi_0)$ nous avons

$$(39) \quad |R'_1| \leq K'_1 F_4.$$

où

$$(40) \quad K'_1 = \frac{1}{5!} (\xi_2 - \xi_0)^2 (\xi_2 - \xi_1)^2 \left| \xi_2 - \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} \right|$$

2° Si $\xi_0 + \frac{3}{5} (\xi_1 - \xi_0) \leq \xi_2 < \xi_1$ nous avons

$$(41) \quad |R'_1| \leq K'_1 F_4.$$

où

$$(42) \quad K'_1 = \frac{1}{5!} (\xi_0 - \xi_0)^2 (\xi_2 - \xi_1)^2 \left(\xi_2 - \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} \right).$$

3° Si $\xi_0 + \frac{2}{5} (\xi_0 - \xi_1) < \xi_2 < \xi_0 + \frac{3}{5} (\xi_1 - \xi_0)$ nous avons

$$(43) \quad |R'_1| \leq K'_1 F_4.$$

où

$$(44) \quad K'_1 = \int_{\xi_0}^{\xi_1} |\chi(x)| dx.$$

En particulier pour $\xi_2 = \frac{\xi_0 + \xi_1}{2}$ nous avons

$$(45) \quad K'_1 = 2 \int_{\xi_0}^{\xi_1} \chi(x) dx.$$

6. Dans le cas de la suite de noeuds $x_0, x_1, \dots, x_6$ on prend $\xi_0 = x_0$ et $\xi_1 = x_i$, ($i = 1, 2, \dots, 6$). Lorsque ξ_2 est un des noeuds $x_1, x_2, \dots, x_6$ différent de x_i , il se présente les circonstances suivantes :

1° $\xi_2 > \xi_1$

2° $\xi_2 = \alpha_2$

3° $\xi_2 \in (\xi_0, \alpha_1]$ on $\xi_2 \in [\alpha_3, \xi_1]$

Dans tous ces trois cas on peut calculer facilement le coefficient K' ou le coefficient K'_1 , avec l'une des formules (38), (45), (40) ou (42).

Nous terminons ce travail en donnant des tableaux avec les coefficients $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, K$ ou K_1 pour construire des formules pratiques (29) pour le calcul de $y(\xi_2)$ et aussi des tableaux avec les coefficients $C_0, C_1, C_2, D_0, D_1, D_2, K'$ ou K'_1 pour construire des formules pratiques (31) pour le calcul de $y'(\xi_2)$.

1° $\xi_0 = x_0, \xi_1 = x_1; \xi_2 = x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

$$y(\xi_2)$$

ξ_2	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	B_2	Kh^6 ou K_1h^6
x_2	-31	-14h	-2h ²	32	-16h	4h ²	$\frac{1}{90} < 0,0112$
x_3	-512	-240h	-36h ²	513	-270h	54h ²	$\frac{3}{10} = 0,3$
x_4	-2943	-1404h	-216h ²	2944	-1536h	288h ²	$\frac{12}{5} = 2,4$
x_5	-10624	-5120h	-800h ²	10625	-5500h	1000h ²	$\frac{100}{9} < 11,1112$
x_6	-29375	-14250h	-2250h ²	29376	-15120h	2700h ²	$\frac{75}{2} = 37,5$

$$y'(\xi_2)$$

ξ_2	C_0	C_1	C_2	D_0	D_1	D_2	$K'h^5$ ou $K'h^5$
x_2	$-\frac{120}{h}$	-55	-8h	$\frac{120}{h}$	-64	14h	$\frac{1}{20} = 0,05$
x_3	$-\frac{1080}{h}$	-512	-78h	$\frac{1080}{h}$	-567	108h	$\frac{3}{4} = 0,75$
x_4	$-\frac{4320}{h}$	-2079	-324h	$\frac{4320}{h}$	-2240	408h	$\frac{21}{5} = 4,2$
x_5	$-\frac{12000}{h}$	-5824	-920h	$\frac{12000}{h}$	-6175	1100h	15
x_6	$-\frac{27000}{h}$	-13175	-2100h	$\frac{27000}{h}$	-13824	2430h	$\frac{165}{4} = 41,25$

2° $\xi_0 = x_0, \xi_1 = x_2; \xi_2 = x_1, x_3, x_4, x_5, x_6$

$$y(\xi_2)$$

ξ_2	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	B_2	Kh^6 ou K_1h^6
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}h$	$\frac{1}{16}h^2$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5h}{16}$	$\frac{1}{16}h^2$	$\frac{1}{720} < 0,0014$
x_3	$-\frac{19}{8}$	$-\frac{33}{16}h$	$-\frac{9}{16}h^2$	$\frac{27}{8}$	$-\frac{27}{16}h$	$\frac{27}{16}h^2$	$\frac{3}{10} = 0,3$
x_4	-31	-28h	-8h ²	32	-32h	16h ²	$\frac{32}{45} < 0,7112$
x_5	$-\frac{621}{4}$	$-\frac{2295}{16}h$	$-\frac{675}{16}h^2$	$\frac{625}{4}$	$-\frac{2625}{16}h$	$\frac{1125}{16}h^2$	$\frac{75}{16} = 4,6875$
x_6	-512	-480h	-144h ²	513	-540h	216h ²	$\frac{69}{5} = 19,2$

$y'(\xi_2)$

ξ_2	C_0	C_1	C_2	D_0	D_1	D_2	$K'h^5$ ou $K_1'h^5$
x_1	$-\frac{15}{16h}$	$-\frac{7}{16}$	$-\frac{1}{16}h$	$\frac{15}{16h}$	$-\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}h$	$\frac{1}{1920} < 0,00053$
x_3	$-\frac{135}{16h}$	$-\frac{119}{16}$	$-\frac{33}{16}h$	$\frac{135}{16h}$	$-\frac{135}{16}$	$\frac{81}{16}h$	$\frac{3}{5} = 0,6$
x_4	$-\frac{60}{h}$	-55	$-16h$	$\frac{60}{h}$	-64	$28h$	$\frac{8}{5} = 1,6$
x_5	$-\frac{3375}{16h}$	$-\frac{3159}{16}$	$-\frac{945}{16}h$	$\frac{3375}{16h}$	$-\frac{3575}{16}$	$\frac{1425}{16}h$	$\frac{15}{2} = 7,5$
x_6	$-\frac{540}{h}$	-512	$-156h$	$\frac{540}{h}$	-567	$216h$	24

 $3^0 \xi_0 = x_0, \xi_1 = x_3; \xi_2 = x_1, x_2, x_4, x_5, x_6$ $y(\xi_2)$

ξ_2	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	B_2	$K'h^6$ ou $K_1'h^6$
x_1	$\frac{64}{81}$	$\frac{16}{87}h$	$\frac{4}{27}h^2$	$\frac{17}{81}$	$-\frac{2}{9}h$	$\frac{2}{27}h^2$	$\frac{1}{90} < 0,0112$
x_2	$\frac{17}{81}$	$\frac{2}{9}h$	$\frac{2}{27}h^2$	$\frac{64}{81}$	$-\frac{16}{27}h$	$\frac{4}{27}h^2$	$\frac{1}{90} < 0,0112$
x_4	$-\frac{47}{81}$	$-\frac{20}{27}h$	$-\frac{8}{27}h^2$	$\frac{128}{81}$	0	$\frac{32}{27}h^2$	$\frac{4}{45} < 0,0889$
x_5	$-\frac{544}{81}$	$-\frac{80}{9}h$	$-\frac{100}{27}h^2$	$\frac{625}{81}$	$-\frac{250}{27}h$	$\frac{250}{27}h^2$	$\frac{25}{18} < 1,3889$
x_6	-31	$-42h$	$-18h^2$	32	$-48h$	$36h^2$	$\frac{162}{20} = 8,1$

 $y'(\xi_2)$

ξ_2	C_0	C_1	C_2	D_0	D_1	D_2	$K'h^5$ ou $K_1'h^5$
x_1	$-\frac{40}{81h}$	0	$\frac{6}{81}h$	$\frac{40}{81h}$	$-\frac{39}{81}$	$\frac{12}{81}h$	$\frac{1}{60} < 0,0167$
x_2	$-\frac{40}{81h}$	$-\frac{39}{81}$	$-\frac{12}{81}h$	$\frac{40}{81h}$	0	$\frac{6}{81}h$	$\frac{1}{60} < 0,0167$
x_4	$-\frac{160}{81h}$	$-\frac{207}{81}$	$-\frac{84}{81}h$	$\frac{160}{81h}$	$-\frac{192}{81}$	$\frac{264}{81}h$	$\frac{1}{3} < 0,3334$
x_5	$-\frac{1000}{81h}$	$-\frac{1344}{81}$	$-\frac{570}{81}h$	$\frac{1000}{81h}$	$-\frac{1575}{81}$	$\frac{1200}{81}h$	$\frac{35}{12} < 2,9167$
x_6	$-\frac{40}{h}$	-55	$-24h$	$\frac{40}{h}$	-64	$42h$	$\frac{243}{20} = 12,15$

 $4^0 \xi_0 = x_0, \xi_1 = x_4; \xi_2 = x_1, x_2, x_3, x_5, x_6$ $y(\xi_2)$

ξ_2	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	B_2	$K'h^6$ ou $K_1'h^6$
x_1	$\frac{459}{512}$	$\frac{189}{512}h$	$\frac{27}{128}h^2$	$\frac{53}{512}$	$-\frac{39}{256}h$	$\frac{9}{128}h^2$	$\frac{3}{80} = 0,0375$
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}h$	$\frac{1}{4}h^2$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}h$	$\frac{1}{4}h^2$	$\frac{4}{45} < 0,0889$
x_3	$\frac{53}{512}$	$\frac{39}{256}h$	$\frac{9}{128}h^2$	$\frac{459}{512}$	$-\frac{189}{256}h$	$\frac{27}{128}h^2$	$\frac{3}{80} = 0,0375$
x_5	$-\frac{113}{512}$	$-\frac{95}{256}h$	$-\frac{25}{128}h^2$	$\frac{625}{512}$	$-\frac{125}{256}h$	$\frac{125}{128}h^2$	$\frac{25}{144} < 0,1737$
x_6	$-\frac{19}{8}$	$-\frac{33}{8}h$	$-\frac{9}{4}h^2$	$\frac{27}{8}$	$-\frac{27}{8}h$	$\frac{27}{4}h^2$	$\frac{12}{5} = 2,4$

$y'(\xi_2)$

ξ_2	C_0	C_1	C_2	D_0	D_1	D_2	$K'h^5$ ou $K_1'h^5$
x_1	$-\frac{135}{512h}$	$\frac{81}{256}$	$\frac{27}{128}h$	$\frac{135}{512h}$	$-\frac{95}{256}$	$\frac{21}{128}h$	$\frac{3}{40} = 0,075$
x_2	$-\frac{15}{32h}$	$-\frac{7}{16}$	$-\frac{1}{8}h$	$\frac{15}{32h}$	$-\frac{7}{16}$	$\frac{1}{8}h$	$\frac{1}{60} < 0,0167$
x_3	$-\frac{135}{512h}$	$-\frac{95}{256}$	$-\frac{21}{128}h$	$\frac{135}{512h}$	$-\frac{81}{256}$	$-\frac{27}{128}h$	$\frac{3}{40} = 0,075$
x_5	$-\frac{375}{512h}$	$-\frac{319}{256}$	$-\frac{85}{128}h$	$\frac{375}{512h}$	$-\frac{175}{256}$	$\frac{325}{128}h$	$\frac{5}{8} = 0,625$
x_6	$-\frac{135}{32h}$	$-\frac{119}{16}$	$-\frac{33}{8}h$	$\frac{135}{32h}$	$-\frac{135}{16}$	$\frac{81}{8}h$	$\frac{24}{5} = 4,8$

 $5^0 \xi_0 = x_0, \xi_1 = x_5; \xi_2 = x_1, x_2, x_3, x_4, x_6$
 $y(\xi_2)$

ξ_2	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	B_2	Kh^6 ou $K_1'h^6$
x_1	$\frac{2944}{3125}$	$\frac{512}{625}h$	$\frac{64}{250}h^2$	$\frac{181}{3125}$	$-\frac{68}{625}h$	$\frac{16}{250}h^2$	$\frac{4}{45} < 0,0889$
x_2	$\frac{2133}{3125}$	$\frac{594}{625}h$	$\frac{54}{125}h^2$	$\frac{992}{3125}$	$-\frac{336}{625}h$	$\frac{36}{125}h^2$	$\frac{3}{10} = 0,3$
x_3	$\frac{992}{3125}$	$\frac{336}{625}h$	$\frac{36}{125}h^2$	$\frac{2133}{3125}$	$-\frac{594}{625}h$	$\frac{54}{125}h^2$	$\frac{3}{10} = 0,3$
x_4	$\frac{181}{3125}$	$\frac{68}{625}h$	$\frac{8}{125}h^2$	$\frac{2944}{3125}$	$-\frac{512}{625}h$	$\frac{32}{125}h^2$	$\frac{4}{45} < 0,0889$
x_6	$-\frac{331}{3125}$	$-\frac{138}{625}h$	$-\frac{18}{125}h^2$	$\frac{3456}{3125}$	$\frac{432}{625}h$	$\frac{108}{125}h^3$	$\frac{3}{10} = 0,3$

 $y'(\xi_2)$

ξ_2	C_0	C_1	C_2	D_0	D_1	D_2	Kh^5 ou $K_1'h^5$
x_1	$-\frac{96}{625h}$	$\frac{64}{125}$	$-\frac{40}{125}h$	$\frac{96}{625h}$	$-\frac{35}{125}$	$\frac{20}{125}h$	$\frac{1}{5} = 0,2$
x_2	$-\frac{216}{625h}$	$-\frac{27}{125}$	0	$\frac{216}{625h}$	$-\frac{64}{125}$	$\frac{30}{125}h$	$\frac{3}{20} = 0,15$
x_3	$-\frac{216}{625h}$	$-\frac{64}{125}$	$-\frac{30}{125}h$	$\frac{216}{625h}$	$-\frac{27}{125}$	0	$\frac{3}{20} = 0,15$
x_4	$-\frac{96}{625h}$	$-\frac{35}{125}$	$-\frac{20}{125}h$	$\frac{96}{625h}$	$\frac{64}{125}$	$-\frac{40}{125}h$	$\frac{1}{2} = 0,2$
x_6	$-\frac{216}{625h}$	$-\frac{91}{125}$	$-\frac{60}{125}h$	$\frac{216}{625h}$	0	$\frac{270}{125}h$	$\frac{21}{20} = 1,05$

 $6^0 \xi_0 = x_0, \xi_1 = x_6; \xi_2 = x_1, x_2, x_3, x_4, x_6$
 $y(\xi_2)$

ξ_2	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	B_2	Kh^6 ou $K_1'h^6$
x_1	$\frac{625}{648}$	$\frac{125}{144}h$	$\frac{125}{432}h^2$	$\frac{23}{648}$	$-\frac{35}{432}h$	$\frac{25}{432}h^2$	$\frac{25}{144} < 0,1737$
x_2	$\frac{64}{81}$	$\frac{32}{27}h$	$\frac{16}{27}h^2$	$\frac{17}{81}$	$-\frac{12}{27}h$	$\frac{8}{27}h^2$	$\frac{32}{45} < 0,7112$
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}h$	$\frac{9}{16}h^2$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{16}h$	$\frac{9}{16}h^2$	$\frac{81}{80} = 1,0125$
x_4	$\frac{17}{81}$	$\frac{4}{9}h$	$\frac{8}{27}h^2$	$\frac{64}{81}$	$-\frac{32}{27}h$	$\frac{16}{27}h^2$	$\frac{32}{45} < 0,7112$
x_6	$\frac{23}{648}$	$\frac{35}{432}h$	$\frac{25}{432}h^2$	$\frac{625}{648}$	$-\frac{125}{144}h$	$\frac{125}{144}h^2$	$\frac{25}{144} < 0,1737$

$y'(\xi_2)$

ξ_0	C_0	C_1	C_2	D_0	D_1	D_2	$K'h^5$ ou $K_1'h^5$
x_1	$-\frac{125}{1296h}$	$\frac{275}{432}$	$\frac{175}{432}h$	$\frac{125}{1296h}$	$-\frac{93}{432}$	$\frac{65}{432}h$	$\frac{5}{12} < 0,4167$
x_2	$-\frac{20}{81h}$	0	$\frac{4}{27}h$	$\frac{20}{81h}$	$-\frac{13}{27}$	$\frac{8}{27}h$	$\frac{8}{15} < 0,5334$
x_3	$-\frac{5}{16h}$	$-\frac{7}{16}$	$-\frac{3}{16}h$	$\frac{5}{16h}$	$-\frac{7}{16}$	$\frac{3}{16}h$	$\frac{81}{640} < 0,1266$
x_4	$-\frac{20}{81h}$	$-\frac{39}{81}$	$-\frac{8}{27}h$	$\frac{20}{81h}$	0	$-\frac{4}{27}h$	$\frac{8}{15} < 0,5334$
x_5	$-\frac{125}{1296h}$	$\frac{93}{432}$	$-\frac{65}{432}h$	$\frac{125}{1296h}$	$+\frac{275}{432}$	$-\frac{175}{432}h$	$\frac{5}{12} < 0,4167$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Березни И. С. и Жидков Н. П., *Методы вычислений*. Москва, 1, 3 (1959)
 [2] Ionescu D. V., *Restul în formula de integrare numerică a lui Störmer*. Studii și cercetări de mat. (Cluj), XIV, 49–56 (1963).
 [3] Микеладзе Ш. Е., *Численные методы математического анализа*. Москва, XII, 1953.
 [4] Popoviciu T., *Asupra restului în unele formule de derivare numerică*. Studii și cerc. matematice, 3, 1–2, 53–122 (1952).
 [5] Störmer C., *Méthode d'intégration numérique des équations différentielles ordinaires*. Congr. Intern. des Mathématiciens, Strasbourg, 243–257 (1920).

Reçu le 19. XI. 1963

НОМОГРАММЫ С ОРИЕНТИРОВАННЫМ ТРАНСПАРАНТОМ
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ШЕСТЬЮ ПЕРЕМЕННЫМИ

Г. Д. ИОНЕСКУ

Клуж

Известен тот факт, что уравнения, имеющие больше трёх переменных, вообще не номографируемы. Известны только номограммы с двойным выравниванием, с крестовидным транспарантом, или с параллельным транспарантом для уравнений с четырьмя переменными, которых можно представить в виде

$$F_{12} = G_{34}$$

Также для уравнений с четырьмя переменными можно построить номограммы с выравненными точками, образованные из двух шкал и одной котирующей сети для уравнений вида

$$f_1(g_2 + g_{34}) + g_1(f_2 + f_{34}) + f_2g_{34} + g_2f_{34} = 0$$

а для уравнения вида

$$f_1f_4 + g_1g_4 + f_1f_{23} + g_1g_{23} + f_{23}^2 + g_{23}^2 = 0$$

можно построить номограммы с прямоугольным транспарантом.

Уравнение с четырьмя переменными вида

$$z_4 = F(f_{12} + f_3, g_{12})$$

можно представлять ромбовидной номограммой [12], а для уравнений с пятью переменными также известны простые номограммы для нескольких типов уравнений, как, например

$$z_5 = F(f_{12}, g_{34}); \quad z_5 = F[\varphi(f_{12}, g_3), \psi_4] \quad \text{и т. п.}$$

Используя идею о номограмме с ориентированным транспарантом, высказанную М. ДОКАНЬ в [1] и [2], автор устанавливает все возможные канонические формы для уравнений с четырьмя и пятью переменными, которые можно решать при помощи номограмм с ориентированным